HZ BOOKS
华章教育

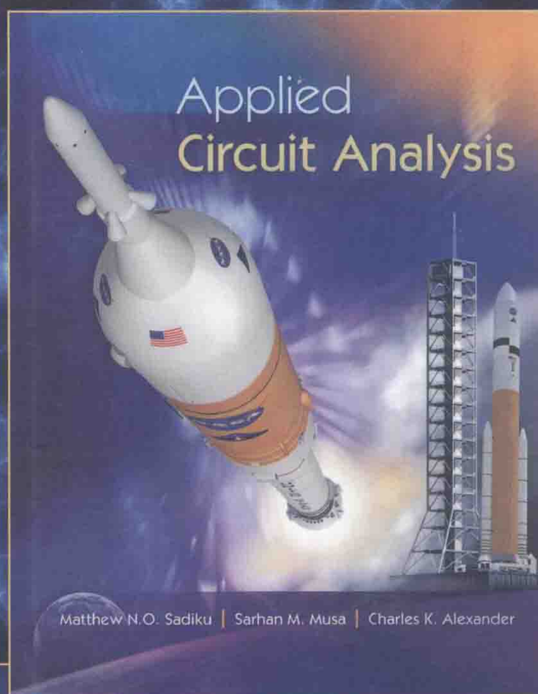
Mc Graw Hill Education

国外电子与电气工程技术丛书

应用电路分析

[美] Matthew N.O. Sadiku　Sarhan M. Musa　Charles K. Alexander　著
苏育挺　王建　张承乾　宫霄霖　译

Applied Circuit Analysis



机械工业出版社
China Machine Press

本书可作为高等院校电类专业“电路分析”课程的教材，以更清晰、生动、易于理解的方式来阐述电路分析的方法。全书分为两部分，第一部分包括第1 ~ 10章，主要介绍直流电路；第二部分包括第11 ~ 19章，主要介绍交流电路。本书可以作为大学两学期或三学期的电路教材，授课教师也可选择适当的章节，将其用作一学期课程的教材。

本书特色

- 每章均以相关历史人物或者工程师职业要求开篇，然后通过引言将该章内容与前面章节的内容衔接起来，同时提出该章学习的目标。每章结束部分总结了该章要点及相关公式。
- 简捷清晰、循序渐进地介绍所有原理，尽可能避免对细节的过多赘述，以更好地理解概念和整体内容。
- 每节都给出大量切实可行的例题，并进行详细解答。部分例题还给出了两到三种求解方式，以帮助学生理解和比较不同的解题方法，加深对所学内容的理解。
- 每章最后一节着重于该章概念的实际应用，至少包括一个实际问题或者实际器件，以帮助学生了解所学概念是如何应用于实际问题的。
- 按照ABET对集成计算机工具的要求，鼓励学生使用PSpice和Multisim等计算机辅助分析软件。

作者简介

Matthew N.O. Sadiku 博士，美国Prairie View A&M大学教授，兼任《IEEE Transactions on Education》杂志副主编。他曾在朗讯、波音等公司从事研发工作，发表过170余篇学术论文，出版过近30部著作。

Sarhan M. Musa 博士，美国Prairie View A&M大学工程技术系副教授，IEEE高级会员，同时也是2010年度Boeing Welliver Fellow。

Charles K. Alexander 分别于1967年和1971年获得俄亥俄大学的电气工程学硕士学位和博士学位，目前为俄亥俄州立大学克利夫兰分校Fenn工学院电气与计算机工程系教授，以及电子学与航空航天技术研究中心（CREATE）的主任。他是IEEE的会士，曾任IEEE主席和CEO。他于1984年获得IEEE百年纪念奖章，还先后荣获英国工程委员会颁发的杰出工程教育成就奖和杰出工程教育领导奖。

McGraw Hill Education
www.mheducation.com

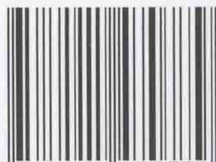
投稿热线：(010) 88379604
客服热线：(010) 88378991 88361066
购书热线：(010) 68326294 88379649 68995259



华章网站：www.hzbook.com
网上购书：www.china-pub.com
数字阅读：www.hzmedia.com.cn

上架指导：电路分析

ISBN 978-7-111-47077-9



定价：99.00元

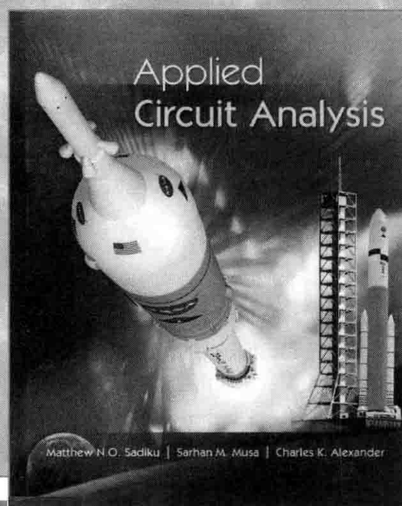
封面设计 江诗贤

国外电子与电气工程技术丛书

应用电路分析

[美] Matthew N.O. Sadiku　Sarhan M. Musa　Charles K. Alexander　著
苏育挺　王建　张承乾　宫霄霖　译

Applied Circuit Analysis




机械工业出版社
China Machine Press

图书在版编目（CIP）数据

应用电路分析 /（美）萨迪库（Sadiku，M. N. O.）等著；苏育挺等译．—北京：机械工业出版社，2014.8

（国外电子与电气工程技术丛书）

书名原文：Applied Circuit Analysis

ISBN 978-7-111-47077-9

I. 应… II. ①萨… ②苏… III. 电路分析 – 高等学校 – 教材 IV. TM133

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 131099 号

本书版权登记号：图字：01-2012-5870

Matthew N.O. Sadiku; Sarhan M. Musa; Charles K. Alexander：Applied Circuit Analysis（0-07-802807-8）.

本书阐述线性电路的分析方法，可作为工程技术专业“线性电路分析”课程的教材。全书分为两部分，第一部分包括第 1 ~ 10 章，主要介绍直流电路，内容包括：电路的基本概念、电阻、电容、电感、串联电路、并联电路和串并联电路及其分析方法等；第二部分包括第 11 ~ 19 章，主要介绍交流电路，内容包括：交流电压和电流、相量和阻抗、正弦稳态分析、谐振、频率响应、波特图、三相电压、变压器、二端口网络等。

出版发行：机械工业出版社（北京市西城区百万庄大街 22 号 邮政编码：100037）

责任编辑：谢晓芳　　责任校对：殷　虹

印　　刷：藁城市京瑞印刷有限公司　　版　　次：2014 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

开　　本：185mm×260mm 1/16　　印　　张：29.5

书　　号：ISBN 978-7-111-47077-9　　定　　价：99.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

客服热线：（010）88378991 88361066　　投稿热线：（010）88379604

购书热线：（010）68326294 88379649 68995259　　读者信箱：hzjsj@hzbook.com

出版者的话

文艺复兴以降，源远流长的科学精神和逐步形成的学术规范，使西方国家在自然科学的各个领域取得了垄断性的优势；也正是这样的传统，使美国在信息技术发展的六十多年间名家辈出、独领风骚。在商业化的进程中，美国的产业界与教育界越来越紧密地结合，信息学科中的许多泰山北斗同时身处科研和教学的最前线，由此而产生的经典科学著作，不仅擘划了研究的范畴，还揭示了学术的源变，既遵循学术规范，又自有学者个性，其价值并不会因年月的流逝而减退。

近年，在全球信息化大潮的推动下，我国的信息产业发展迅猛，对专业人才的需求日益迫切。这对我国教育界和出版界都既是机遇，也是挑战；而专业教材的建设在教育战略上显得举足轻重。在我国信息技术发展时间较短的现状下，美国等发达国家在其信息科学发展的几十年间积淀和发展的经典教材仍有许多值得借鉴之处。因此，引进一批国外优秀教材将对我国教育事业的发展起到积极的推动作用，也是与世界接轨、建设真正的世界一流大学的必由之路。

机械工业出版社华章公司较早意识到“出版要为教育服务”。自 1998 年开始，我们就将工作重点放在了遴选、移译国外优秀教材上。经过多年的不懈努力，我们与 Pearson、McGraw-Hill、Elsevier、John Wiley & Sons、CRC、Springer 等世界著名出版公司建立了良好的合作关系，从他们现有的数百种教材中甄选出 Thomas L. Floyd、Charles K. Alexander、Behzad Razavi、John G. Proakis、Stephen Brown、Allan R. Hambley、Albert Malvino、Mark I. Montrose、David A. Johns 、Peter Wilson 、H. Vincent Poor、Dikshitulu K. Kalluri 、Bhag Singh Guru、Stephane Mallat 等大师名家的经典教材，以“国外电子与电气工程技术丛书”为总称出版，供读者学习、研究及珍藏。这些书籍在读者中树立了良好的口碑，并被许多高校采用为正式教材和参考书籍。其影印版“经典原版书库”作为姊妹篇也越来越多被实施双语教学的学校所采用。

权威的作者、经典的教材、一流的译者、严格的审校、精细的编辑，这些因素使我们的图书有了质量的保证。随着电气与电子信息学科建设的不断完善和教材改革的逐渐深化，教育界对国外电气与电子信息教材的需求和应用都将步入一个新的阶段，我们的目标是尽善尽美，而反馈的意见正是我们达到这一终极目标的重要帮助。华章公司欢迎老师和读者对我们的工作提出建议或给予指正，我们的联系方法如下：

华章网站：www. hzbook. com

电子邮件：hzjsj@hzbook. com

联系电话：(010) 88379604

联系地址：北京市西城区百万庄南街 1 号

邮政编码：100037



华章科技图书出版中心

译者序

本书以电路知识和电路分析方法为主体，辅以典型例题和实际应用实例，并穿插介绍电子工程相关历史人物和专业介绍，是一本侧重于工程应用的优秀电路分析教材。

全书分为直流电路和交流电路两部分，涵盖了大学工科电类本科生所应掌握的基本电路知识。本书内容清晰明了，内容编排与体系结构合理，非常符合课堂教学规律。

本书最大的特点是突出了教学内容的实际应用。书中每一章都给出了结合实际应用问题的具体实例，这些实例大都与人们的日常生活密切相关，通过阅读并理解这些实例，读者可以对书本内容讲述的理论知识有更深地理解。书中还精心编排了大量的例题和练习，旨在加深读者对基本概念和基本方法的理解。书中使用面向 Window 的 PSpice 软件为工具，并介绍了 Multisim 和 Matlab 两种流行的教学工具软件，将课程内容和计算机辅助设计（CAD）和分析工具紧密联系在一起，实现了理论与实际的结合。

本书的另一特点是作者在每章均以世界名人名言开头，介绍对本学科有重大贡献的科学家的生平事迹，并对相关学科做适当介绍，以扩展读者的知识面，与读者分享如何提升学习能力、走向成功的经验。

本书的编排美观，公式清晰，图表准确，内容精炼，篇幅适中，这使得本书成为一本非常适合读者自学的教材。

天津大学电子信息工程系“电路分析”课程组的苏育挺、宫霄琳、张承乾、王建等老师参与了该书的翻译工作。其中，本书的前言、第 1、2、3、附录由苏育挺翻译；第 7、9、10、13、15 章由宫霄琳翻译；第 4、5、17、18、19 章由王建翻译；第 6、8、11、12、14、16 章由张承乾翻译，最后由苏育挺教授审阅了全书。

本书翻译稿虽经多次审阅修正，但不难免有不妥和疏漏之处，恳请广大读者不吝指正。

译者

2014 年 6 月

于天津大学北洋园

前　言

本书试图为工程技术专业的学生呈现一种比其他教材更为清晰、生动、易于理解的电路分析方法。这一目标的实现有赖于如下若干途径。

- 对于电气工程技术专业的学生而言，电路分析可能是他们最早接触到的课程。为了帮助学生轻松地熟悉所学内容，每章均通过讲述一个历史人物或者探讨职业取向开始，然后通过引言将该章内容与前面章节的内容衔接起来，同时提出本章学习的主要目的。最后，每章末尾会对本章要点及相关公式进行总结。
- 简洁清楚、顺理成章、循序渐进地介绍所有原理，尽可能避免赘述，避免讲述过多可能掩饰概念、妨碍整体内容理解的细节。
- 教材中的重要的公式均加以方框，以帮助学生分清主次。同时，为了确保学生能清晰地掌握内容主旨，关键词均给出明确的定义。
- 每节末尾都会给出大量切实可行的例题，它们是本教材的重要组成部分，并对每道例题做出了详细清楚的解释。这些例题可以帮助学生更好地理解解题过程，有助于培养学生独立解决问题的自信心。部分例题给出了两到三种求解方式，以帮助同学理解和比较不同的解题方法，加深对所学内容的理解。
- 为了给学生锻炼的机会，每一道例题后面都紧跟一个练习题，并给出答案。学生可以参照例题一步步地对练习题进行求解，无需到处查阅，也不用看书后答案。这些练习题也可以测试学生理解当前例题的情况，从而在学习下一节之前，加强学生对所学内容的理解。
- 每章最后一节专门介绍与本章概念相关的实际应用。这部分内容至少包括一个实际问题或者实际器件，以帮助学生了解所学概念是如何应用于实际问题的。
- 每章末尾还给出了十道带有答案的多项选择题作为复习题。这些复习题旨在提供例题或者练习题中未涉及的一些解题的小窍门。可以将其作为自测练习，帮助学生了解自己对本章内容的掌握程度。
- 按照 ABET（Accreditation Board for Engieering and Technology，美国工程技术认证委员会）对集成计算机工具的要求，鼓励学生使用 PSpice 和 Multisim 等计算机辅助分析软件。附录 C 给出了 PSpice 的 Windows 版手册，附录 D 对 Multisim 进行了介绍。本书使用了这些软件的最新版软件包。我们也鼓励学生使用 TI-89 和 MATLAB 软件进行数值计算。

组织结构

本书可以作为两或三学期的线性电路分析课程的教材。教师也可以选择适当的章节，将其用作一学期课程的教材。全书分为两部分。第一部分包括第 1～10 章，主要介绍直流电路。第二部分包括第 11～19 章，主要介绍交流电路。这两部分所包含的内容已经超过了两学期课程的需求，因此，教师应根据需要选

择必要的章节。书中带剑号的各节内容可以略去不讲或者简要讲解，也可以作为学生的作业。

对先修课程的要求

作为电路分析的基础课程，在学习本书之前需要先修物理学。虽然熟悉有关复数的知识对学习本书后半部分内容有所帮助，但这并不是必须掌握的内容。

致谢

特别感谢 Robert Prather 和 Warsame Ali 博士在 Multisim 软件开发方面的帮助。感谢普雷里维尤农工大学工程学院院长 Kendall Haris 博士的支持，并对 John Attia 博士的支持和理解致以谢意。同时，我们还要感谢 Karl J. Huehen 博士对本书的所有内容及习题解答进行了详细审核。对麦格劳—希尔出版集团的朋友（Raghu Srinivasan、Darlene Schueller、Lora Neyens、Curt Reynolds、Lisa Bruflodt、Margarite Reynolds、LouAnn Wilson、Ruma Khurana 和 Dheeraj Chahal）所给予的真知灼见和帮助表示深深的感谢。

对本书提过建设性意见和评论的下面各位，本书也一并表示感谢。他们是：

Ryan Beasley，得克萨斯州农工大学

Michael E. Brumbach，纽约技术学院

Thomas Cleaver，路易斯维尔大学

Walter O. Craig III，南方大学

Chad Davis，俄克拉荷马大学

Mark Dvorak，明尼苏达州立大学曼卡多分校

Karl Huehne，印第安纳大学与普渡大学印第安纳波利斯分校

Rajiv Kapadia，明尼苏达州立大学曼卡多分校

Mequanint Moges，休斯敦大学

Jerry Newman，孟菲斯大学

Brian Norton，俄克拉何马州立大学

Norali Pernalete，加州州立理工大学波莫纳分校

John Ray，路易斯安那理工大学

Barry Sherlock，北卡罗来纳州大学夏洛特分校

Ralph Tanner，西密西根大学

Wei Zhan，得克萨斯州农工大学

M. N. O. Sadiku，S. M. Musa 和 C. K. Alexander

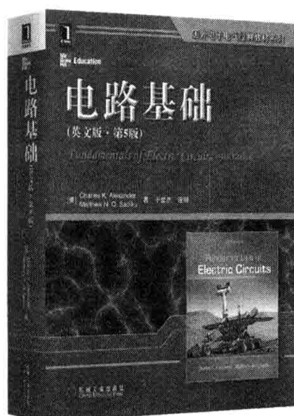
致学生

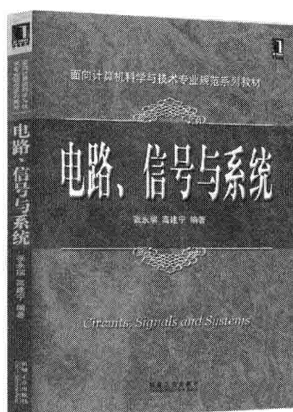
这很可能是你在电气工程技术专业中所学的最早的课程之一。电气工程技术是一门激动人心且富有挑战的学科，但也可能使学生知难而退。本书希望避免这样的事情发生。一本好的教材和一位好的教授的讲解会有很好的辅助效果，但是，只有学生自己才是学好课程最关键的因素。因此，只要谨记下述各点理念，你就会很好地把握本门课程。

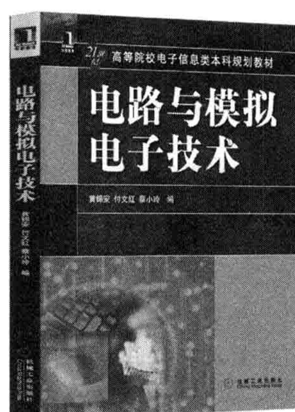
- 本课程是电气工程技术学科的基础，绝大多数相关的电气工程课程均以此门课程作为理论基础。因此，希望你定期学习本门课程。
- 在学习过程中，解决实际问题的方法是一个必不可少的环节。最好的学习方法就是尽量多地解决问题，先从每道例题后面的练习题开始，一直到每章最后的习题。习题前面的星号表示该题具有一定的难度。
- Spice，作为一种计算机电路分析程序，其使用将贯穿整个教材。PSpice，作为 Spice 的微机版，成为绝大多数大学里最受欢迎的标准电路分析程序。附录 C 将对 Windows 操作界面下的 PSpice 进行相关介绍。努力学习这款软件，因为可以用它检查任何电路问题，也能学会正确的解题思路和方法。
- 作为另一种可以辅助仿真的工具，Multisim 是一个真正的电子工作台（EWB），通过绘制电路图、部件和仪表来完成。附录 D 对该软件进行了简单介绍。
- MATLAB 软件包在电路分析以及将要学习的其他课程中都大有用处。附录 E 给出的简要教程，可以帮助你入门。针对 MATLAB，最好的学习方法是在使用前先掌握一些命令。
- 在每章末尾都会有一节来讲述该章内容是如何应用于实际生活中的。对你而言，这部分内容的概念既新颖又高深。无疑，你将在其他课程中学到更多细节。这里，我们主要想让你对这些想法有一个大致的熟悉。
- 每章末尾的问题回顾会帮助你发现课堂或教材中没有提到的诀窍技巧。

附录 A 简要介绍联立方程的求解，附录 B 介绍复数，附录 C 介绍 Windows 版本的 PSpice，附录 D 介绍 Multisim，附录 E 介绍 MATLAB，附录 F 介绍 TI-89 Titanium 计算器，附录 G 给出奇数编号习题的答案。

推荐阅读







电路基础（英文版·第5版）

作者：（美）Charles K. Alexander 等 于歆杰 注释 ISBN：978-7-111-41184-0 定价：129.00元

中文版 5/e 预计出版时间：2013年8月

本书是一本电类各专业“电路”课程的经典教材，被美国众多名校采用，是美国最有影响力的“电路”课程教材之一。本书每章开始增加了中文“导读”，适合用做高校“电路”课程双语授课或英文授课的教材。本书前4版获得了极大的成功，第5版以更清晰、更容易理解的方式阐述了电路的基础知识和电路分析方法，并反映了电路领域的最新技术进展。全书总共包括2447道例题和各类习题，并在书后给出了部分习题答案。

电路、信号与系统

作者：张永瑞 高建宁 ISBN：978-7-111-28824-4 定价：35.00元

内容选材合理、取舍恰当，新器件、新方法介绍适度，符合教指委制定的专业规范要求。 基本概念讲授准确、透彻，注重物理概念阐述，必要的定理推导简明扼要，思路清晰、严谨，结论明确；常用的分析方法讲述步骤清楚有条理，举例类型多，结合工程实际，具有启发性；电路定理阐述简练，应用范围、条件明确，使用中应注意的问题归纳详尽。适合作为计算机专业“电路”课程教材。

电路与模拟电子技术

作者：黄锦安 付文红 ISBN：978-7-111-25228-3 定价：38.00元

本书根据高等学校电子与电气信息类基础课程教学指导分委员会关于“电路分析基础”和“模拟电子技术”课程教学的基本要求，结合计算机及其他少学时专业的教学特点，统筹安排了电路理论与模拟电子技术的基本知识。尤其适合作为普通高等院校计算机、电子信息工程等专业的本科生教材，也可作为相关工程技术人员的学习参考用书。

目　录

第二部分 交流电路

⊖ 附录 A～G 的内容请参见华章网站：www.hzbook.com。——编辑注

第一部分

直 流 电 路

第1章

基本概念

科技可以自我促进。科技使更多的新工艺成为可能。

——阿尔文·托夫勒

历史人物

亚历山德·伏特（Alessandro Volta，1745—1827），意大利物理学家，最先发明了能够提供连续电流的电池和电容器。

伏特出生在意大利科莫的一个贵族家庭，18岁开始进行电路实验。他于1796年发明的电池是对电能利用的一次变革。他于1800年发表的著作开创了对电路理论的研究。伏特一生获得了众多荣誉。电压或者说电位差的单位（伏特），就是以他的名字命名的。



亚历山德·伏特
（© The Huntington Library, Burndy Library, San Marino, California）

安德烈-玛丽·安培（Andre-Marie Ampere，1775—1836），法国数学家和物理学家，电动力学（现在称电磁学）的奠基人。19世纪20年代，他定义了电流并提出了测量电流的方法。

安培出生于法国里昂。因为在那个年代，许多著名的数学著作都是用拉丁语写的，因此，出于对数学的热情，他很快就精通了拉丁语。他是一个杰出的科学家和多产的作家。他发明了电磁体和安培计，并推导出许多电磁学定律。电流的单位（安培）就是用他的名字命名的。



安德烈-玛丽·安培
（© Pixtal/age Fotostock RF）

1.1 引言

电路理论是电气工程技术的基础。电工技术的许多分支，如电源、电机、反馈和控制系统、电子学、计算机、通信以及电子仪器等，都是在电路理论的基础上建立起来的。对于开始学习电气工程技术专业的学生来说，电路理论是起点，也是一门最重要的课程。电路理论对于其他理工科专业学生也是很有意义的，因为电路通常是研究能量系统的非常有效的模型，而其中又包括了应用数学、物理学和拓扑学等诸多内容。

在电气工程技术中，通常要研究从一点到另一点的通信或者能量传递。为此，需要将若干电子器件相互连接起来实现这一功能。这种由电子器件相互连接构成的总体称为电路（electric circuit），电路中的每个组成部分称为元件（element）。

电路是由电子元件相互连接构成的总体。

图 1-1 给出了一个简单的电路，它由三个基本元件组成：电池、灯泡和连接导线。这样一个简单的电路可以用于手电筒、探照灯等多种应用。

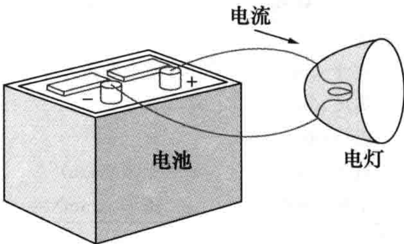


图 1-1 一个简单的电路

图 1-2 给出了一个复杂的电路。该电路是无线电发射器的原理图。虽然看起来很复杂，但是利用本书介绍的方法，就可以对其进行分析。本课程的目标之一即是使学生学习诸如此类的用于描述电路的各种分析方法和计算机软件应用方法。

在大量电子系统中利用各种电路可以完成各类艰巨的任务。本书的目的不是研究各种电路的不同应用，而是专注于电路分析之中，并据此来研究电路特性。例如，电路在给定输入信号作用下是如何响应的？电路中相互连接的元件与器件是如何相互作用的？

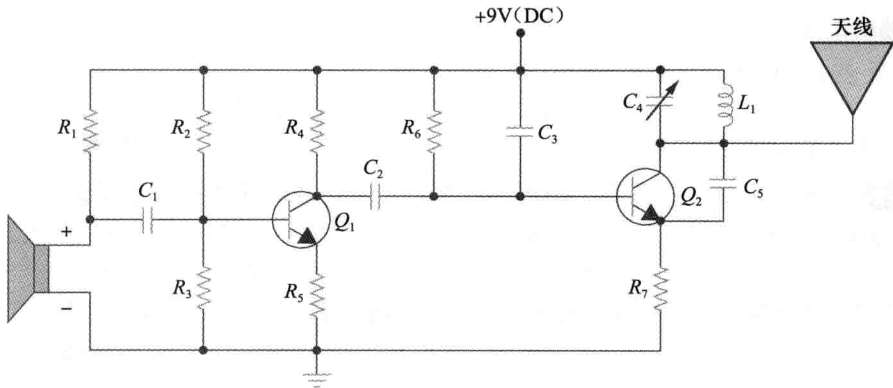


图 1-2 无线电发射器电路图

在开始学习之前，首先对电荷、电流、电压、电路元件、功率和能量等电路中的一些基本概念进行定义。而定义这些概念之前，必须先建立本书所采用的计量单位制。

1.2 国际单位制

像电气工程师一样，我们需要处理很多可测量。而无论是在哪个国家所完成的测量，都必须采用所有专业人士能够明白的标准语言来进行表示。这种国际计量语言就是国际单位制（International System of Unit，SI）。国际单位制是在 1960 年国际度量会议上确定采用的。该计量单位制包括 7 个基本单位，所有其他物理量的单位都可以由此推出。表 1-1 给出了其中 6 个基本单位以及 1 个同本书相关的衍生单位。

表 1-1 6 个基本 SI 单位及 1 个同本书相关的衍生单位

物理量	基本单位	符号
长度	米	m
质量	千克	kg
时间	秒	s
电流	安培	A
热力学温度	开尔文	K
发光强度	坎德拉	cd
电荷	库仑	C

尽管 SI 单位是由 IEEE 官方建议的，且在本书中通篇使用，但某些英制单位（非 SI 单位）在美国的应用也十分广泛。这主要是由于美国仅仅承认 SI 制度，但并未正式对其授权。例如，仍用英尺和英里作为距离的单位，用马力作为电动机的额定功率单位。因此，有时需要将非 SI 单位转换到 SI 单位，如表 1-2 所示。

表 1-2 换算因数

转换	至	倍数	转换	至	倍数
长度			时间		
英寸（in）	米（m）	0.0254	小时（h）	秒（s）	3600
英尺（ft）	米（m）	0.3048	力		
码（yd）	米（m）	0.9144	磅（lb）	牛顿（N）	4.448
英里（mi）	千米（km）	1.609	功率		
密耳（mil）	毫米（mm）	0.0254	马力（hp）	瓦特（W）	746
体积			能量		
加仑（gal）（美国）	升（L）	3.785	英尺磅（ft·lb）	焦耳（J）	1.356
立方英尺（ft^3）	立方米（m^3）	0.0283	千瓦时（kW·h）	焦耳（J）	3.6×10^6
质量/重量					
磅（lb）	千克（kg）	0.4536			

例 1-1 求 42 英寸是多少米。

解：从表 1-2 可知，1 英寸＝0.0254 米。因此

$$42\ 英寸=42\times0.0254\ 米=1.0668\ 米$$ ◀


练习 1-1 求 36 英里是多少千米。 **答案**：57.924 千米

例 1-2 已知一电动机的额定功率为 900 瓦特，求该额定功率相当于多少马力。

解：从表 1-2 可知，1 马力＝746 瓦特。因此，1 瓦特＝(1/746) 马力。所以，有

$$900\ 瓦特=900\times1/746=1.206\ 马力$$ ◀


练习 1-2 已知施于某一物体的作用力为 50 牛顿，求该作用力相当于多少磅。

答案：11.241 磅

1.3 科学记数法和工程记数法

在科学和工程技术中，经常会遇见很大或者很小的数。这些很大或者很小的数都可以通过下述广泛使用的记数法进行表示。

- 科学记数法
- 工程记数法

科学记数法采用 10 的幂指数形式表示。在科学记数法中，用 $X.YZ\times10^n$ 的形式表示一个数。

科学记数法采用 10 的幂指数形式表示一个数，在该数的小数点左边有一位非零整数。

采用科学记数法表示一个数，就是将其写为一个系数乘以 10 的幂指数的形式。例如，若用科学记数法表示 0.000578，则要将小数点右移四位，变成 5.78×10^{-4}。类似地，要将 423.56 的小数点左移两位，得到其科学记数法表示 4.2356×10^2。注意，3.276×10^6 是采用科学记数法来表示，而 32.76×10^5 则不是。

工程记数法采用特定的 10 的幂指数形式表示一个数，如表 1-3 所示。

一般来说，在工程技术中，特别是在电路理论中，工程记数法一般更为常用。工程记数法是科学记数法在实际中的一种应用，其 10 的幂指数必须是 3 的倍数。实际上，国际单位制单位的最大优点就是，它们可以使用基于 10 的幂指数的前缀将更大或者更小的单位同基本单位相联系。表 1-3 给出了这些国际单位制的前缀及其符号表示。例如，0.0006s 在工程记数法中表示为 600μs。

表 1-3 国际单位制前缀

10 的幂指数	前缀	符号	10 的幂指数	前缀	符号
10^{24}	尧	Y	10^{-3}	毫	m
10^{21}	泽	Z	10^{-6}	微	μ
10^{18}	艾	E	10^{-9}	纳	n
10^{15}	拍	P	10^{-12}	皮	p
10^{12}	太	T	10^{-15}	飞	f
10^{9}	吉	G	10^{-18}	阿	a
10^{6}	兆	M	10^{-21}	介	z
10^{3}	千	k	10^{-24}	幺	y

将小数点右移 6 位，可以看到表示 10^{-6} 的前缀为 μ（微）。类似地，145300m 在工程记数法中应该是 145.3km。这里，小数点左移三位，用前缀 k（kilo，千）来表示 10^{+3}。

在电气工程技术中，采用工程记数法，要好于采用 10 的幂指数形式的科学记数法。当然，你可以在各类教材、工程手册以及其他所阅读或者使用的技术资料中找到工程记数法。尽管开始的时候会有点困难，但当你开始使用这些前缀之后就会感受到其便利之处。

例 1-3 用科学记数法表示下列各数：

(a) 621409 (b) 0.00000548

解：(a) 鉴于该十进制数比 9 大，是 621409.0，因此可将小数点向左移动五位，得到该数的科学表示法为 $621409.0=6.21409\times10^5$。

(b) 将小数点向右移动六位，可以得到 $0.00000548=5.48\times10^{-6}$，即为该数的科学表示法。◀

练习 1-3 用科学记数法表示下列各数：

(a) 46013000 (b) 0.000245 **答案：**(a) 4.6013×10^7 (b) 2.45×10^{-4}

例 1-4 用科学记数法表示下列各数：

(a) 2563m (b) 23.6μs

解：(a) $2563\text{m}=2.563\times10^3\text{m}$

(b) $23.6\mu\text{s}=23.6\times10^{-6}\text{s}=2.36\times10^{-5}\text{s}$ ◀

练习 1-4 用科学记数法表示下列各数：

(a) 0.921s (b) 145.6km **答案：**(a) $9.21\times10^{-1}\text{s}$ (b) $1.456\times10^5\text{m}$

例 1-5 用工程记数法表示下列各数：

(a) 451000000m (b) 0.0000782s

解：(a) $451000000\text{m}=451\times10^6\text{m}=451\text{Mm}$（或 451000km）

(b) $0.0000782\text{s}=78.2\times10^{-6}\text{s}=78.2\mu\text{s}$ ◀

练习 1-5 用工程记数法表示下列各数：

(a) 34700000000m (b) 0.0032s **答案：**(a) 34.7Gm (b) 3.2ms

†1.4 科学计算器[⊖]

鉴于电路分析中涉及大量计算，掌握一种电子计算器的使用方法是十分必要的。无论是考虑计算速度还是准确性，手持计算器都是值得购买的。同复杂的个人计算机相比，电子计算器相对来说更为简便。本书将不时地对计算器技术进行介绍。本书中所有的计算器实例都基于图 1-3 所示的 TI-89 Titanium 计算器。实际上，1.2 节和 1.3 节所介绍的内容（转换方法、科学记数法和工程记数法），可以很容易地使用 TI-89 Titanium 计算器来计

⊖ 当一节的标题带有剑号时，表示老师可能会跳过该节内容，或者进行简短介绍，或者将其留成课后作业。

算。附录F对使用该计算器的方法进行了简短介绍。如果你没有上述类型的计算器，则确保你的计算器至少可以进行下列操作：算术（+，−，×，÷）平方根、正弦、余弦、正切、对数（以10为底的）、自然对数（以e为底的）、x^y（幂运算）、指数（e）并且可以将直角坐标转换成极坐标，反之亦然。该计算器不需要具有升级可编程功能。

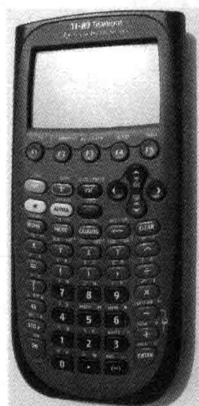


图1-3 得州仪器TI-89 Titanium计算器
（© Sarhan M. Musa）

很多计算器都采用八进制或者十进制显示数字。没有必要将所有的数字都在显示器上进行显示。实际上，通常数字都会四舍五入，只剩下三四个有效数字予以显示。例如，数字1.648247143在四舍五入之后，记录成1.65。而数字0.007543128则记录成0.00754。

例1-6 使用计算器，用工程记数法表示数23600。

解： 使用TI-89计算器，按照下述步骤进行操作：

1）按[MODE]，进入模式菜单。在该菜单中，可以明确所需数据类型。

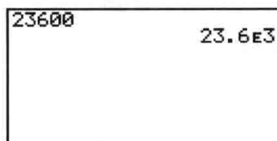
2）使用下滑按钮找到指数形式，选择[Engineering]。

3）按[ENTER]，退出模式界面。

4）按数字[2] [3] [6] [0] [0] [EE] [0]并按[ENTER]。

则结果显示如下：

23.6E3



◀

练习1-6 使用计算器，用工程记数法表示数124700。 **答案：** 124.7E3

例1-7 使用计算器计算

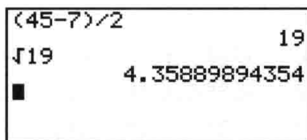
$$\sqrt{\frac{45-7}{2}}$$

解： 计算该式的方法很多。比较简单的方法大概是计算出平方根符号里面的式子的值，然后对其进行平方根运算。

1）输入（45−7）/2，然后按[ENTER]，结果为19。

2）按[2nd]和[√]，输入[1] [9] [)]，然后按[◆] [ENTER]。

则结果显示如下：



◀

练习1-7 使用计算器计算

$$\frac{125\pi}{\sqrt{36+17}}$$

答案： 53.941

1.5 电荷与电流

在了解了 SI 前缀和科学计算器之后，我们将要准备踏上电路分析的旅程。在电路中，最基本的量就是电荷（electric charge）。我们都有这样的经验，当试图脱掉羊毛衫时，衣服会黏附到身体上，这就是受到了电荷的影响。

具有相同极性（符号）的电荷之间相互排斥，而具有相反极性的电荷之间相互吸引。这意味着所有的电现象都是由电荷的表现引起的。电荷是有极性的，非正（+）即负（−）。

电荷（Q）是构成物质的原子的一种电气特性，单位是库仑（C）。

由基础物理学可知，所有物质都是由原子组成的，而各个原子由电子、质子和中子组成，如图 1-4 所示。由于电子携带负电荷，因此一个电子的电荷量为

$$e = -1.60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C} \tag{1-1}$$

而质子所携带的是正电荷，电荷量与电子相同。原子中数量相等的质子和电子使得原子呈现为中性状态。

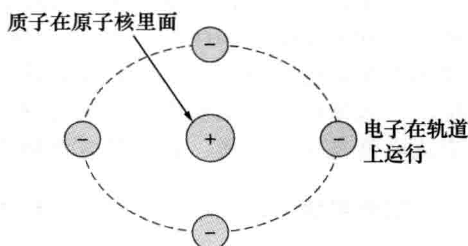


图 1-4 原子结构示意图：由原子核和电子组成

任何的材料或人体中，如果有多余的电子，则带负电；相反，如果有多余的质子（或者缺少电子），则带正电。如图 1-5 所示，不同的电荷相互吸引，相同的电荷相互排斥。

关于电荷，要注意以下三点：

1）对于电荷而言，库仑是一个相当大的单位。1C 的电荷量中包含 $1/(1.602\times10^{-19}) = 6.24\times10^{18}$ 个电子。因此，实际中或者实验室用的电荷量通常用 pC、nC 或者 μC 量级表示；

2）通过实验可以观察到，实际产生的电荷量都是电子电荷量 $e=1.602\times10^{-19}$ 的整数倍，即电荷量 $Q=Ne$，其中 N 表示整数。

3）电荷守恒定律（law of conservation of charge）表明，电荷既不能创造，也不能消失，只能迁移。因此，一个封闭系统中的电荷量的代数和是保持不变的。

下面考虑电荷流。当由数万亿原子组成的导线同电池（电动势源）相连接时，就会迫使电荷运动。正电荷向一个方向运动而负电荷向相反方向运动。电荷的这种运动就产生了电流。习惯上，将正电荷的运动方向作为电流流动的方向，即与负电荷流动的方向相反，如图 1-6 所示（这里电池正极用长线符号表示）。这种惯例是由美国的科学家和发明家本杰明·富兰克林（Benjamin Franklin，1706—1790）提出的[⊖]。虽然我们已经知道，金属导体中的电流是由带负电荷的电子运动而产生的，但仍然沿用大家普遍接受的约定，即认为电流是正电荷流。

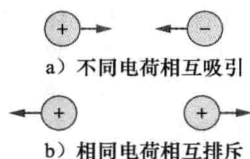


图 1-5 电荷的作用

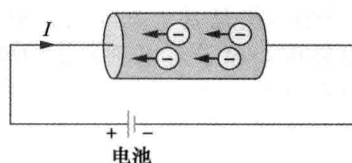


图 1-6 由导体中的电子电荷流动而产生的电流

⊖ 本教材通篇适用 IEEE 的各种约定。约定即为描述某一事物的一种标准方式，这样，业内人士就能够明白我们说的是什么意思。

电流（I）是指电荷的时间变化率，单位为安培（A）。

在数学上，电流 I、电荷 Q 和时间 t 之间的关系为

$$\boxed{I=\frac{Q}{t}} \tag{1-2}$$

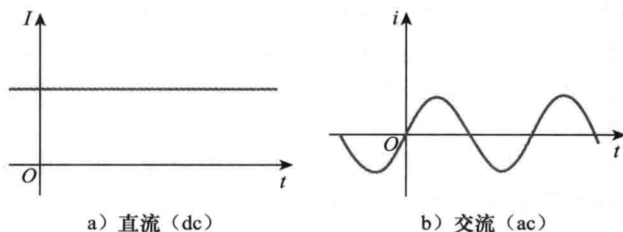
其中，电流单位为安培（A），即 1 安培为每秒 1 库仑。电流的类型有若干种，即电荷以若干种不同的方式随时间变化。如果电流不随时间变化，则称之为直流电流（direct current，dc）。电池产生的就是直流电流。用符号 I 表示恒定电流。

直流电流（dc）是指不随时间而变化的恒定电流。

采用符号 i 来表示随时间变化的电流。时变电流的常见形式是正弦电流或者称为交流电流（alternating current，ac）。家里的电热器、空调、冰箱、洗衣机以及其他电子产品均采用交流电。图 1-7 给出了两类最常见的电流（直流电流和交流电流）随时间变化的情况。一般来说，在交流电中，电流的方向呈周期性变化。显而易见，最常用也是最重要的交流电就是正弦电流。其他的电流形式将会在本书后面部分介绍。

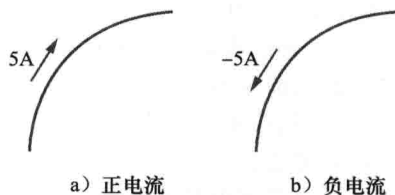
交流电流（ac）是指随时间呈周期性变化的电流。

鉴于已经将电流定义为电荷的运动，因此电流要有相应的流动方向。如前所述，习惯上取正电荷运动的方向作为电流流动的方向。基于这一约定，一个 5A 的电流既可以表示为正的，也可以表示为负的，如图 1-8 所示。换句话说，图 1-8b 中沿某一方向流动的 −5A 的负电流与图 1-8a 中沿相反方向流动的 +5A 的正电流是一样的。



a）直流（dc） b）交流（ac）

图 1-7 两种常用电流



a）正电流 b）负电流

图 1-8 电流方向的约定

综合考虑我们遇到的各种材料。一般来说，根据电流通过的难易程度，可将材料分成三类。

- 导体（如铜、金、银）
- 半导体（如硅、锗）
- 绝缘体（如橡胶、木材、塑料）

（材料的分类是基于其外层价电子的数目）绝大部分材料要么为导体，要么为绝缘体。在导体中，原子对电子的束缚较为松散，使得电子可以自由移动。换句话说，导体这种材料中含有自由电子，它们可以从一个原子漂移到另外一个。而在绝缘体中，原子紧紧束缚着电子，限制了它们的自由移动。半导体材料的导电特性介于导体和绝缘体之间。

例 1-8 计算 4600 个电子所带电荷总量。

解：一个电子的电荷量为 -1.602×10^{-19} C，因此，4600 个电子的电荷量为 -1.602×10^{-19} C/电子 × 4600 个电子 $=-7.3692\times10^{-16}$ C。◀

练习 1-8 计算 2000000 个质子所带的电荷总量。 **答案**：$+3.204\times10^{-13}$ C

例 1-9 如果4.5C电荷流过某一元件的时间为0.2s，试计算经过该元件的电流。

解：

$$I=\frac{Q}{t}=\frac{4.5}{0.2}=22.5(\text{A})$$ ◀

练习 1-9 如果流入某一元件的电流为8.6A。试计算2mC电荷流经该元件的时间。

答案： 0.2326ms

1.6 电压

若使导体内的电子向某一方向运动，就需要做功或者进行能量转换，即需要外接电动势(external electromotive force，emf)的推动。电池就是一种典型的电动势，如图1-6所示。电动势又称为*电压*（voltage）或者*电位差*（potential difference）。电路中a、b两点之间的电压V_{ab}是指将电荷Q从a点移动至b点所需要的能量W（即所做的功）。其数学表达式为

$$\boxed{V_{ab}=\frac{W}{Q}} \tag{1-3a}$$

其中，W为能量，单位是焦耳（J）。而Q为电荷，单位是库仑（C）。可以将公式（1-3a）改写为

$$W=QV_{ab} \tag{1-3b}$$

$$Q=\frac{W}{V_{ab}} \tag{1-3c}$$

电压V_{ab}可简写为V，单位是伏特（V），是为了纪念意大利物理学家伏特（Alessandro Antonio Volta，1745—1827）而以他的名字命名的。

电压（即电位差）是指使1库仑电荷通过某一元件所需的能量，单位是伏特（V）。

图1-9表示跨接于a、b两点之间元件（用矩形方框表示）上的电压，正号（+）和负号（−）用于定义参考方向或电压的极性，V_{ab}可以用如下两种方式来解释：1）a点的电位比b点的电位高V_{ab}伏，2）相对于b点而言，a点的电位是V_{ab}。一般地，下述等式成立：

$$\boxed{V_{ab}=-V_{ba}} \tag{1-4}$$

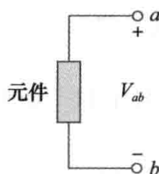


图1-9 电压V_{ab}的极性

例如，图1-10中给出了同一电压两种不同的表示方法。图1-10a中，a点高于b点+9V，图1-10b中，b点高于a点−9V，也可以说，在图1-10b中，从a点到b点有9V的*电压降*（voltage drop），或者等效地，从b点到a点有9V的*电压升*(voltage rise)，换句话说，从a点到b点的电压降等于从b点到a点电压升。

电流和电压是电路中的两个基本变量。与电流一样，将恒定的电压称为*直流电压*（dc voltage)，而将随时间按正弦规律变化的电压称为*交流电压*（ac voltage)。直流电压通常由电池产生，如图1-11所示；而交流电压通常由发电机产生，如图1-12所示。

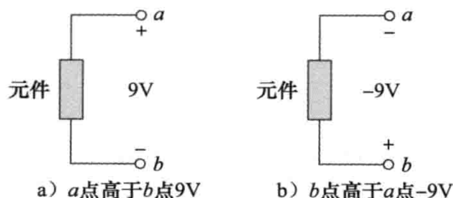


图1-10 同一电压V_{ab}的两种等效表示方法

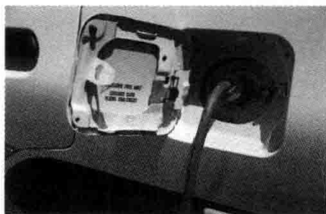


图1-11 电动汽车

（© VisionsofAmerica/Joe Sohm/Photodisc/Getty RF）

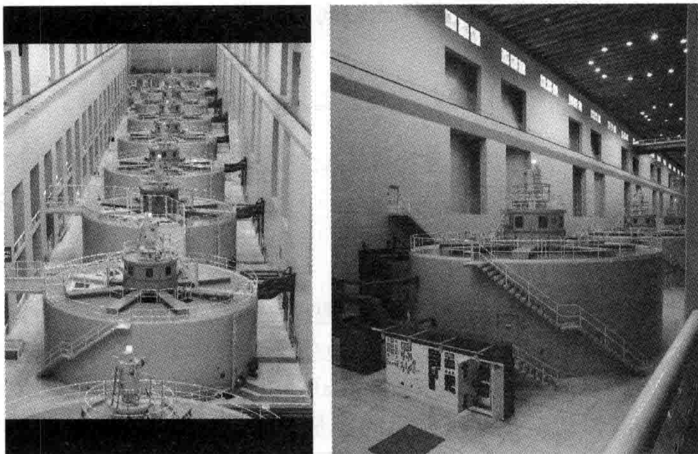


图 1-12 水力发电厂中的交流发电机的两幅图
(© Corbis RF)

例 1-10 如果将 5mC 的电荷移过某一元件需要 20J 的能量，试计算该元件上的电压。

解：

$$V = \frac{W}{Q} = \frac{20}{5 \times 10^{-3}} = 4 \times 10^{3}\text{V} = 4\text{kV}$$ ◀

练习 1-10 试计算某 12V 电池移动 4.25V 电荷所需能量。 **答案：** 51J

例 1-11 如果流经某 3V 电池的电流为 5mA，试计算该电池 8s 内共做了多少功。

解： 移动的总电荷数为

$$Q = It = 5\text{mA} \times 8\text{s} = 40\text{mA} \cdot \text{s} = 40\text{mC}$$

则所做的功为

$$W = VQ = 3\text{V} \times 40\text{mC} = 120\text{mJ}$$ ◀

练习 1-11 如果某一导体在 3s 内总共做功 9J，试计算当电流为 0.2A 时导体上的电压。

答案： 15V

1.7 功率与能量

虽然电流和电压是电路中的两个基本量，电路的输入和输出还可以用功率（power）或者能量（energy）来表示。在实际应用中，需要知道电子设备能够处理多大的功率。根据经验，人们都知道，100 瓦的灯泡要比 60 瓦的灯泡亮得多，同样，还得为一段时期中所消耗的电能，向供电公司缴纳电费。因此，功率和能量的概念在电路分析中是非常重要的。

为了得到功率和能量与电压和电流之间的关系，需对如下物理学知识进行回顾：

功率是消耗或吸收能量随时间的变化率，单位为瓦特（W）。

这一关系的数学表达式为

$$\boxed{P = \frac{W}{t}} \tag{1-5}$$

其中，P 为功率，单位是瓦特（W），W 为能量，单位是焦耳（J），而 t 为时间，单位是秒（s）。由式（1-2）、式（1-3）和式（1-5）可得：

$$P = \frac{W}{t} = \frac{W}{Q}\frac{Q}{t} = VI \tag{1-6}$$

即

$$\boxed{P = VI} \tag{1-7}$$

因此，元件吸收或提供的功率是元件两端的电压与流过该元件的电流的乘积。如果功率为正号（+），则该元件接收功率或吸收功率。反之，如果功率为负号（−），则该元件提供功率。但怎样才能知道功率何时为负何时为正呢？

确定功率正负号的关键是电流的方向和电压的极性。负载或元件既可以吸收功率，也可以提供功率。如图1-13a所示，当电流从高电位点（+）流入元件，则该元件是吸收功率。相反，如果电流从低电位点（−）流入元件，该元件提供功率。所有电路都必须遵守能量守恒定律（law of conservation of energy）。因此，任何时刻电路中功率的代数和都必须是零，即有

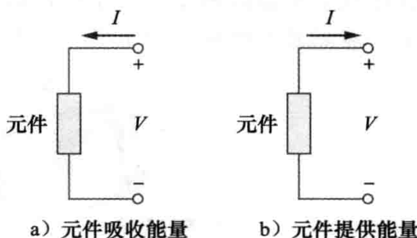


图1-13 能量的吸收和提供

$$\boxed{\sum P = 0} \tag{1-8}$$

上式再次说明，提供给电路的总功率等于该电路所吸收的总功率。

能量是指做功的能力，单位为焦耳（J）。

由式（1-5）可得，t 时刻元件所吸收或提供的能量为

$$\boxed{W = Pt = VIt} \tag{1-9}$$

电力公司以瓦特-小时（W·h）为单位度量能量，其中

$$1\text{W}\cdot\text{h} = 3600\text{J}$$

例1-12 某24V电源从其正极提供3A电流，试计算该电源所提供的功率。

解：

$$P = VI = 24 \times 3 = 72(\text{W})$$ ◀

练习1-12 某30W灯泡同一120V电源相连。试计算流经该灯泡的电流。

答案： 0.25A

例1-13 试计算一个100W的电灯泡2小时消耗的电量。

解：

$$W = Pt = 100\text{W} \times 2\text{h} = 200\text{W}\cdot\text{h}$$

即

$$W = Pt = 100\text{W} \times 20\text{h} \times 60\text{min/h} \times 60\text{s/min} = 720000\text{J} = 720\text{kJ}$$ ◀

练习1-13 某电炉连接至120V电源时的工作电流为15A，试求该电炉消耗30kJ的电能需要多长时间？

答案： 16.67s

1.8 应用

这一节研究与本章介绍概念有关的两个实际应用的例子。第一个是电视显像管，另一个是如何确定电器设备的用电量账单。

1.8.1 电视显像管

电视信号的发射和接收是电子运动的一个重要应用。在电视发射端，摄像管将场景的光图像转化为电信号，光电摄像管中的电子束实现了对光图像的扫描。

在电视接收端，利用电视机内的阴极射线管（cathoderay tube，CRT）重建场景的图

像[⊖]，CRT 的结构如图 1-14 所示。与产生恒定强度电子束的光电摄像管不同，CRT 电子束的强度随着输入信号的强弱而变化。始终保持高电压的电子枪发射电子束，经过垂直和水平两组偏转板，使射到荧光屏上的电子束能够上下左右移动。电子束击中荧光屏后，相应的点就会发亮。这样，就可以利用电子束在电视屏幕上“描绘”出图像。虽然电视显像管体现了本章的概念，但是电荷耦合器（CCD）图像摄像机是一种更为现代的设备。实际上，液晶显示电视（LCD TV）要优于基于 CRT 的电视。

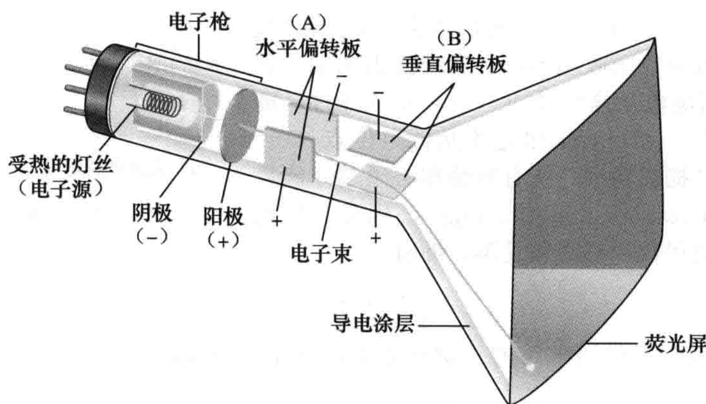


图 1-14 阴极射线管

例 1-14 如果电视显像管中的电子束每秒携带 10^{15} 个电子，试确定要加速该电子束使之达到 4W 的功率所需的电压 V_o。

解：一个电子的电荷量为

$$e=-1.6\times10^{-19}\text{C}$$

则 N 个电子的电量为 $Q=Ne$，并且有，

$$I=\frac{Q}{t}=e\frac{N}{t}=-1.6\times10^{-19}\times10^{15}$$

$$=-1.6\times10^{-4}(\text{A})$$

其中，负号表示电流方向与电子流动的方向相反，如图 1-15 所示，图中所示为垂直偏转板不带电荷情况时的 CRT 简图。于是，电子束的功率为

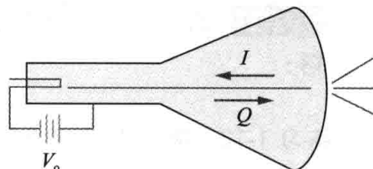


图 1-15 用于例 1-14 的阴极射线管简图

$$P=V_oI \quad 即 \quad V_o=\frac{P}{I}=\frac{4}{1.6\times10^{-4}}=25000(\text{V})$$

因此，所需电压为 25kV。◀

练习 1-14 如果电视显像管中的电子束每秒携带 10^{13} 个电子，通过一个电位差为 30kV 的偏转板，试计算其功率。

答案：48mW

1.8.2 用电量账单

第二个应用是供电公司如何向用户收取电费。电费的多少取决于用户消耗的千瓦时（kW·h）能量（影响电费的其他因素包括需求和功率因子，这里先忽略不计，将会在后续章节介绍）。但是在美国，即使用户不消耗任何电能，仍然需要支付维护电力线正常工作的最低服务费。随着用电量的增加，每千瓦时所需支付的电费不断降低。表 1-4 给出了一个五口之家中家用电器每月的平均耗电量。

⊖ 现代电视显像管采用不同于 CRT 的技术。绝大多数摄像机都采用某种形式的 CCD 技术接收来光。

表 1-4 家用电器每月的平均耗电量

电器名称	耗电（kW·h）	电器名称	耗电（kW·h）	电器名称	耗电（kW·h）
热水器	500	烘干机	80	电视机	10
洗衣机	120	洗碗机	35	收音机	8
电冰箱	100	微波炉	25	烤面包机	4
照明	100	电熨斗	15	电子钟	2
电炉子	100	个人计算机	12		

例 1-15 某家庭一月份耗电量为3300kW·h，试按照如下电费费率确定该家庭当月的电费账单。

每月的基本供电服务费 12.00 美元

每月第一个 100kW·h 按 16 美分/kW·h 计费

之后的 200kW·h 按 10 美分/kW·h 计费

超过 300kW·h 按 6 美分/kW·h 计费

解： 电费账单计算如下：

每月的基本供电服务费＝12.00 美元

第一个 100kW·h×0.16 美元/kW·h＝16.00 美元

之后的 200kW·h×0.10 美元/kW·h＝20.00 美元

剩余的 3000kW·h×0.06 美元/kW·h＝180.00 美元

一月份的总电费＝228.00 美元

平均价格＝228 美元/3300kW·h＝6.9 美分/kW·h ◀

练习 1-15 参考上述例 1-15 中电费费率的计算方法，如果某家庭在七月份大部分时间外出休假，只用了 400kW·h 的电量，试计算该月每千瓦时的平均电费。

答案： 13.5 美分/kW·h

1.9 本章小结

1）电子电路由若干相互连接在一起的电路元件构成。

2）国际单位制（SI）是工程技术人员互相交流的国际度量语言。由国际单位制的 7 个基本单位可以推导出其他物理量的单位。

3）可以采用科学记数法或者工程记数法，用 10 的幂指数的形式表示很大或者很小的数。

4）科学计算器是一个非常重要的工具，读者应认真掌握。

5）电流是在给定方向上，电荷流过给定点的速率：

$$I=\frac{Q}{t}$$

其中，I 是电流（单位为安培），Q 为电荷（单位为库仑），t 为时间（单位为秒）。

6）电压是指 1 库仑电荷流过元件所需要的能量。

$$V=\frac{W}{Q}$$

其中，V 是电压（单位为伏特），W 为能量或者所做的功（单位为焦耳），Q 为电荷（单位为库仑）。

7）功率是指单位时间内所提供或吸收的能量，也可以用电压与电流的乘积表示。

$$P=\frac{W}{t}=VI$$

其中，P 是功率（单位为瓦特），W 为能量（单位为焦耳），t 为时间（单位为秒），V 是电压（单位为伏特），I 是电流（单位为安培）。

8）某元件在时间 t 内所提供或者吸收的能量为

$$W = Pt = VIt$$

9）任何电路都遵守能量守恒定律。因此，在任何时刻电路功率的代数和都为零。

$$\sum P = 0$$

10）电视显像管和电费账单的计算是本章所述概念的两个应用实例。

复习题

1 毫伏等于百万分之一伏特。
(a) 对 (b) 错

2 前缀“微”表示：
(a) 10^6 (b) 10^3
(c) 10^{-3} (d) 10^{-6}

3 2000000V 的电压用工程记数法表示，可以写为：
(a) 2mV (b) 2kV
(c) 2MV (d) 2GV

4 如果每秒流过某一点的电荷为2C，则电流是2A。
(a) 对 (b) 错

5 4A 的电流对一介质充电 6 秒钟后，所储存的电荷是 24C。
(a) 对 (b) 错

6 电流的单位是：
(a) 库仑 (b) 安培
(c) 伏特 (d) 焦耳

7 电压的单位是：
(a) 瓦特 (b) 安培
(c) 伏特 (d) 焦耳/秒

8 如果 1.1kW 的烤面包机产生的电流为 10A，则其两端的电压为：
(a) 11kV (b) 1100V
(c) 110V (d) 11V

9 瓦特是下述哪个量的单位：
(a) 电荷 (b) 电流
(c) 电压 (d) 功率
(e) 能量

10 下述哪个量不是电量：
(a) 电荷 (b) 时间
(c) 电压 (d) 电流
(e) 功率

答案： 1 (b)，2 (d)，3 (c)，4 (a)，5 (a)，6 (b)，7 (c)，8 (c)，9 (d)，10 (b)

习题

1.2 节

1 用米表示下列长度：
(a) 45 英尺 (b) 4 码
(c) 3.2 英里 (d) 420 密耳

2 用焦耳表示下列能量：
(a) 28 英尺磅 (b) 4.6 千瓦时

3 用瓦特表示 32 马力。

4 将 124 英里换算为千米。

1.3 节

5 用工程记数法表示下列数：
(a) 0.004500 (b) 0.00926
(c) 7421 (d) 26356000

6 用科学记数法表示下列数：
(a) 0.0023 (b) 6400
(c) 4300000

7 用科学记数法表示下列数：
(a) 0.000126 (b) 98000
(c) 1/2000000

8 用工程记数法表示下列数：
(a) 160×10^{-7}s (b) 30×10^4V
(c) 1.3×10^{-3}J (d) 0.5×10^{-9}W

9 计算下列各式，并用科学记数法表示：
(a) $(2\times10^4)\times(6\times10^5)$
(b) $(3.2\times10^{-3})\times(7\times10^{-6})$
(c) $\dfrac{30000^2}{0.04^2}$
(d) $\dfrac{500^3\times100^2}{10^7}$

10 计算下列各式，并用科学记数法表示：
(a) $0.003+542.8+641\times10^{-3}$
(b) $(25\times10^3)\times(0.04)^2$
(c) $\dfrac{(40+10)^{-3}\times6000}{(3\times10^{-2})^2}$
(d) $\dfrac{0.002^2\times100^4}{10^6}$

1.4 节

11 使用计算器计算下列各式。
(a) $12\times(8-6)$ (b) $\arccos\dfrac{2}{3}$

12 使用计算器计算下列各式。

(a) $\sqrt{\frac{120}{3^2+4^2}}$ (b) $\frac{\pi}{6^2+8^2}$

13 使用计算器计算下列各式。

(a) 825×0.0012

(b) $(42.8\times11.5)/(12.6+7.04)$

14 使用计算器计算下列各式。

(a) $(3.6\times10^3)^2$ (b) $(8.1\times10^4)^{1/2}$

(c) $\frac{2\times10^2}{5\times10^{-1}}$

1.5 节

15 下列各电子数量分别表示多少库仑的电荷?

(a) 6.482×10^{17} (b) 1.24×10^{18}

(c) 2.46×10^{19} (d) 1.628×10^{20}

16 如果流经某导线的电流为 2mA，试计算 2 分 4s 内通过该导线的电荷量为多少。

17 试计算 10^{20} 个电子是多少电量?

18 如果 6×10^{20} 电子经过某根导线需要 42s，试计算所产生的电流。

19 如果 36C 电荷经过某根导线需要 10s，试计算所产生的电流。

20 2.4μC 电荷相当于多少电子?

21 当电流为 24mA 时，求 50μC 电荷通过某点需要多长时间。

22 如果在 5 分钟内通过某点的电荷为 700C 电荷，试计算所产生的电流。

23 如果某电路电流为 4A，试计算其传递 0.65C 电荷所用时间。

24 如果 8.5mC 电荷通过导体上某点的时间为 120ms，试计算所产生的电流。

1.6 和 1.7 节

25 求图 1-16 所示电路中 V_{ab}、V_{bc}、V_{ac}、V_{ba} 各点的电压。

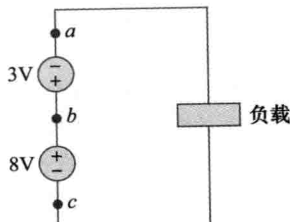


图 1-16 习题 25 的电路图

26 已知 a 点到 b 点间的电位差为 32V，试求从 a 点将 2C 电荷搬运到 b 点需要做多少功?

27 一个 40W 发动机在 120V 电源下运行，试求其电流。

28 一输电线路的额定电压为 1.04×10^6V，试换算到千伏。

29 已知将 2.6×10^{20} 个电子从某点搬到另一点需要 450J 能量，试计算两点间的电位差。

30 试求图 1-17 所示电路中的灯泡所消耗的功率。

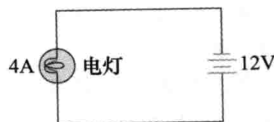


图 1-17 习题 30 的电路图

31 已知某 40W 的灯泡工作在 120V 电压下，试求流过该灯泡的电流。

32 已知某电池为 18C 电荷提供 120J 能量，试求其电压。

33 已知某 45 瓦熨斗工作在 120V 电压下，试求其流过其加热元件的电流。

34 已知某能量源为一个灯泡提供 2A 电流。如果 10s 内有 2.3kJ 能量转换成热能和光能的形式，试计算灯泡两端的电压。

35 将电荷 Q 从 a 点移动到 b 点需要 30J 能量。试求下列条件下的压降。

(a) $Q=2C$ (b) $Q=-6C$

36 如果一个汽车前灯的工作电压为 8V，电流为 2.5A，试求该前灯消耗的功率。

37 已知一电烘箱的工作电压为 38A，电流为 120V，计算其使用的功率。

38 已知某电烤箱的额定功率为 800W，电流为 7A，试计算其工作电压。

39 a、b 量点之间的电压为 120mV。现将一定电荷 Q 从 a 点搬运到 b 点，已知所消耗能量为 360μJ，试求电荷 Q。

40 如果一盏 70 瓦的灯端接 120V 的电源，试计算流过该电路的电流。

41 已知在 5s 内，某 12V 电池可以提供电流 100A。试计算该电池所做的功。

1.8 节

42 已知 8 个光子撞击光电探测器表面可发射 1 个电子。如果每秒钟有 4×10^{11} 个光子撞击光电探测器的表面，试计算所产生的电流。

43 请找到下列电气设施的额定功率:

(a) 电灯 (b) 收音机

(c) 电视机 (d) 电冰箱

(e) 个人计算机 (f) PC 打印机

(g) 微波炉 (h) 搅拌机

44 将一个 1.5kW 的电暖气连接到 120V 电源上。

(a) 试计算该暖气的输出电流。

(b) 如果该电暖气连续工作 45 分钟，求其共消耗多少千瓦-小时 (kW·h) 能量。

(c) 如果电价为 10 美分/kW·h，试计算该电暖气工作 45 分钟共花多少电费。

45 一台 1.2kW 的烤面包机大约 4 分钟烤好四片面包，如果每天使用一次烤面包机，试计算一个月（30 天）所用的电费。假定用电费率为 9 美分/kW·h。

46 已知一个闪光灯电池额定容量为 0.8 安培-小时（A·h），其寿命为 10 小时（h）。
(a) 该电池提供的电流为多大？
(b) 如果其端电压为 1.5V，求其供出能量。
(c) 求该电池共储存了多少千瓦时（kW·h）的能量。

47 某 20W 白炽灯连接到一 120V 电源上，始终在黑暗的楼梯间点亮，试确定：
(a) 该电灯上的电流
(b) 如果电费为 12 美分/kW·h，则该白炽灯连续工作一年（非闰年）所需的电费为多少？

48 一个电炉灶具有四个炉眼和一个烤箱。准备一顿饭时，各炉眼和烤箱的使用情况如下：
炉眼 1：20 分钟
炉眼 2：40 分钟
炉眼 3：15 分钟
炉眼 4：45 分钟
烤箱：30 分钟
如果各炉眼的额定功率为 1.2kW，烤箱的额定功率为 1.8kW，且每 kW·h 的电费为 12 美分/kW·h，试计算准备这顿饭所需的电费。

49 某用户一个月用电量为 215kW·h，PECO（美国费城电力公司）向其收取了 34.24 美元电费。如果每月基本供电服务费为 5.10 美元，试计算 PECO 每 kW·h 电量收取多少电费。

50 一台 600W 的电视机，在无人观看的情况下，连续打开 4 小时，如果电费为 10 美分/kW·h，试计算共浪费了多少电费。

51 一家公用事业公司收取 8.5 美分/kW·h，如果某用户将一 40 瓦电灯泡持续点亮整整一天，求该用户共花费多少电费？

52 Reliant Energy 电力公司对客户的收费标准如下：
每月基本供电服务费 6 美元
第一个 250kW·h×0.02 美元/kW·h
其余 kW·h×0.07 美元/kW·h
如果某用户一个月用电 1218kW·h，试求 Reliant Energy 公司需收取多少电费？

53 某建筑物内的电梯可以再 30 秒内将 7000 磅重的物体运送到 60 英尺高度，求该电梯运行需要多少马力（hp）。假设 1hp＝550 英尺·磅/秒。

54 已知在一间房屋内，有下列家用电器正在使用：
一个 3.2kW 的空调，运行 9 小时；
八个 60W 的灯泡，运行 7 小时；
一个 400W 的电视，运行 3 小时；
(a) 求所有家用电器的总耗能（kW·h）。
(b) 如果某公用事业公司收费标准为 0.06 美元/kW·h，试求使用上述电器共花费多少电费。

55 (a) 如果一个 70W 电灯泡每晚点亮 8 小时，求连续使用一周所耗能量。
(b) 若电价为 0.09 美元/kW·h，试计算每月（假设 30 天）花费多少电费。

综合题

56 如果流过电话线的电流为 20μA，试求 15C 的电荷量通过该电话线需要多长时间？

57 一次强闪电携带 2kA 的电流，并持续了 3ms。试求该闪电包含多少库仑的电荷。

58 电池的额定功率可以用安培-小时（A·h）表示。一个含铅酸性电池的额定功率为 160A·h，试求：
(a) 该电池 40 小时所能提供的最大电流为多少？
(b) 如果该电池以 1mA 的电流放电，它能持续放电多少天？

59 试求一 12V 汽车电池，将 5×10^{20} 个电子从正极搬运到负极做了多少功？

60 试求一台 10 马力（hp）的发动机在 30 分钟内输送了多少能量？1hp＝746W。

61 某 2kW 电熨斗同 120V 电线相连，试计算流过该熨斗的电流。

62 闪电以 30kA 击中某飞行器 2ms，试求沉积在该飞行器上的电荷为多少库仑？

63 某 12V 电池充电时需要 40A·h 的总电荷，试求提供给该电池的能量为多少焦耳？

64 某汽车收音机在 12V 电压下持续工作 20 分钟，共消耗 108J 能量。
(a) 试计算流过该收音机的电流。
(b) 求在此期间，共流过多少库仑的电荷。

65 某袖珍计算器有一个 4V 电池组，在 45 分钟之内产生 0.2mA。
(a) 试计算在电路中流动的电荷数目。
(b) 求电池为该计算器电路所提供的能量。

第2章
电　阻

不劳则无获，共难才得福，有荣必有辱，无苦即无乐。

——威廉·潘（William Penn）

历史人物

乔治·西蒙·欧姆（Georg Simon Ohm，1787—1854），德国物理学家，于1826年通过实验测定了描述电压和电流关系的基本定律——欧姆定律。欧姆的这项工作在最开始遭到了批评者的强烈反对。



乔治·西蒙·欧姆
（© SSPL via Getty Images）

欧姆出生于巴伐利亚埃尔兰根城中一个贫苦家庭之中，一生致力于电学理论的研究。在亚历山德罗·伏特发明了电池之后，欧姆开始对电流产生了兴趣。根据伏特的实验结果，欧姆确定了电压、电流以及电阻之间的基本关系，建立了著名的欧姆定律。本章将要对此理论进行介绍。1841年，欧姆获得了英国皇家协会颁发的科普利金牌。1849年，欧姆受聘于慕尼黑大学，成为物理学教授。为纪念其重要贡献，后人将电阻单位命名为欧姆。

维尔纳·冯·西门子（Ernst Werner von Siemens，1816—1892），德国物理学家和企业家，在电报的发展史中扮演了重要的角色。



维尔纳·冯·西门子
（© Hulton Archive/Getty）

西门子出生于德国汉诺威的Lenthe，是家中长子。家里的四兄弟长大后都成为了工程师或者企业家。在卢贝克文科中学毕业之后，由于父亲无法支付技术专业的学习费用，西门子在17岁加入了普鲁士部队。当看到查尔斯·惠斯通在1837年发明的电报早期模型之后，他意识到，可以对其进行改进，使其应用于国际间通信。他发明了新的电报机，用指针指向正确的字母，替代了原有的使用摩斯码的电报机。他同他的弟弟威廉·西门子以及卡尔·冯·西门子一起在德国铺设了世界上第一条电报线路。为了纪念他的贡献，人们将电导的单位用他的名字命名。

2.1 引言

上一章介绍了电路的基本概念，如电流、电压和功率等。实际上，要确定这些量在给定电路中的具体数值，还需要先掌握一些电路的基本定律，这就是著名的欧姆定律和基尔霍夫定律。这两个定律奠定了电路理论的基础。本章将讨论欧姆电路，并在第4、5章中对基尔霍夫定律进行讨论。

本章先讨论电阻的特性和特性曲线，然后介绍欧姆定律、电导和圆形导线以及实体小电阻的色码，最后，将把这些概念应用于直流（dc）测量之中。

2.2 电阻

一般来说，物理材料都具有阻碍电流流动的特性。这是由组成材料的电子之间相互碰撞所造成的。这种阻碍电流通过的物理特性，称为电阻（resistance），用符号 R 来表示。

电阻用欧姆表示（在乔治・西蒙・欧姆之后），其符号为大写的希腊字母 Ω。电阻值或电阻器（resistor）的图形符号如图 2-1 所示，其中 R 代表电阻器的电阻值。

一个元件的电阻 R 表示其阻碍电流流动的能力，用欧姆（Ω）来计量。

材料的电阻值取决于以下四个因素：

1）材料特性——每种材料都会以不同的方式阻碍电流的流动。

2）长度——长度 l 越长，碰撞的可能性越大，电阻值也就越大。

3）横截面积——面积越大，电子流动得越容易，则电阻值也就越低。

4）温度——通常对技术材料来说，随着温度的升高，电阻值也会逐渐变大。

因此，任何具有均匀的横截面积 A 和长度 l 的材料，其电阻值 R（如图 2-2 所示）均与长度成正比，与横截面积成反比。其数学模型为

$$\boxed{R = \rho \frac{l}{A}} \tag{2-1}$$

其中，希腊字母 ρ 为材料的电阻率（resistivity）。电阻率是材料的物理特性，单位为欧姆-米（Ω・m）。



图 2-1 电阻的电路模型

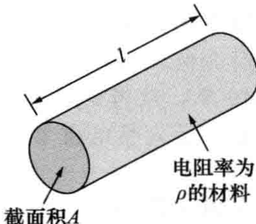


图 2-2 具有统一横截面的导体

元件的横截面积可能是圆形、正方形或者长方形等。由于大多数导体的横截面积都是圆形的，导体的横截面积可以用半径 r 或者直径 d 表示为

$$A = \pi r^2 = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\pi d^2}{4} \tag{2-2}$$

电阻率 ρ 随温度的变化而变化。一般情况下，都是指在室温条件下测得的值。

表 2-1 给出了一些常见材料在室温（20℃）条件下的 ρ 值。从表 2-1 中还可以看出，根据材料的用途可以将其分为三类：导体、绝缘体和半导体。好的导体，如铜和铝，电阻率都比较低。而在表 2-1 给出的材料中，银的导电性能最好。然而，鉴于铜的导电能力也很好，且更加廉价，因此大多导线都是铜制的。一般来说，导体的阻值随着温度升高而增加。而绝缘体（像云母和纸）都具有很高的电阻率，通常用来制作铜线的涂层。半导体（例如锗和硅）的电阻率不高也不低，可以用来制造晶体管和综合电路。导体的种类十分繁多，镍铬耐热合金（一种镍、铬和铁的混合物）的电阻率大约是铜的 58 倍。因此，可以用镍铬耐热合金制造电阻器和发热元件。

表 2-1 常见材料的电阻率

材料名称	电阻率（Ω・m）	用途	材料名称	电阻率（Ω・m）	用途
银	1.64×10^{-8}	导体	锗	4.7×10^{-1}	半导体
铜	1.72×10^{-8}	导体	硅	6.4×10^{2}	半导体
铝	2.8×10^{-8}	导体	纸张	10^{10}	绝缘体
金	2.45×10^{-8}	导体	云母	5×10^{11}	绝缘体
铁	1.23×10^{-7}	导体	玻璃	10^{12}	绝缘体
铅	2.2×10^{-7}	导体	聚四氟乙烯	3×10^{12}	绝缘体

电阻器（resistor）是一种用来对材料的电流抑制特性进行描述的电路元件。为了构造电路，图 2-3 所示的电阻通常由金属合金和碳化合物构成。这种电阻是最简单的无源元件。

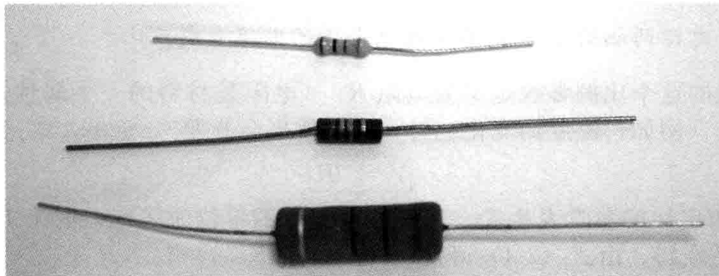


图 2-3　从上至下分别为 1/4W、1/2W 和 1W 的电阻
（© Sarhan M. Musa）

例 2-1 计算一条长 2m，横截面直径为 1.5mm 的铝线电阻的阻值。

解： 首先，计算横截面积：

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi(1.5\times10^{-3})^2}{4} = 1.767\times10^{-6}(\text{m}^2)$$

从表 2-1，可以得到铝的电阻率为 $\rho=2.8\times10^{-8}\Omega\cdot\text{m}$。因此，

$$R = \frac{\rho l}{A} = \frac{2.8\times10^{-8}\times2}{1.767\times10^{-6}} = 31.69(\text{m}\Omega)$$ ◀

练习 2-1　确定一直径为 2mm，长度为 30m 的铁制导线的阻值。　**答案：** 1.174Ω

例 2-2 一根铜母线如图 2-4 所示。当其阻值为 0.5Ω 时，计算其长度。

解： 该铜母线具有均匀的横截面，因此可以通过式（2-1）对其进行求解。但是，其横截面是长方形。因此，其横截面积为

$$A = 宽\times高 = (2\times10^{-3})\times(3\times10^{-3})$$
$$= 6\times10^{-6}(\text{m}^2) = 6(\mu\text{m}^2)$$

从表 2-1，可以得到铜的电阻率为 $\rho=1.72\times10^{-8}\Omega\cdot\text{m}$。因此

$$R = \rho\frac{l}{A} \longrightarrow l = \frac{RA}{\rho}$$

$$l = \frac{0.5\times6\times10^{-6}}{1.72\times10^{-8}} = 174.4(\text{m})$$ ◀

练习 2-2　一个横截面为三角形的导电条如图 2-5 所示。假设该导电条是 $1.25\text{m}\Omega$ 铝制电阻，求该导电条的长度。

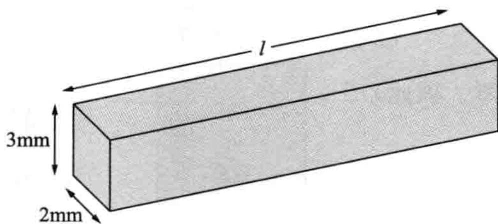


图 2-4　例 2-2 中的铜母线

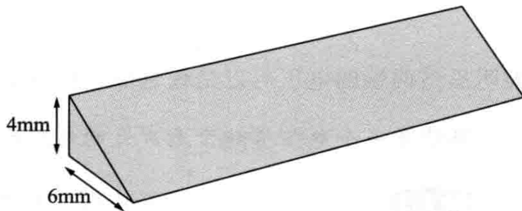


图 2-5　练习 2-2 的图

答案： 6.82cm

2.3　欧姆定律

德国物理学家乔·西蒙·欧姆（Georg Simon Ohm，1787—1854），因发现流过电阻的电流

与电阻两端电压之间的关系而闻名于世，该关系正是众所周知的欧姆定律（Ohm's law)。即

$$\boxed{V \propto I} \tag{2-3}$$

欧姆定律：电阻两端的电压 V 与流过该电阻的电流 I 成正比。

欧姆将电阻的这个比例常数定义为电阻 R。(电阻是材料的一个属性，当元件的内部或外部条件改变（例如，温度的变化）时，电阻值也会改变。) 于是，式（2-3）可以写为

$$\boxed{V = IR} \tag{2-4}$$

式（2-4）为欧姆定律的数学表达式。其中，电压 V 的单位为伏特，电流 I 的单位为安培，电阻 R 的单位是欧姆。由式（2-4）可得：

$$R = \frac{V}{I} \tag{2-5}$$

因此，

$$1\Omega = 1\text{V}/1\text{A} \tag{2-6}$$

从式（2-4）还可以推导出：

$$I = \frac{V}{R} \tag{2-7}$$

因此，欧姆定律可以用三种不同的方式来表示，即式（2-5)、式（2-6）和式（2-7)。

应用式（2-4）所示的欧姆定律时，必须注意电流的方向和电压的极性。电流 I 的方向与电压 V 的极性必须遵守图 2-6 所示约定。这意味着当 $V=IR$ 时，电流从高电位流向低电位；反之，当电流从低电位流向高电位时，$V=-IR$。(当没有指定电阻的端电压极性时，总是在电流流入的端点标上正号。)

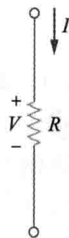


图 2-6 电阻 R 上的电流 I 的方向和电压 V 的极性

由于电阻值 R 可以从零变到无限大，下面就考虑两种极端情况下的电阻值 R。当某元件电阻值 $R=0$ 时，称为短路(short circuit)，如图 2-7a 所示。在电路短路的情况下，

$$V = IR = 0 \tag{2-8}$$

表明电压取值为零，但电流可以取任意值。在实际电路中，由良导体构成的导线通常可认为是短路。因此，

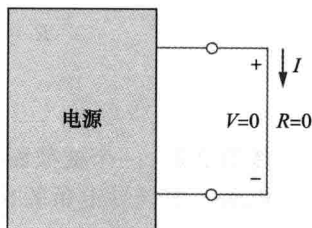
短路是一个电阻值趋于零的电路元件。

类似地，当某元件电阻值 $R=\infty$ 时称为开路（open circuit)，如图 2-7b 所示。对于开路而言，

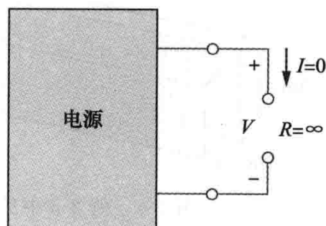
$$I = \frac{V}{R} = \frac{V}{\infty} = 0 \tag{2-9}$$

表明虽然两端的电压可以是任意值，但其电流为零。因此，

开路是一个电阻值趋于无穷大的电路元件。



a）短路（R=0）



b）开路（$R=\infty$）

图 2-7 短路和开路

例 2-3 一个电熨斗接 120V 电源时获取的电流为 2A，求该熨斗的阻值。

解：由欧姆定律可得：

$$R = \frac{V}{I} = \frac{120}{2} = 60(\Omega)$$ ◀

练习 2-3 烤面包机的基本部件是一种将电能转换为热能的电气元件（即电阻)，试求

阻值为 12Ω 的烤面包机从 110V 电源获取的电流为多少？ **答案：** 9.17A

例 2-4 计算如图 2-8 所示的电路电流 I。

解： 因为电阻两端接在电压源上，所以电阻两端的电压等于电压源的电压（30V）。因此，电流为：

$$I=\frac{V}{R}=\frac{30}{5\times10^3}=6(\text{mA})$$ ◀

练习 2-4 如果图 2-9 所示的电路中电流 $I=8\text{mA}$，确定电阻 R 的值。

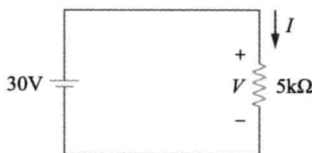


图 2-8 例 2-2 的图

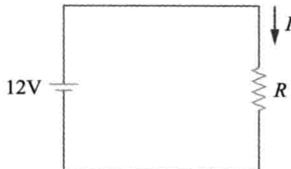


图 2-9 练习 2-4 的图

答案： 1.5kΩ

2.4 电导

在电路分析中另一个有用的量是电阻 R 的倒数，称为电导（conductance），用符号 G 表示：

$$\boxed{G=\frac{1}{R}=\frac{I}{V}} \tag{2-10}$$

电导是对某个元件传导电流好坏程度的度量，电导的旧单位是姆欧（mho，即将欧姆反过来）或欧姆的倒数，用倒过来的欧姆符号℧表示。虽然工程师们仍常使用姆欧作为电导的单位，但本书采用国际单位制中电导的单位西门子（S），以纪念维尔纳·冯·西门子：

$$1\text{S}=1℧=1\text{A}/1\text{V} \tag{2-11}$$

因此，

电导是一个元件传导电流的能力，单位是西门子（S）。

（不要混淆表示西门子的符号 S 和表示时间的符号秒 s。）同一电阻，可以用欧姆表示，也可以用西门子来表示。例如，10Ω 就等于 0.1S。由式（2-1）和式（2-10）可得：

$$G=\frac{A}{\rho l}=\frac{\sigma A}{l} \tag{2-12}$$

其中，希腊字母西格玛 $\sigma=1/\rho=$材料的电导率，单位为 S/m。

例 2-5 求下列电阻的电导：(a) 125Ω (b) 42Ω。

解： (a) $G=1/R=1/(125\Omega)=8\text{mS}$

(b) $G=1/R=1/(42\times10^3\Omega)=23.8\mu\text{S}$ ◀

练习 2-5 求下列电阻的电导。

(a) 120Ω

(b) 25MΩ **答案：** (a) 8.33mS (b) 40nS

2.5 圆形导线

圆形导线有广泛的应用。我们经常使用导线来连接元件，但导线通常都有一定的阻值以及最大允许电流值。因此，需要选择正确的尺寸。在美国线规（American Wire Gauge，AWG）中，导线按照标准的规定号码进行排列。其中电缆和导线是采用英制规定的。在英制中，

$$1000\text{mil}=1\text{in} \tag{2-13a}$$

即

$$1\text{mil} = \frac{1}{1000}\text{in} = 0.001\text{in} \tag{2-13b}$$

导线横截面积的单位为圆密耳（circular mil，CM），等于以 1 密耳（mil）为直径的圆的面积。从式（2-2）中可得：

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi(1\text{mil})^2}{4} = \frac{\pi}{4}\text{mil}^2 \tag{2-14}$$

因此

$$1\text{CM} = \frac{\pi}{4}\text{mil}^2 \tag{2-15a}$$

即

$$1\text{mil}^2 = \frac{4}{\pi}\text{CM} \tag{2-15b}$$

如果圆形导线的直径用密耳表示，则用圆密尔表示面积为

$$\boxed{A_{CM} = d_{mil}^2} \tag{2-16}$$

表 2-2 中给出了标准裸铜线的数据列表。其中 d 为直径，R 为每 1000 英尺长度的电阻值。（注意，导线直径随着规定号码的增大而减小。）最大的允许电流值只是一个经验法则。在钢铁行业中的导线厚度量规会采用不同的编号系统（如美国钢线线规，U. S. Steel Wire Gauge）。因此，表 2-2 中的数据并不适用于钢线。图 2-10 给出了不同尺寸的导线。典型的家用导线，其 AWG 编号为 12 或者 14。电话线经常使用 22、24 或者 26 号导线。以下举例说明该表的具体使用方法。

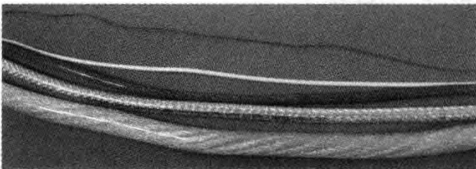


图 2-10 不同标号的绝缘导线

（© Sarhan M. Musa）

表 2-2 美国线规（AWS）中 20℃条件下的尺寸

AWG#	d (mil)	截面积 (CM)	R (Ω/1000ft)	最大允许电流 (A)	AWG#	d (mil)	截面积 (CM)	R (Ω/1000ft)	最大允许电流 (A)
0000	460	211600	0.0490	230	19	35.89	1288	8.051	
000	409.6	167810	0.0618	200	20	31.96	1022	10.15	
00	364.8	133080	0.0780	175	21	28.46	810.10	12.80	
0	324.9	105530	0.0983	150	22	25.3	642.40	16.14	
1	289.3	83694	0.1240	130	23	22.6	509.5	20.36	
2	257.8	66373	0.1563	115	24	20.1	404.01	25.67	
3	229.4	52634	0.1970	100	25	17.9	320.40	32.37	
4	204.3	41740	0.2485	85	26	15.94	254.10	40.81	
5	181.9	33102	0.3133	—	27	14.2	201.50	51.57	
6	162	26250	0.3951	65	28	12.6	159.79	64.90	
7	144	20820	0.4982	—	29	11.26	126.72	81.83	
8	128.5	16510	0.6282	50	30	10.03	100.50	103.2	
9	114.4	13090	0.7921	—	31	8.928	79.70	130.1	
10	101.9	10381	0.9989	30	32	7.95	63.21	164.1	
11	90.74	8234	1.260	—	33	7.08	50.13	206.9	
12	80.81	6530	1.588	20	34	6.305	39.75	260.9	
13	71.96	5178	2.003	—	35	5.6	31.52	329.0	
14	64.08	4107	2.525	15	36	5	25	414.8	
15	57.07	3257	3.184		37	4.5	19.83	523.1	
16	50.82	2583	4.016		38	3.965	15.72	659.6	
17	45.26	2048	5.064		39	3.531	12.47	831.8	
18	40.30	1624	6.385		40	3.145	9.89	1049	

例 2-6 试计算长度为 840 英尺的 AWG 6 号铜线阻值。

解：从表 2-2 可知，AWG6 号铜线每 1000 英尺的阻值为 0.3951Ω。因此，当长度为 840 英尺时，有

$$R=840\text{ft}\times\frac{0.3951\Omega}{1000\text{ft}}=0.3319\Omega$$ ◀

练习 2-6 试计算长度为 1200 英尺的 AWG 10 号铜线阻值。 **答案**：199Ω

例 2-7 试计算直径为 114.4 密耳的 AWG 9 号铜线的横截面积。

$$A_{\text{CM}}=(114.4)^2=13087(\text{CM})$$ ◀

练习 2-7 直径为 0.0036 英寸的导线，其横截面积是多少（CM）？ **答案**：12.96CM

2.6 电阻的类型

电阻的类型是多种多样的，用以满足不同的需求。图 2-11 给出了一些电阻类型。电阻最主要的功能是限流、分压以及消耗热量。

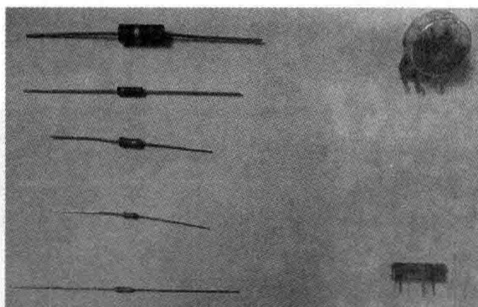
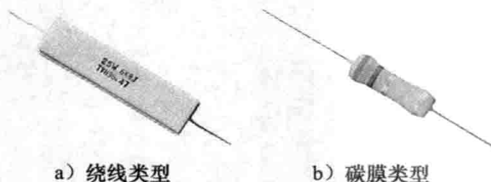


图 2-11 不同类型的电阻
（© Sarhan M. Musa）



a）绕线类型　　b）碳膜类型

图 2-12 固定电阻
（图片由 Tech America 提供）

电阻分为固定电阻和可变电阻两类。绝大部分电阻都是固定电阻，其阻值保持不变。图 2-12 给出了两种常见类型的固定电阻（绕线电阻和合成电阻）。当需要大量散热时使用绕线电阻，当需要大电阻值时使用合成电阻。图 2-1 中的电路模型为固定电阻。可变电阻具有可调阻值。图 2-13 给出了可变电阻的符号。可变电阻主要有两种类型：电位器（potentiometer）和滑动变阻器（rheostat）。简单地说，电位器或电位计（pot）就是具有滑动触点或者滑动片的三端元件。通过移动滑动片，触点端和固定端之间的电阻是不断变化的。电位器用来调整提供给电路的电压值，其典型电路如图 2-14 所示。图 2-15 给出了一种具有调节器的电位器。滑动变阻器是两端或者三端电阻，用来控制电路中的电流值，其典型电路如图 2-16 所示。当调整滑动电阻器，使其具有更大阻值时，电流减少，电动机就会慢下来，反之亦然。同一可变电阻既可作为电位器也可作为滑动变阻器，这取决于其连接方式的不同。同固定电阻类似，可变电阻也有绕线式和合成式两种类型，如图 2-17 所示。虽然在电路设计中使用图 2-12 所示的固定电阻，但现今大多数电路器件（包括电阻）既可以表面贴装也可集成处理，其典型电路如图 2-18 所示。表面贴装技术（surface mount technology，SMT）既可用来实现模拟电路，也可实现数字电路。图 2-19 给出了一个 SMT 电阻。

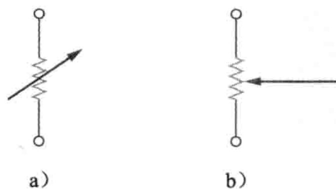


图 2-13 可变电阻的电路符号

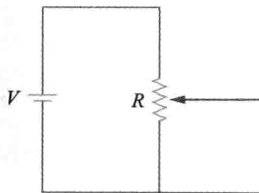


图 2-14 可变电阻作为电位器

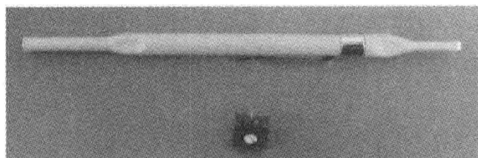


图 2-15　电位器及其调节器

(© Sarhan M. Musa)

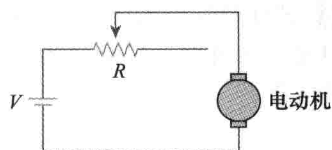
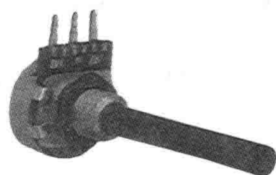


图 2-16　可变电阻作为滑动变阻器



a）绕线类型



b）滑片电阻器

图 2-17　可变电阻

（图片由 Tech America 提供）

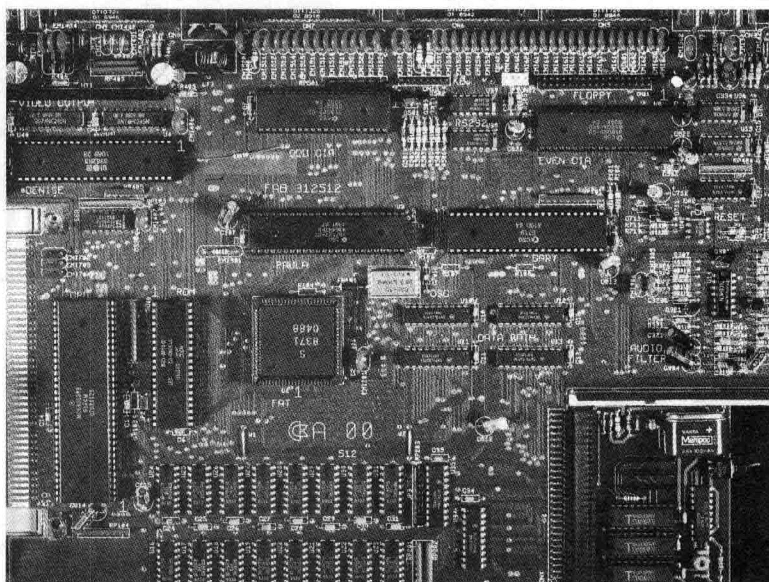


图 2-18　集成电路板中的电阻

(© Eric Tomey/Alamy RF)

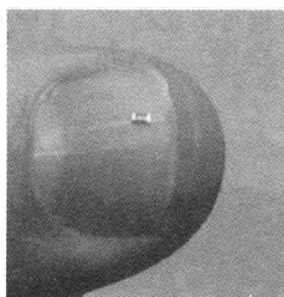
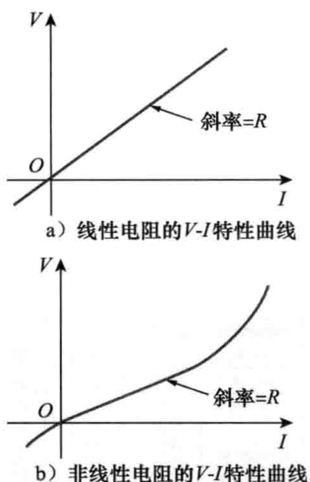


图 2-19　表面贴装电阻

(© Greg Ordy)

应该指出，不是所有电阻都遵守欧姆定律。遵守欧姆定律的电阻称为线性（linear）电阻，其阻值是不变的，其伏安特性如图2-20a所示，即其V-I曲线是通过原点的直线。非线性（nonlinear）电阻不符合欧姆定律，其阻值随电流变化而变化，其伏安特性如图2-20b所示。白炽灯和二极管都是典型的具有非线性电阻的器件[⊖]（如图2-21所示）。虽然在一定条件下，所有的实际电阻器都可能呈非线性特性，但本书假定所有电阻均为线性的。



a）线性电阻的V-I特性曲线

b）非线性电阻的V-I特性曲线

图2-20 电阻的V-I特性曲线

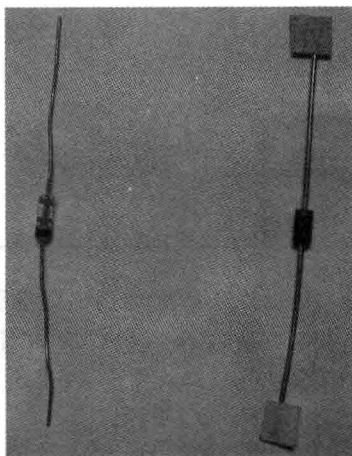


图2-21 二极管

（© Sarhan M. Musa）

2.7 电阻的色码

有些电阻尺寸较大，可以将其阻值直接印在电阻上。而有些电阻比较小，无法直接印制。对于小型电阻，色码提供了一种识别电阻阻值的方法。如图2-22所示，电阻上的色码是由三条、四条或者五条色环组成。表2-3列举了所有的色环，其说明如下：

A＝电阻阻值的第一位有效数字
B＝电阻阻值的第二位有效数字
C＝电阻阻值的阻值倍数
D＝误差率（用%表示）
E＝置信因子（用%表示）

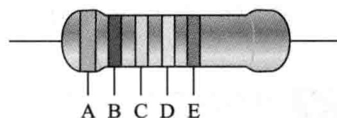


图2-22 电阻的色码

* 从左向右依次读取色环

前三个色环（A、B和C）用来表示电阻阻值。A和B表示阻值的第一个和第二个有效数字，色环C表示10的幂指数，如表2-3所示。如果第四条色环（D）存在，则表示误差的百分比。例如，5%的误差表示电阻的实际值在色码值的±5%范围内浮动。如果第四条色环不存在，则默认误差为±20%。如果第五条色环（E）存在，则代表置信因子，即表示在工作1000个小时之后，不再具有标称阻值的电阻数目的期望统计值。如图2-23所示，“大男孩们追我们年轻的女孩们，但是紫罗兰总是会胜利（Big Boys Race Our Young Girls，But Violet Generally Wins）”这句话可以帮助我们更好地记忆色码表示方法。

⊖ 二极管是半导体，其作用相当于开关，它允许电荷/电流仅向一个方向流动。

表 2-3　电阻的色码

颜色	色环 A 有效数字	色环 B 有效数字	色环 C 倍数	色环 D 误差	色环 F 置信因子
黑色	不可用	0	10^0		
棕色	1	1	10^1		1%
红色	2	2	10^2		0.1%
橘色	3	3	10^3		0.01%
黄色	4	4	10^4		0.001%
绿色	5	5	10^5		
蓝色	6	6	10^6		
紫色	7	7	10^7		
灰色	8	8	10^8		
白色	9	9	10^9		
金色			0.1	5%	
银色			0.01	10%	
无颜色				20%	

例 2-8　求图 2-24 所示色码电阻的阻值。

解：色环 A 是蓝色（6）；色环 B 是红色（2）；色环 C 是橙色（3）；色环 D 是金色（5%）色环 E 是红色（0.1%）。因此，

R $=62\times10^3\Omega$，$\pm5\%$的误差，置信因子为 0.1%

$=62\text{k}\Omega\pm5\%$，置信因子为 0.1%

这意味着色码电阻的实际电阻值将落在 58.9kΩ（62－3.1）kΩ 和 65.1kΩ（62＋3.1）kΩ 之间。0.1%的置信因子表示在工作 1000 个小时之后，1000 个电阻中会有一个电阻，其电阻值不在上述区间内。◀

0		黑色（Black）	大（Big）
1		棕色（Brown）	男孩们（Boys）
2		红色（Red）	追（Race）
3		橘色（Orange）	我们（Our）
4		黄色（Yellow）	年轻的（Young）
5		绿色（Green）	女孩们（Girls）
6		蓝色（Blue）	但是（But）
7		紫色（Violet）	紫罗兰（Violet）
8		灰色（Gray）	总是（Generally）
9		白色（White）	胜利（Wins）

图 2-23　色码的辅助记忆方法

练习 2-8　某色码电阻如图 2-25 所示，求其电阻值、误差值以及置信因子。

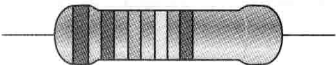


图 2-24　例 2-8 色码电阻

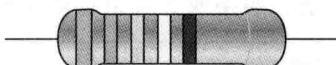


图 2-25　练习 2-8 色码电阻

答案：3.3MΩ±10%，置信因子为 1%

例 2-9　某电阻只有三条色环，依次为绿色、黑色和银色。求其电阻值及误差值。

解：色环 A 是绿色（5）；色环 B 是黑色（0）；色环 C 是银色（0.01）；
因此

$$R=50\times0.01\Omega=0.5\Omega$$

由于没有第四条色环，因此误差为默认值±20%。◀

练习 2-9　某电阻色环依次为黄色、紫色、白色和金色，求其电阻值和误差值。

答案：47GΩ±5%

例 2-10　某公司制造的电阻阻值为 5.4kΩ，误差为 10%，试分析其色码。

解：

$$R=5.4\times10^3\Omega=54\times10^2\Omega$$

从表 2-3 可知，绿色代表 5；黄色代表 4；红色代表 10^2。银色代表 10%的误差。因此，该电阻的色环依次为

绿色、黄色、红色、银色　◀

练习 2-10 若例 2-10 中所述公司亦生产某阻值为 7.2MΩ 的电阻，误差为 5%，置信因子为 1%，则该电阻该如何用色环来表示。

答案： 紫色、红色、绿色、金色、棕色

2.8 标称电阻值

实际上并非所有阻值的电阻都能实现商业化生产，只有有限数量的阻值能够以合理的成本实现商业化生产。表 2-4 给出了成品电阻的阻值。这些都是合成碳膜电阻的标称值。注意，阻值范围是从 0.1Ω 到 22MΩ。在合理的成本下，只有表中粗体标注的阻值电阻才有 10%误差电阻，而 5%误差电阻对所有阻值均适用。例如，一个 330Ω 的电阻，既有 5%误差的元件，也有 10%误差的元件。而 110kΩ 的电阻，只有 5%误差的元件。

表 2-4 商业化电阻标称值

欧姆（Ω）					千欧（kΩ）		兆欧（MΩ）	
0.10	**1.0**	**10**	**100**	**1000**	**10**	**100**	**1.0**	**10.0**
0.11	1.1	11	110	1100	11	110	1.1	11.0
0.12	**1.2**	**12**	**120**	**1200**	**12**	**120**	**1.2**	**12.0**
0.13	1.3	13	130	1300	13	130	1.3	13.0
0.15	**1.5**	**15**	**150**	**1500**	**15**	**150**	**1.5**	**15.0**
0.16	1.6	16	160	1600	16	160	1.6	16.0
0.18	**1.8**	**18**	**180**	**1800**	**18**	**180**	**1.8**	**18.0**
0.20	2.0	20	200	2000	20	200	2.0	20.0
0.22	**2.2**	**22**	**220**	**2200**	**22**	**220**	**2.2**	**22.0**
0.24	2.4	24	240	2400	24	240	2.4	
0.27	**2.7**	**27**	**270**	**2700**	**27**	**270**	**2.7**	
0.30	3.0	30	300	3000	30	300	3.0	
0.33	**3.3**	**33**	**330**	**3300**	**33**	**330**	**3.3**	
0.36	3.6	36	360	3600	36	360	3.6	
0.39	**3.9**	**39**	**390**	**3900**	**39**	**390**	**3.9**	
0.43	4.3	43	430	4300	43	430	4.3	
0.47	**4.7**	**47**	**470**	**4700**	**47**	**470**	**4.7**	
0.51	5.1	51	510	5100	51	510	5.1	
0.56	**5.6**	**56**	**560**	**5600**	**56**	**560**	**5.6**	
0.62	6.2	62	620	6200	62	620	6.2	
0.68	**6.8**	**68**	**680**	**6800**	**68**	**680**	**6.8**	
0.75	7.5	75	750	7500	75	750	7.5	
0.82	**8.2**	**82**	**820**	**8200**	**82**	**820**	**8.2**	
0.91	9.1	92	910	9100	91	910	9.1	

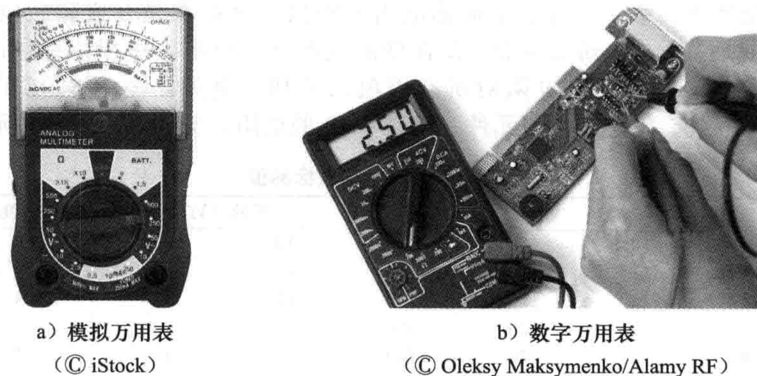
当设计一个电路时，电阻的计算值很难符合上述标准。可以选择最为接近的标称值，或者对标称值进行组合。绝大多数情况下，选择最接近的标称值，即可满足设计性能。为了计算简便，本书绝大部分电阻值均不是标称值。

2.9 应用：测量

电阻经常用来表示将电能转换成热能或者其他形式能量的设备。这些设备包括导线、灯泡、电暖气、烤箱或扬声器等。从本质上讲，电阻就是用来控制电流的。在电位器和仪表等一些应用中，均可利用此性质。因为对电压 V、电流 I、电阻 R 的测量是十分重要的本节将分别讨论测量电流、电压和电阻的仪表——安培表（ammeter）、伏特表（voltmeter）和欧姆表（ohmmeter）。

伏特表是用来测量电压的仪器；安培表是用来测量电流的仪器；欧姆表是用来测量电阻的仪器。

万用表（multimeter）是将上述三种仪表合成在一起的一种仪表，它可以是模拟的，也可以是数字的。模拟表使用指针和刻度显示测量值。数字表的测量值使用数码显示。目前，数字表应用得更为广泛。由于在业内，模拟表和数字表都会被使用，因此对这两种仪表都应熟悉。图 2-26 给出了一个典型的模拟万用表（集成了伏特表、安培表和欧姆表）和一个典型的数字万用表。数字万用表（digital multimeter，DMM）是目前应用最广泛的一种仪表，与之相对应的模拟表称为伏特—欧姆万用表（volt-ohm-milliammeter，VOM）。



a）模拟万用表（© iStock）

b）数字万用表（© Oleksy Maksymenko/Alamy RF）

图 2-26 模拟和数字万用表

如果需要测量电压，将伏特表/万用表跨接在元件上，即可得到其电压，如图 2-27 所示。伏特表通过与其他元件并联[1]测量负载两端的电压。

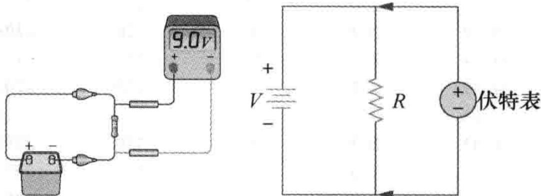


图 2-27 测量电压

如果需要测量电流，将被测元件同安培表/万用表串联[2]，如图 2-28 所示。为了使读数为正数，仪表的连接必须使电流从正极流入。必须要“破坏”电路，即需要切断电流线路以使电流能够流过安培表（钳形电流表（ampclamp）是一种测量交流（ac）电流的装置）。

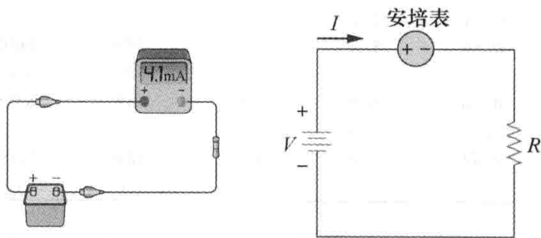


图 2-28 测量电流

如果需要测量元件的电阻，则将被测元件连接在欧姆表/万用表两端，如图 2-29 所示。如果该元件连接在电路中，则在测量其电阻之前，元件的一端必须从电路中断开。因为未断开的导线电阻为零，所以可用欧姆表对电路的连贯性进行检测。如果导线是断开的，连接其两端的欧姆表的读数将为无穷大。因此，可以通过欧姆表来检测短路（低电阻）和开路（高电阻）。

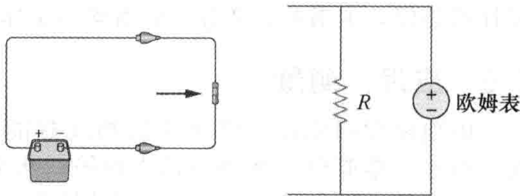


图 2-29 测量电阻

当使用本节所提到的各类仪表时，需养成以下良好的操作习惯。

[1] 当两个元件连接到相同的两端时，称为并联。

[2] 当两个元件依次级联或者连接时，称为串联。

1）尽可能在连接仪表之前断开电源。

2）为了避免损坏仪器，最好先把仪表调到最高量程，然后再移动到适当的范围。（大多数 DMM 都是自动量程）

3）当测量直流电流或者电压时，要遵守正确的极性。

4）当使用万用表时，一定要把仪表放在正确的模式上（dc、ac、V、A、G），并将表笔放在合适的插孔上。

5）当完成测量时，应将仪表关闭以免耗尽仪表的内部电池。

上述内容关乎电气测量的安全问题。

2.10 电气安全保护措施

前面已经学习了如何测量电流、电压和电阻，测量时需要小心操作这些仪表以避免电击或者受伤。电是可以致命的，因此如何做到安全和正确地测量，是需要完整学习的一部分内容。

2.10.1 电击

当对电器电路进行操作时，有可能遭受到电击。电击是由电流通过人身体而产生的。电击可以使人产生惊跳，摔倒甚至被抛出。它可能引起非常严重后果，使肌肉僵硬收缩，导致骨折、错位甚至失去知觉，造成呼吸系统瘫痪，心跳不规则甚至完全停止跳动。电流会灼伤皮肤，并扩展到组织细胞深处。在电流的流入点和流出点之间强电流可能会引起细胞组织死亡。大规模细胞组织肿胀可能导致静脉血凝固和肌肉膨胀。因此，电击可引起肌肉痉挛、四肢无力、呼吸弱、脉搏快、严重烧伤、神志不清甚至死亡。

电击是指因为电流通过身体而造成的伤害。

人体电阻取决于体重、皮肤的潮湿程度、身体与电装置的接触点等多个因素。表 2-5 给出了不同电流（以 mA 为单位）对身体的影响。

表 2-5 电击

电流	生理效应
小于 1mA	无感觉
1mA	刺痛感
5～20mA	不自觉的肌肉收缩
20～100mA	失去呼吸，持续可致命

2.10.2 保护措施

如果不严格遵守相关规则，将无法保证用电安全。因此，在用电时，须遵守下列安全规则：

- 在开始用电工作之前，确保电路不带电。
- 在维修电灯或其他装置时，请先拔掉插头。
- 工作时，用胶布封住主要开关，熔丝座或断路器。留一张便条，以免有人一不小心进行上电操作。将换下的熔丝直接装入口袋。
- 正确操作工具，确保金属工具绝缘性能良好。
- 如果测量 V 或者 I，打开电源并记录读数。测量 R 时断开电源。
- 避免穿宽松的衣服，以防卷入操作设备。
- 一定穿长裤、长袖衣服和鞋子，并保持它们的干燥。
- 禁止站在金属和潮湿的地上。（电和水不能混合）
- 确保在工作区域内有足够的照明。

- 禁止戴戒指、手表、手镯或其他珠宝工作。
- 禁止单独工作。
- 要给高电压电容放电。
- 在高电压的地方，需用单手工作。

保护自己，远离伤害和损伤，是一件非常重要的事情。如果我们遵守上述安全规定，就可以避免电击和意外发生。我们的规则就是："安全第一。"

2.11 本章小结

1）电阻元件，其两端的电压 V 同流过它的电流 I 成正比。即电阻是遵循欧姆定律的元件。

$$V=IR$$

其中 R 是电阻的阻值。

2）具有均匀横截面 A 的物体，其电阻 R 可以用电阻率 ρ 乘以长度 l 除以横截面积 A 来计算，即有

$$R=\frac{\rho l}{A}$$

3）短路电阻（理想导线）的阻值为零（$R=0$）。开路电阻的阻值为无穷大（$R=\infty$）。

4）电阻的电导 G 是其阻值 R 的倒数：

$$G=\frac{1}{R}$$

5）对圆形导线，其横截面积的单位为圆密耳（CM）。则其直径（mil）和横截面积（CM）的关系为

$$A_{\mathrm{CM}}=d_{\mathrm{mil}}^2$$

6）美国线规是一个指定导线直径的标准系统。

7）电阻可以按照固定电阻和可变电阻进行分类，也可以按照线性电阻和非线性电阻进行分类。电位器和滑动电阻器都是可变电阻、分别用来调节电压和电流。常见的电阻类型包括碳膜或合成电阻、绕线电阻、片状电阻、薄膜电阻和功率电阻等。

8）色码电阻通常较小，无法在其上标注电阻值。"大男孩们追我们年轻的女孩们，但是紫罗兰总是会胜利（Big Boys Race Our Young Girls，But Violet Generally Wins）这句话可以帮助我们更好地记住色码顺序：黑色、棕色、红色、橘色、黄色、绿色、蓝色、紫色、灰色和白色。

9）成品合成碳膜电阻的标称值范围是 0.1Ω 到 22MΩ。

10）分别用伏特表、安培表和欧姆表测量电压、电流和电阻。可采用万用表，如数字万用表（DMM）或者伏-欧姆-万用表（VOM），来对上述三个量进行测量。

11）安全就是要有效预防事故发生。如果按照相关的安全措施进行操作，就可以确保在电路操作中不出现任何问题。

复习题

1 下列哪种材料不是导体？

(a) 铜　(b) 银
(c) 云母　(d) 金
(e) 铅

2 在电路中，电阻的主要用途是：

(a) 阻碍电流变化；(b) 产生热量；
(c) 增加电流；　(d) 限制电流；

3 电热器从 120V 电线获取的电流为 10A，则电热器的电阻为：

(a) 1200Ω　(b) 120Ω
(c) 12Ω　(d) 1.2Ω

4 电阻的倒数为：

(a) 电压　(b) 电流
(c) 电导　(d) 功率

5 下面哪个不是电导的单位？

(a) 欧姆　(b) 西门子

(c) 姆欧 (d) ℧

6 10mΩ 电阻的电导是：

(a) 0.1mS (b) 0.1S

(c) 10S (d) 100S

7 电位器的类型是：

(a) 不变电阻； (b) 可变电阻；

(c) 计量器； (d) 稳压器；

8 一条直径为 0.03 英寸的导线，以圆密耳为单位的面积是多少？

(a) 0.0009 (b) 9

(c) 90 (d) 900

9 所有电阻都是色码电阻。

(a) 对 (b) 错

10 数字万用表（DMM）是使用最广泛的电子测量仪器。

(a) 对 (b) 错

答案： 1 (c)，2 (d)，3 (c)，4 (c)，5 (a)，6 (d)，7 (b)，8 (d)，9 (b)，10 (a)

习题

2.2 节

1 一条长 250m 的铜线，其直径为 2.2mm，试计算导线的阻值。

2 求电阻为 0.5Ω，直径为 2mm 铜线的长度。

3 一条 2 英寸×2 英寸的正方形铜棒，长度为 4 英尺，求其电阻。

4 如果一个电路的额定功率为 1200W，吸收的电流是 6A，求该电炉的电阻。

5 镍铬合金（$\rho=100\times10^{-8}\Omega\cdot m$）导线，可用来构造加热元件。已知直径为 2mm，产生的电阻为 1.2Ω，试求该镍铬合金导线长度为多少？

6 一条半径为 3mm，电阻为 6Ω 的铝线，试求导线长度。

7 一石墨圆柱体，直径为 0.4mm，长度为 4cm，电阻为 2.1Ω，试求其电阻率。

8 某个圆形导线长为 50m，直径为 0.5m，在室温情况下电阻为 410Ω，试求导线是由什么材料组成的？

9 如果一个导线的长度变短，为什么它的电阻会减小？

10 两根导线由相同的材料组成。第一根导线具有 0.2Ω 电阻。第二根导线长度是第一根的两倍，且半径是第一根导线的一半。求第二根导线的电阻。

11 两根导线的电阻和长度相同。第一根导线由铜组成，第二根导线由铝组成。求铜线同铝线的横截面积的比率。

12 利用高压电源线远距离传输大功率。由于价格低，铝电缆比铜电缆更有优势。假定用于高压电源线的铝线横截面积为 $4.7\times10^{-4}m^2$，求这根 20km 长的导线的电阻。

2.3 节

13 图 2-30 中，哪个图形表示欧姆定律？

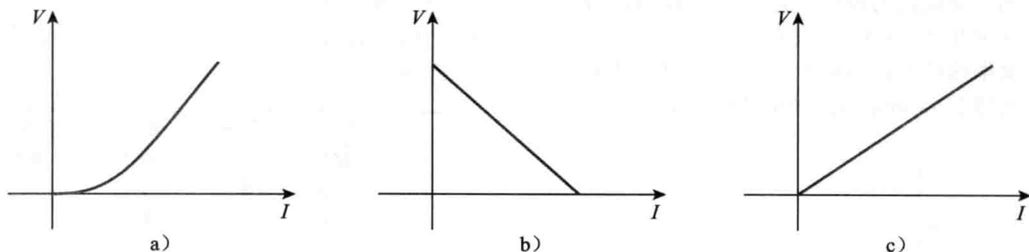


图 2-30 习题 13 图

14 当电阻两端电压是 60V 时，通过电阻的电流为 50mA，求其阻值。

15 某 5kΩ 电阻的端电压为 16V，求通过该电阻的电流。

16 某电阻同一 12V 电池相连，当其电阻为下列值时试计算其电流：

(a) 2kΩ (b) 6.2kΩ

17 某空调压缩机的电阻为 6Ω。当压缩机与 240V 电源连接时，求流过电路的电流。

18 某 12V 电源与一个纯电阻灯泡连接，吸收 3A 电流。求灯泡的电阻是多少？

19 如果 30μA 的电流通过 5.4MΩ 的电阻，求电压是多少？

20 如果 2mA 电流通过一个 25Ω 的电阻，求其两端的电压降。

21 如果某元件与 12V 电池相连时，允许通过的电流是 28mA，试计算该元件的电阻。

22 求在某 50Ω 电阻上产生 10mA 电流的电源电压。

23 一个非线性电阻的 $I=4\times10^{-2}V^2$，求 $V=$

10、20 和 50V 时的电流 I。

24 在图 2-31 中，求与每个电路中电阻电流的数值和方向。

25 在图 2-32 中，求每个电路中电阻电压的数值和极性。

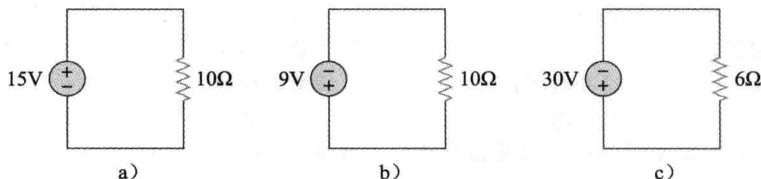


图 2-31 习题 24 电路图

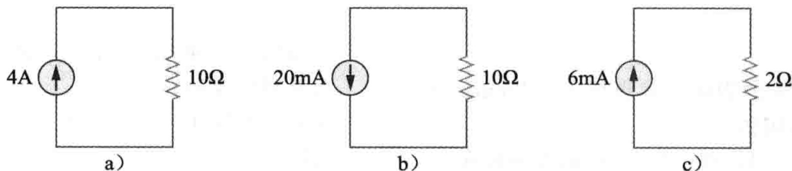


图 2-32 习题 25 电路图

26 一手电筒用两个 3V 电池串联，为灯丝提供 0.7A 的电流。

(a) 求手电筒灯泡的电势差；

(b) 计算灯丝的电阻。

2.4 节

27 求下列每个电阻的电导：

(a) 2.5Ω (b) 40kΩ

(c) 12MΩ

28 求下列每个电导的电阻：

(a) 10mS (b) 0.25S

(c) 50S

29 当一个电阻的端电压是 120V 时，通过它的电流是 2.5mA，试计算其电导。

30 某铜棒长 4cm，电导为 500mS，求其直径。

31 求图 2-33 所示电路的电池电压 V。

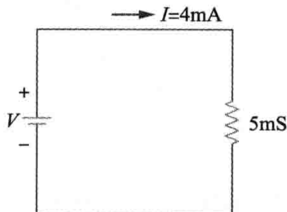


图 2-33 习题 31 电路图

2.5 节

32 利用表 2-2，分别确定 600 英尺长的 10 号和 16 号 AWG 铜线的电阻。

33 铜传输线的电阻不能超过 0.0001Ω，由负载吸收的最大电流是 120A。假定铜线长度为 10 英尺，则多少编号的铜线合适？

34 求具有下列横截面的导线的直径，以英尺为单位。

(a) 420CM (b) 980CM

35 以圆密耳为单位，计算下列导体的面积：

(a) 直径为 0.012 英寸的圆形线。

(b) 截面积为 0.2 英寸×0.5 英寸的矩形总线条。

36 一条 16 号铜线 1m 长，连接到 1.5V 的电池，求流过的电流是多少？

2.7 节

37 求具有下列色码的电阻值：

(a) 蓝、红、紫、银

(b) 绿、黑、橙、金

38 当电阻具有下列色环时，试求该电阻阻值范围（Ω）。

	色环 A	色环 B	色环 C	色环 D
(a)	棕色	紫色	绿色	银色
(b)	红色	黑色	橘色	金色
(c)	白色	红色	灰色	——

39 确定下列具有 5%误差的电阻色环。

(a) 52Ω (b) 320Ω

(c) 6.8kΩ (d) 3.2MΩ

40 求下列电阻的色码

(a) 240Ω (b) 45kΩ

(c) 5.6MΩ

41 对习题 37 中的每个电阻，求在误差限制内的最小和最大电阻。

42 给出下列电阻的色环：

(a) 10Ω，10%误差 (b) 7.4kΩ，5%误差

(c) 12MΩ，20%误差

2.9 节

43　图 2-34 中万用表的电压度数是多少？

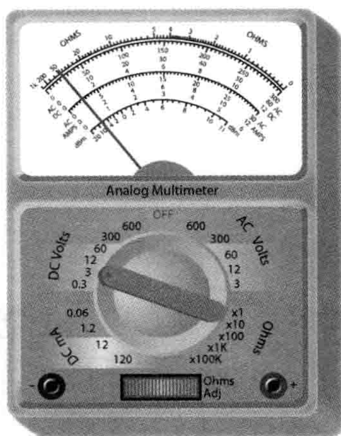


图 2-34　习题 43 万用表

44　求图 2-35 中万用表电压的度数。



图 2-35　习题 44 万用表

45　如何使用欧姆表，检查一个灯泡是否烧毁？

46　在图 2-36 中，哪个测量方案是错误的？

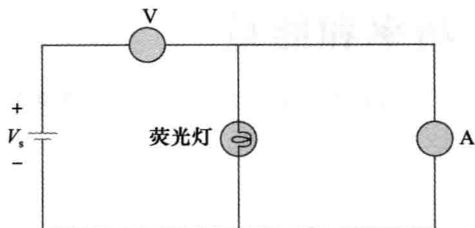


图 2-36　习题 46 电路图

47　在图 2-37 中，要测量电阻 R_1 的端电压，请说明应如何放置伏特表。

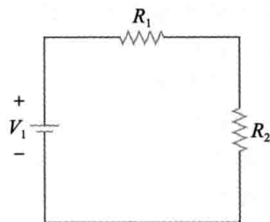


图 2-37　习题 47、习题 48、习题 49 电路图

48　在图 2-37 中，要测量通过电阻 R_2 的电流，请说明应如何放置安培表。

49　在图 2-37 中，要测量电阻 R_2，请说明应如何连接欧姆表。

50　如何利用欧姆表确定开关是开还是关。

2.10 节

51　什么会引起电击？

52　至少说出四种在进行测量时应采取的安全措施。

第3章

功率和能量

未经你同意，没有人能令你感到低人一等。

——埃莉诺．罗斯福

历史人物

詹姆斯·瓦特 (James Watt，1736—1819)，苏格兰发明家和机械工程师，因改进蒸汽机而闻名于世。

瓦特出生在苏格兰的格拉斯哥。由于健康状况不佳，他没受过什么正规教育。在伦敦学习了一年的仪表制造之后，他来到格拉斯哥开设店铺。由于没有学徒七年许可证，他遭到行业协会的拒绝。在大学的赞助之下，资助了他一个车间。在那里，他开始了自己的仪器制造产业，后又在蒸汽机方面产生兴趣。瓦特也是一个著名的土木工程师，对运河线路进行过多次调查。1785 年，詹姆斯·瓦特当选为英国皇家学会的院士。为了纪念他，功率的单位，瓦特（watt)，使用他的名字命名。



詹姆斯·瓦特

（图片由得克萨斯大学图书馆提供）

詹姆斯·斯科特·焦耳 (James Prescott Joule，1818—1889)，英国物理学家，证明了各种形式的能量，包括机械能、电能和热能等，其本质都是相同的，并且可以从一种形式转换成另一种形式。

焦耳出生于英国曼彻斯特一个繁荣的酿酒厂老板家中，自幼在家中接受教育。16 岁时，他被送到剑桥，追随英国著名化学家约翰·道尔顿进行研究。为了能使电动机取代蒸汽机，他的第一个研究目标是提高电动机的效率。他证明了大量的热量和机械工作间的等价关系。在此基础上导出了能量守能定律（热力学第一定律)，指出能量不会消失，只是当一种形式的能量消耗之后，会以另一种能量形式出现。他用实验测定焦耳定律，对导线中电流产生的热量进行了表述。为了纪念他，能量的国际单位，焦耳 (joule)，以他的名字命名。



詹姆斯·斯科特·焦耳

(© National Bureau of Standards Archives，图片由 AIP Emilio Segre Visual Archives 提供，E. Scott Barr)

3.1 引言

第 2 章主要介绍了元件的电阻，并在最后介绍了欧姆定律。本章将讨论功率和能量（第 1 章介绍过）的计算以及它们与电路之间的联系。

能量是一种物质，可以转换成不同的形式，包括热能、动能、势能和电磁能等，用于表征做功的能力。世界上绝大多数可转换的能量均来自燃烧矿物燃料时所产生的热量。热量再通过转换介质，被转换成机械能或者其他形式的能量，以完成各类任务。功率是能量流产生的速率，或者做功的速率。

在电力行业和电子系统中，都会涉及功率从一点到另一点的传输问题，可以说，功率是此类系统中最重要的物理量。此外，每个商用和家用电器设备，如风扇、马达、电灯、熨斗、电视以及个人电脑等，均有额定功率，用以表明设备运转需要多少功率。超过该额定功率，就有可能造成电子设备的永久性损坏。

本章先对能量和功率进行定义，并说明在给定电路中如何进行计算。之后，将介绍无源符号规则（passive sign convention）以确定功率的符号。接下来，讨论电阻的额定功率或额定瓦数，以及能量—转换设备的效率问题。最后，讨论两个应用：使用瓦特表（wattmeter）测量功率以及使用瓦时计（watt-hour meter）测量能量。

3.2　功率和能量

能量是指做功的能力，而功率是指能量消耗的速率。如 1.7 节所述，功率 P 和能量（或者说做的功）W 之间的关系为

$$\boxed{P=\frac{W}{t}} \tag{3-1}$$

即

$$W=Pt \tag{3-2}$$

其中，t 是时间，单位为秒。功率的单位为瓦特（为了纪念詹姆斯·瓦特）。能量的单位为焦耳（为了纪念詹姆斯·焦耳）。

詹姆斯·瓦特提出采用马力作为机械功率的单位。虽然马力是一个旧的单位，但至今仍在使用。用瓦特（W）作单位的电功率同用马力（hp）作单位的机械功率之间的关系为

$$1\text{hp}=746\text{W} \tag{3-3}$$

即 1hp≈0.75kW。

电力公司根据用户消耗能量的总数进行收费。由于电力公司要处理大量的能量，因此不能用焦耳（或者瓦·秒）作为能量的单位，而是通常采用瓦·时（W·h）或者千瓦·时（kW·h）。由式（3-2），可得

$$\text{能量(W·h)}=\text{功率(W)}\times\text{时间(h)} \tag{3-4}$$

例 3-1 一台电动机 2 分钟传递能量 30kJ，求其功率是多少瓦特？

解：

$$P=\frac{W}{t}=\frac{30\times10^3\text{J}}{2\times60\text{s}}=250\text{W}$$ ◀

练习 3-1　若 5 分钟内消耗能量 600J，试计算其功率。　**答案：** 2W

例 3-2 某 250W 灯泡打开 16 小时，试计算其所消耗的能量（kW·h）。如果电费是 6.5 美分/kW·h，则灯泡运转这段时间要花费多少电费？

解：

$$W=Pt=250\times16=4000(\text{W·h})=4(\text{kW·h})$$

$$\text{花费的电费}=4\times6.5=26(\text{美分})$$ ◀

练习 3-2　若某元件功率为 480W，求其在 8 小时内消耗的能量（kW·h）。如果电费是 8 美分/kW·h，试计算所花费的电费。　**答案：** 3.84kW·h，0.31 美分

3.3　电路功率

在电路中，经常要考虑其功率。式（3-1）可以改写成关于电流 I 和电压 V 的形式：

$$P=\frac{W}{t}=\frac{WQ}{Qt}=VI$$

即

$$\boxed{P = VI} \tag{3-5}$$

如果结合欧姆定律（$V=IR$），也可用其他电路中的物理量来表示式（3-5）。将 $V=IR$ 代入式（3-5），可得

$$P = VI = (IR)I$$

即

$$\boxed{P = I^2R} \tag{3-6}$$

将 $I=V/R$ 代入式（3-5），可得

$$P = VI = V\left(\frac{V}{R}\right)$$

即

$$\boxed{P = \frac{V^2}{R}} \tag{3-7}$$

注意，式（3-5）、式（3-6）和式（3-7）给出的公式即为瓦特定律。在求电阻消耗的功率时，这些公式是等价的。使用哪个公式，取决于已有的数据。4 个物理量 I、V、P 和 R 的关系如图 3-1 所示。在每个四分之一内圆中的项都可由对应的四分之一外圆中的三个公式求得。例如，V 可由 $V=IR$，$V=P/I$ 或 $V=\sqrt{PR}$ 求得。

功率是提供功率还是吸收功率取决于电压的极性和电流的方向。所有提供给电阻的功率都以热的形式被吸收和消耗。

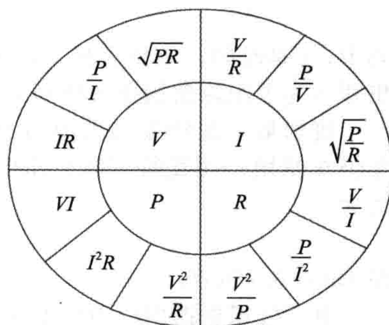


图 3-1 V、I、P 和 R 四个物理量之间的关系

例 3-3 求图 3-2 所示各电路的功率。

解：（a）对图 3-2a 所示电路，有

$$P = VI = 12 \times 3 = 36(\text{W})$$

（b）对图 3-2b 所示电路，有

$$P = \frac{V^2}{R} = \frac{100^2}{8} = 1.25(\text{kW})$$ ◀

练习 3-3 计算图 3-3 中各电路的功率。

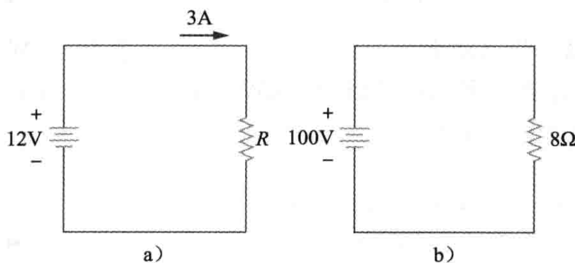


图 3-2 例 3-3 的电路图

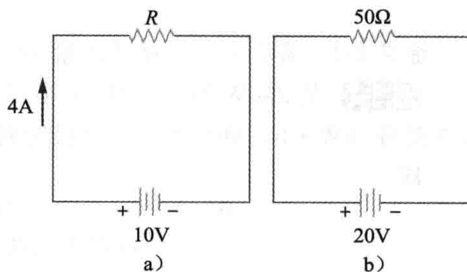


图 3-3 练习 3-3 的电路图

答案：（a）40W （b）8W

例 3-4 试计算在不超过额定值的情况下允许流过某 6kΩ，4W 电阻的最大电流值。

解： 可将式（3-6）重写如下

$$P = I^2R \longrightarrow I = \sqrt{\frac{P}{R}}$$

则最大电流为

$$I=\sqrt{\frac{4}{6\times10^{3}}}=25.82(\text{mA})$$ ◀

练习 3-4 在某电路中，10mA 电流流过 40Ω 电阻，试计算电阻吸收的功率。

答案： 4mW

3.4 功率符号规则

电流方向和电压极性在确定功率符号方面起着重要的作用。因此，要注意如图 3-4 所示电路中电流 I 和电压 V 之间的关系。电压极性和电流方向必须与图 3-4a 所示一致，功率才是正的。这就是无源符号规则。根据无源符号规则，电流要从电压的正极流入。在这种情况下，$P=+VI$ 即 $VI>0$ 表示元件吸收功率。相反，如果 $P=-VI$ 即 $VI<0$，如图 3-4b 所示，则元件就是释放或者提供功率。因此，除非特别说明，无源符号规则将贯穿本书始终。

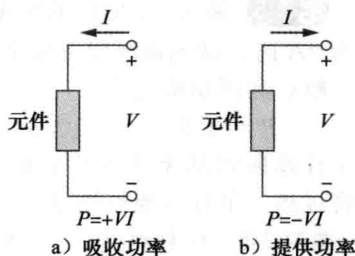


图 3-4 无源符号规则中的功率参考极性

无源符号规则：满足电流从元件的正极进入的条件，则有 $P=+VI$，否则 $P=-VI$。

例如，在图 3-5 所示两个电路中，正电流都从正极流入元件。因此，元件吸收的功率均为 +12W。而相反，在图 3-6 所示两个电路中，鉴于正电流从负极流入，因此元件吸收 12W 功率。这里，吸收 +12W 功率相当于提供 −12W 功率。一般有

$$\text{吸收功率}=-\text{提供功率} \tag{3-8}$$

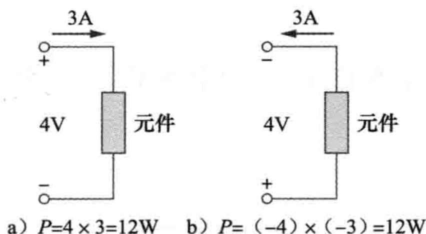


图 3-5 吸收功率为 12W 的两个实例

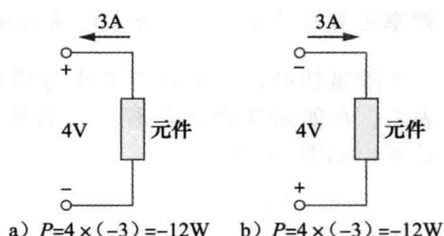


图 3-6 提供功率为 12W 的两个实例

3.5 电阻元件的额定功率

对于电阻除需说明电阻阻值之外，通常还要明确其额定功率[⊖]。因此，电阻可用瓦特来衡量，规定额定功率或额定瓦数。

一个电阻的**额定功率**（power rating）是指它在没有过热或损坏的情况下，所能消耗的最大功率。

电阻要有足够大的额定瓦数或者额定功率，才能消耗通过它的电流所产生的功率，而不至于变得太热。一个电阻元件的额定功率并不由其电阻决定，而是取决于它的实际尺寸。电阻元件的实际尺寸越大，其额定瓦数越高。显然，因为材料表面积越大，就越容易

⊖ 一般来说，电子元件都会给定其额定功率。

大量散热。阻值相同的电阻元件可以有不同的瓦特值。例如，通常碳膜电阻的额定瓦数可以为 1/8W、1/4W、1/2W、1W 和 2W。图 3-7 给出了不同额定瓦数所对应的电阻元件的尺寸。从图 3-7 可以明显看出，大尺寸意味着高额定功率。同时，当所消耗功率小于额定功率时，高瓦数电阻可以工作在更高的温度。当电阻的额定瓦数大于 5W 时，通常使用绕线电阻。绕线电阻的额定功率在 5～200W 之间。

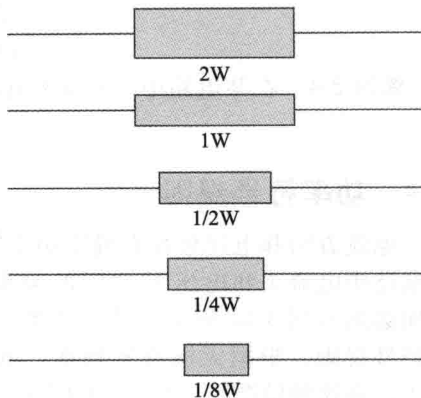


图 3-7 额定功率为 1/8W、1/4W、1/2W、1W 和 2W 金属镀膜电阻

例 3-5 某 0.2Ω 电阻的额定功率为 6W，当电流为 8A 时，试问该电阻是安全的吗？

解： 利用功率公式

$$P = I^2R = 8^2 \times 0.2 = 12.8(\text{W})$$

由于计算所得功率比 6W 的额定功率大，因此电阻将过热，很有可能被烧毁。◀

练习 3-5 计算流过一个 54Ω，4W 电阻器件的最大安全电流。 **答案：** 727mA

3.6 效率

一台设备或者一个电路的效率（efficiency），是指其有效输出与输入的比值。能量守能定律表明能量既不能产生也不能消灭，只能由一种形式转换成另一种形式。例如，通过电阻，可以把电能转换成热能；而通过电动机，可以把电能转换成机械能。在能量转换的过程中，一部分能量将转换成无用的形式，称其为“丢失”的能量，它将降低系统的效率。

效率是有用的输出功率与总的输入功率的比值。

一个能量转换设备能够转换成有用能量的输入能量百分比就是其效率，用希腊字母（η）表示。在能量转换的过程中，会损失部分能量或功率，如图 3-8 所示。

$$\boxed{P_{\text{in}} = P_{\text{out}} + P_{\text{loss}}} \tag{3-9}$$

一个设备或者一个电路的效率是输出功率 P_{out} 与输入功率 P_{in} 的比值。

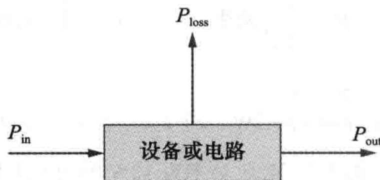


图 3-8 能量转换中失去的能量

效率 η 可用功率或者能量来表示（它总是小于 1 或者小于 100%）。用功率表示，则有

$$\boxed{\eta = \frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}} \times 100\%} \tag{3-10}$$

用能量表示，则有

$$\boxed{\eta = \frac{W_{\text{out}}}{W_{\text{in}}} \times 100\%} \tag{3-11}$$

注意，考虑到 $W = Pt$，因此，式（3-10）和式（3-11）中的两个关系是相同的。

例 3-6 某 110V，15A 电动机的输出功率为 1.8hp，试计算其效率及损失的功率。（1hp＝746W）

解：

$$P_{\text{in}} = VI = 110 \times 15 = 1650(\text{W})$$

$$P_{out} = 1.8 \times 746 = 1342.8(\text{W})$$

$$\eta = \frac{P_{out}}{P_{in}} \times 100\% = \frac{1342.8}{1650} \times 100\% = 81.38\%$$

$$P_{loss} = P_{in} - P_{out} = 1650 - 1342.8 = 307.2(\text{W})$$ ◀

练习 3-6 某电动机的输入功率为 3260W，其有效的输出功率为 2450W。试计算该电动机的效率。 **答案：**75.15%

例 3-7 某电动机输出的机械功率为 20hp，效率为 88%，试计算其输入功率。

解：

$$P_{out} = 20 \times 746 = 14920(\text{W})$$

$$P_{in} = \frac{P_{out}}{\eta} = \frac{14920}{0.88} = 16955(\text{W}) = 16.955(\text{kW})$$ ◀

练习 3-7 某电动机接入 220V 电源，其上流过电流为 8A，效率为 85%，试计算其输出功率及损失的功率。 **答案：**1.496kW，264W

3.7 熔丝、断路器和接地故障断路器

众所周知，电阻 R 所消耗的功率与电流的平方成正比，即有 $P=I^2R$。如果电流增加两倍，则会使功率增加四倍。而功率的增加将导致电阻元件温度的增加。同样，建筑物内的导线可能会过热甚至点燃建筑材料，使其冒烟甚至引起火灾。因此，需要一些保护装置，在过电流时保护电路，确保流过线路的电流不超过额定值。

熔丝（fuse）是一种当电流超过额定值时可以自动切断电流的电路器件。

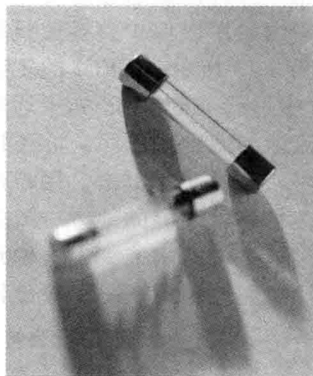


图 3-9 电器熔丝
（© Steve Cole/Getty RF）

熔丝可保护家中或车里的某些电气或者电子设备。图 3-9 给出了一些电器熔丝。在功率骤增的情况下，熔丝将“烧断”，使得额外电流不能到达器件。一个好的熔丝近似为短路状态，在欧姆表上的读数为 0Ω，或零点几欧姆。而烧断的熔丝，相当于开路，在欧姆表上的读数为无穷大。图 3-10 给出了熔丝对电路进行保护的过程。在电路正常运行期间，如图 3-10a 所示，通过熔丝的电流正常，不会使它烧断。当如图 3-10b 所示的负载短路时，通过熔丝的高电流使其烧断或者熔化。因此，没有电流通过负载，负载得以保护，如图 3-10c 所示。熔丝根据所能承受的电流值进行分类。熔丝里的导线元件越细，其额定电流越小。例如，汽车熔丝的额定电流一般为 10～30A。

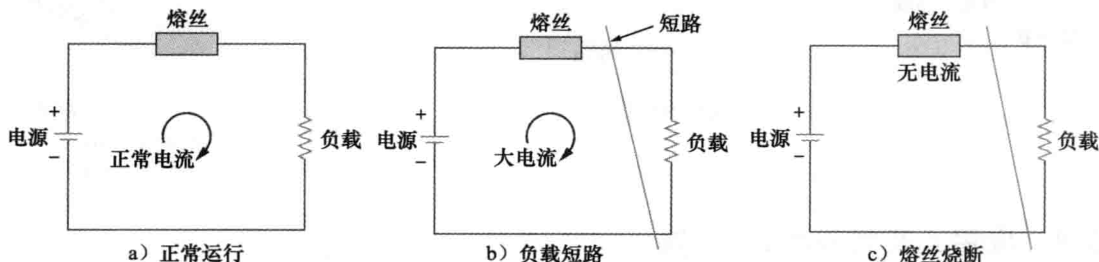


图 3-10 采用熔丝保护负载的过程

近几年，家用熔丝已经由断路器（circuit breaker）所取代。同熔丝一样，当断路器上通过的电流达到预定值时，断路器将断开电路。熔丝和断路器的主要差别在于：当一个熔丝烧断或者熔化时，要对引起熔丝烧断的电路故障进行解决，并换上另一个相同额定值的熔丝。而当断路器断开之后，可以被简单重置，然后再次使用。每个家电配电箱都包含若干个断路器，如图 3-11 所示。断路器有一个弹簧，当电流超过断路器的额定值时，弹簧遇热膨胀，将电路断开。当断路器断开之后，推动其开关，可以重新启动。还有一种自动断路器，在其冷却之后可以自己重新启动。

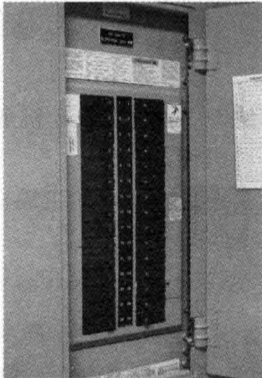


图 3-11　配电箱中的断路器（© Tetra Images/Getty RF）

接地故障断路器（又称为断路开关，ground fault circuit interrupter，GFCI）是一种快速的断路器类型装置，当出现对地电气泄漏时，会切断与其相联接的电路。

电气接地是一种常见的电流返回途径，是一种直接对地的物理连接方式。如图 3-12 所示，安全起见，每一个电气装置都要接地。接地故障断路器（GFCI）通过监测地线故障的潜在危险并快速切断电路电源来保护人们的安全。熔丝和断路器是在电路过载时对装置或者电路进行保护，不能保护遭受电击的人。而 GFCI，可以保护遭受电击或者触电的人。在建造时间较短的房子里，如厨房、浴室、洗衣房、车库和外部出口这些遭受电击危险性最大的地方可以找到 GFCI。有时 GFCI 安装在主开关箱内，用以保护整幢建筑免受地线故障的影响。GFCI 有许多类型，其中一种典型类型如图 3-13 所示。GFCI 的工作原理是比较进入电路的电流量（黑线）和流出电路的电流量（中性线或红线）。如果通过红线流入的电流比通过中性线离开的电流要多，就说明存在电流泄漏或地线故障。GFCI 能够探测至少 5mA 的泄漏，可以在 0.025s（25ms）内关闭电路，有效防止电击。用户应该认真考虑，在所有可能存在地面危险的电路上安装 GFCI。在每一处潮湿的地方，或者人员容易受伤的地方都应提供 GFCI 保护。当人同地面接触，包括站在有水或者潮湿的地方时，如果同某一装置的红线或者黑线接触时，很有可能在不经意间就形成了一个对地回路。

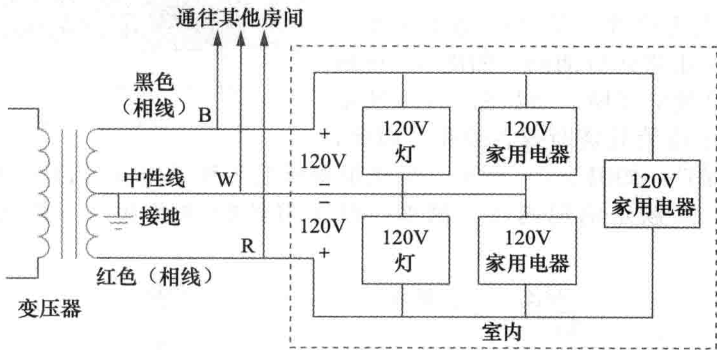


图 3-12　三线室内配线

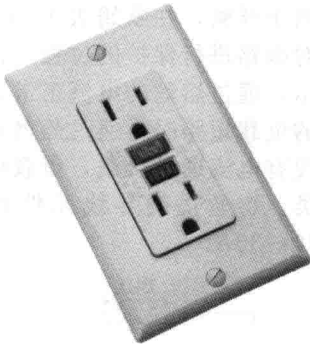


图 3-13　一个典型的接地故障断路器（© TRBfoto/Getty RF）

3.8　应用：瓦特表和瓦-时表

本节将讨论两个重要的应用：美国公用事业公司如何测量功率以及如何测量能量？

3.8.1　瓦特表

电功率用瓦特表来测量，如图3-14所示。瓦特表主要由两个线圈构成：电流线圈和电压线圈。鉴于功率的定义是电流和电压的乘积，因此设计测量功率的仪表，必须要考虑电压和电流。通常，瓦特表通过动力仪表表头的运动，即使用电压和电流线圈去移动指针。如图3-15所示，顶部（水平方向）线圈用来测量负载电流，而底部（垂直）线圈用来测量负载电压。瓦特表是通过电流线圈和电压线圈的励磁绕组来予以驱动的。无论什么时候（在驱动可动线圈时），作用在可动线圈上的力与线路上电流和电压的瞬时值的乘积都成正比。虽然有数字瓦特表，但目前广泛使用的大部分瓦特表还是模拟的。目前，考虑到节约能源的重要性，已经开始出现了小型的数字瓦特表，使用时将插头插入壁装电源插座，然后将想要测量的装置插进瓦特表即可。

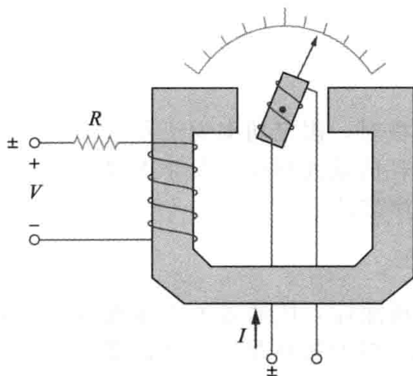


图3-14　模拟瓦特表

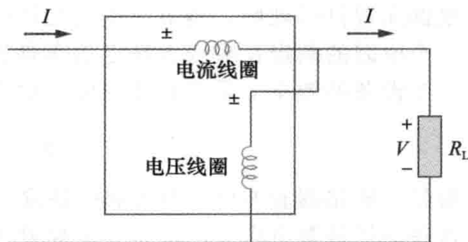


图3-15　将瓦特表接到负载

3.8.2　瓦-时表

瓦-时表是测量能量的仪器。因为能量是功率和时间的乘积，所以瓦-时表必须考虑功率和时间两个因素。该表的设计原理是测量电气系统所累计的千瓦·时。它由一个电动机和一个寄存器组成：电动机的转矩与流过它的电流成正比，而寄存器则用于计算电动机的转数。图3-16给出了一个典型的瓦-时表，从图中可以看出，该表具有5个刻度盘。在最右边的刻度盘上，指针的每一个刻度都显示1kW·h（或1000瓦·时）。该刻度盘上的指针旋转一周，则第二个盘上的指针移动一个刻度，显示为10kW·h。第二个刻度盘上的指针旋转一周，则第三个盘上的指针移动一个刻度，指示为100kW·h，以此类推。公共事业公司根据瓦-时表以前和现在的读数差收取电费。许多更现代的瓦-时表都带有数字显示。



图3-16　典型的瓦-时表
（© Comstock Images/Jupiterimages RF）

在更加先进的通信系统时代，已开始采用智能仪表来显示功率消耗。一般来说，新型仪表相对于传统仪表，可以显示更为详细的功率消耗（如计时电价）。同时，为了更好地监测和计费，信息还可通过专网传回公共事业公司。智能仪表是一种可以在能量被使用时，捕捉和传递能量使用信息的通信系统，并使用户更好地跟踪其能量使用情况。

3.9 本章小结

1）功率是消耗能量的速率。

$$P = \frac{W}{t}$$

2）电阻吸收的功率是

$$P = VI$$

或者

$$P = I^2R$$

或者

$$P = \frac{V^2}{R}$$

3）马力（hp）是单位，且一直沿用至今。

$$1\text{hp} = 746\text{W}$$

4）根据无源符号规则，当电流进入元件端电压的正极时，假定功率为正号。

5）一个电阻的额定瓦数或者额定功率是指电阻能消耗的最大功率，而非正常工作功率。

6）一个设备的效率 η 是其有效的输出功率和输入功率之比。

$$\eta = \frac{P_{out}}{P_{in}} \times 100\%$$

7）熔丝、断路器和 GFCI 均为保护装置。当电路出现故障，使通过的电流超过预定值时，这些保护装置可以专门用来使电路处于开路状态。熔丝和断路器只保护器件，而 GFCI 还可以保护用户。

8）功率用瓦特表测量，而能量用瓦-时表测量。

复习题

1 下列哪个量被定义成能量的速率？
(a) 热量 (b) 电压
(c) 电流 (d) 功率

2 电阻的功率是电压和电流的乘积。
(a) 对 (b) 错

3 某电暖气从 110V 电源吸取 2A 电流，则该电暖气吸收功率为：
(a) 220W (b) 55V
(c) 27.5W (d) 18.18mW

4 1 马力近似等于 0.75kW。
(a) 对 (b) 错

5 下列哪个不是能量的单位？
(a) 焦耳 (b) 瓦特
(c) 瓦特-秒 (d) 千瓦-时

6 当电流通过电阻流动时，电能被转换成热能。
(a) 对 (b) 错

7 60W 灯泡 10 小时消耗的能量为：
(a) 6J (b) 600J
(c) 0.6kW·h (d) 6kW·h

8 某指定电动机，输入功率为 3hp，机械输出为 2hp，下列哪个是该电动机的效率？
(a) 33.33% (b) 50%
(c) 66.67% (d) 120%

9 可能达到 120%的效率。
(a) 对 (b) 错

10 测量电能的仪器是：
(a) 电压表 (b) 能量表
(c) 瓦特表 (d) 瓦-时表

答案：1 (d)，2 (a)，3 (a)，4 (a)，5 (b)，6 (a)，7 (c)，8 (c)，9 (b)，10 (d)

习题

3.2 节

1 2 小时消耗能量 2600J，试计算消耗的功率。

2 某设备 8 分钟吸收能量 560J，求该设备消耗的功率。

3 如果某电阻消耗功率为 7W，试计算其消耗 280J 能量所用的时间。

4　某收音机功率为 40W，试计算当电费为 8 美分/kW·h 时，该收音机正常运行 5 小时所花费的电费。

5　某 420W 电器运行 6 天，试计算消耗了多少 kW·h。

6　某 120W 的电烙铁需要多长时间消耗 1.5kJ 的能量？

7　将下列能量转换成千瓦·时。

(a) 220W，56s　　(b) 180W，2h

(c) 40000W，4h

8　某指定电动机向负载传送 4.2hp，试计算这是多少瓦特？

9　某电阻连接到 8V 电源上，流过电流为 4A。求电阻消耗 600J 能量要花多少时间。

10　某 3kW 房间取暖器与 120V 电源相连，求取暖器的电阻。

11　某 110V 电视，额定功率为 185W，求其额定电流。

12　某 12V 电池，充电 6h，额定电流是 2A。试计算所消耗的能量。

13　一个 65W 的电烙铁，流过电流为 0.56A，试计算其工作电压。

14　试完成下表。

R (Ω)	**V** (V)	**I** (A)	**P** (W)
—	120	0.04	—
60	—	—	0.8
—	24	—	2.2
42	—	0.1	—

15　某电池提供电流 2.4A 持续 36h，试计算其安培-小时值。

16　某 40W 的收音机，需要多长时间才能使用 0.2kW·h 的能量？

17　某 120V 的渗滤加热器的电阻在加热状态时为 4Ω。求 (a) 元件的电流，(b) 元件消耗的功率，(c) 如果所有消耗的电能都转换成热，试计算该热能量（单位为英热 (Btu)/min）。假设 1W＝0.0569Btu/min。

18　某吸尘器，用 120W 电压工作。如果其额定电流是 5A，试计算其消耗的功率。

19　某个电气设计师要设计一个 30A 的熔丝。当其能量消耗大于 30J 时，熔丝会在 3s 内熔断。试计算熔断熔丝所需功率。

20　一个切片面包机的电阻为 12Ω。如果面包机连接到 120V 的插座上 1 分钟，试求提供给面包机的能量是多少。

21　一个电动机额定在 1/4hp。如果电动机由 120V 电源驱动，试计算提供给电动机的电流是多少。

3.3 节

22　10Ω 电阻两端的电压降为 12mV。试计算电阻吸收的功率。

23　试计算图 3-17 中提供给每个电阻的功率。

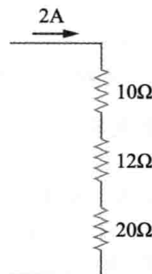


图 3-17　习题 23 的电路图

24　求图 3-18 中各个电阻的吸收功率。

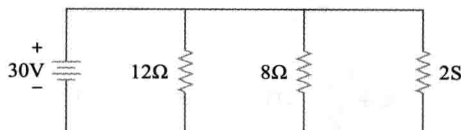


图 3-18　习题 24 的电路图

25　如果 50kΩ 电阻消耗的功率是 400mV，试计算通过电阻的电流及其端电压。

26　某暖气的阴极射线管的额定电压和电流分别为 8.2V 和 0.8A。试计算能量转换成热量的额定值。

27　某 30Ω 暖气在 100V 电源下工作 4h，求使用的能量。

28　试求图 3-19 所示电路在 2h 内消耗的能量。

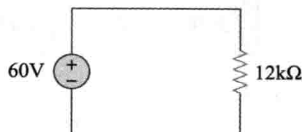


图 3-19　习题 28 的电路图

29　在某电路中，将电压加倍，而电阻减少到其原始值的一半，则所消耗的功率如何变化？

30　试计算图 3-20 所示电路中，提供给电阻 R_1 和 R_2 的功率。

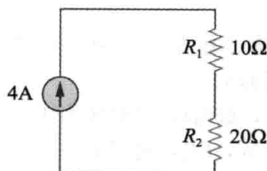


图 3-20　习题 30 的电路图

31 试计算图3-21所示电路中，提供给电阻 R_1 和 R_2 的功率。

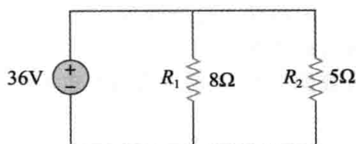


图 3-21 习题31的电路图

32 对下列每一个电压和电阻的组合，试求其功率。

(a) $V=12V$，$R=3.3k\Omega$

(b) $V=8.8V$，$R=150\Omega$

(c) $V=120V$，$R=820\Omega$

3.4 节

33 试计算图3-22中每一个元件的功率。

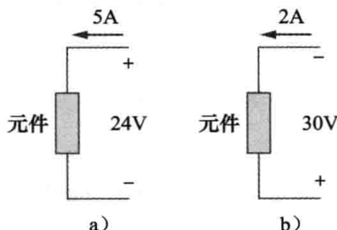


图 3-22 习题33的电路图

34 图3-23中每个元件可能是负载亦可能是电源。对每个元件求功率并说明它是提供功率还是吸收功率。

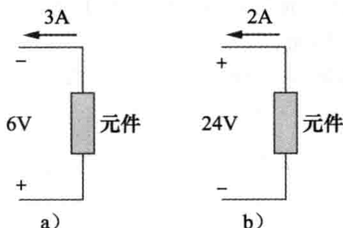


图 3-23 习题34的电路图

3.5 节

35 1W的电阻元件，其电阻为2kΩ。试计算其能够安全使用的最大电流。

36 某8kΩ，1/4W的电阻元件，加50V电压安全吗?

37 求下列哪个电阻（如果有的话）可能由于过热而损坏。

(a) 1W，850Ω，端电压为110V

(b) 1/2W，8Ω，通过的电流为1mA

(c) 10W，2Ω，通过它的电流为4A

38 某5mA的电流通过一个电阻元件产生60V的电压降，试计算电阻元件的最小额定功率。

39 求5.6kΩ，2W的电阻元件的最大安全电压。

40 如果一个0.3Ω的电阻元件，其额定功率为8W，试计算当其流过15A电流时是否安全。

41 某空气调节器额定功率为1.5kW，每天运行10小时。如果电价为0.085美元/kW·h，试计算该空气调节器运行30天所花费的电费。

3.6 节

42 某功率放大器提供给扬声器的功率为260W，而损失的功率为320W。试计算该系统的效率。

43 当汽车发动机工作时，可从12V电源吸取70A电流。如果发动机额定功率为1.2hp，试计算其效率。

44 某发动机输入为500W，输出为0.6hp，试计算其效率。

45 某立体声系统，当其输入为200W时，电压是100V，电流为3.2A。试计算其效率和损失的功率。

46 某系统工作效率为92%。如果损失12kW，试计算 P_{in} 和 P_{out}。

47 某电动机的效率为84%。如果从电源获取1.6kW，试计算以马力为单位的机械输出。

48 某系统由两个相同的器件串联组成。如果每个器件工作的效率为70%，输入能量为40J，试计算输出能量。

49 某电灯泡对75W的输入提供10W的有用输出，试求其效率。

50 某电动机提供机械能为2hp，效率为85%。电动机从220V电源吸取电流是多少。

51 某广播电台效率为60%，24h/天传送32kW。如果电费为8美分/kW·h，试求该广播电台一天所花费的电费。

52 某5hp电动机在7天内的20%的时间都在运行，且具有80%的效率。如果电费是6美分/kW·h，试计算使用者所花费的电费。

53 某电动机输入功率为800W，输出功率为0.6hp。试计算其效率。假定1hp=746W。

54 某70W的灯泡，其中60W用于点亮，另10W以热的形式消耗掉。试计算该灯泡的效率。

55 某电动机输入为30kJ时，提供机械输出为24kJ。(a) 计算电动机的效率。(b) 计算

电动机未能转换成有用输出的能量。(c)考虑其损失能量以什么形式输出。

56 某台5hp的电动机，工作效率为82%。如果输入电流是8.2A，试计算输入电压。输入功率是多少?

57 某200V的直流电动机，吸收电流为15A，提供的输出功率为2.1hp。(a)求电动机的效率。(b)试计算损失的功率。

58 两个串联的传感器提供40mV的输出功率。如果第一个传感器的效率是80%，第二个传感器的效率是95%，试计算输入功率。

59 某120V的直流电源，与一台电动机相连时，供出电流为20A，提供的输出功率为1.5hp。假定1hp=746W，求:(a)电动机的输入功率 P_{in}；(b)电动机的输出功率 P_{out}；(c)电动机的效率；(d)电动机损失功率；(e)如果所有的损失都转换成了热能，试求电动机消耗的热功率(Btu/min)。(1W=0.0569Btu/min)

3.8节

60 假设有两片面包，1200W烤面包机花了1分钟30秒将这两片面包烤熟。如果一条面包有20片，电价是0.08美元/kW·h，试计算烤整条面包所用费用。

第4章

串联电路

愚蠢的人从来不会宽恕和忘记；天真的人既会宽恕又会忘记；聪明的人会宽恕但不会忘记。

——托马斯·萨斯

历史人物

古斯塔夫·罗伯特·基尔霍夫（1824—1887），德国物理学家，在电路分析基础、光谱学、热物质的黑体辐射等领域做出了突出贡献。



古斯塔夫·罗伯特·基尔霍夫
（© Pixtal/age Fotostock RF）

基尔霍夫出生在东普鲁士柯尼斯堡的一个律师家庭。18岁就读于柯尼斯堡大学，毕业后在柏林担任讲师。他与德国化学家罗伯特·本生（Robert Bunsen）在光谱学方面合作，发现了元素铯（1860年）和元素铷（1861年）。1847年，基尔霍夫就电网络中的电流和电压关系提出了电路理论两大基本定律。基尔霍夫定律连同欧姆定律奠定了电路理论的基础。此外他还提出了基尔霍夫辐射定律。因此，基尔霍夫在工程界、化学界和物理界都是著名人物。

4.1 引言

前一章讨论的电路主要局限于电路中只有一个电阻的情况。从本章开始将分析电路中含有多个电阻的情况。电阻电路既可以通过串联方式连接也可以通过并联方式连接。图4-1给出了一个串联电路的简单示例。本章主要讨论如何分析串联电路，下一章介绍并联电路相关内容，有关非串联或并联电路将在后续章节中介绍。

本章首先介绍电路中的一些基本概念，如节点、支路、回路、串联和并联等，然后介绍什么是串联电路。接下来介绍基尔霍夫电压定律，它和欧姆定律在电路分析中非常常用。本章还将讨论串联电压源，分压电路，串联电路的功率，学习如何使用PSpice和Multisim分析串联电路。本章最后介绍串联电路的两种简单应用：电阻限流电路和电气照明系统。

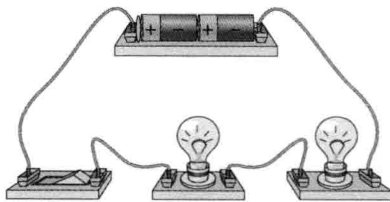


图4-1　串联电路示例：两只灯泡与一个调光器串联

4.2 节点、支路和回路

电路中有两种类型的元件：**无源**（passive）元件和**有源**（active）元件。有源元件能够产生能量，无源元件不能产生能量。电阻、电容和电感等都是无源元件，发电机、电池和运算放大器等都是典型的有源元件。

电路中各元件的连接方式可以有多种，所以需要了解一些网络拓扑结构方面的基本概念。**网络拓扑结构**（network topology）是指元件的位置与网络的几何布局等特征属性。这些属性包括支路、节点和回路等。

一条支路代表一个两端元件。图 4-2 所示电路中有 5 条支路，即一条 10V 电池支路和四条电阻支路。

一条支路表示网络中的单个元件，如电压源或电阻等。

在本书中，节点通常标示为电路中的点。如果一条短路导线（如连接线）连接两个节点，则两个节点合并为一个单节点。图 4-2 所示电路中有三个节点 a、b 和 c。请注意，节点 b 的三个点由导线连接，因此构成一个单节点。节点 c 的四个点也是同样的道理。重绘图 4-2 所示电路，可得到图 4-3，不难发现该电路只有三个节点。图 4-2 和图 4-3 所示电路完全相同，但图 4-2 所示电路中将节点 b 和 c 用理想导线散开连接的表示方式更为清晰。

两条或两条以上支路的连接点称为**节点**。

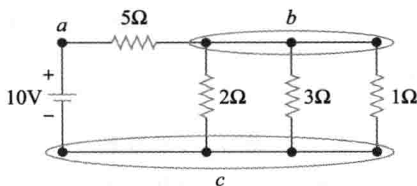


图 4-2　节点、支路和回路

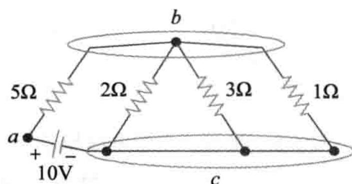


图 4-3　重新绘制图 4-2 电路中的三个节点

如图 4-3 所示，连接 2Ω 电阻的闭合路径 $abca$ 是一个回路。另一条闭合回路 bcb 包含一个 3Ω 和一个 1Ω 电阻。图 4-3 所示电路中共有 6 条回路，其中独立回路只有三条。独立回路中至少有一条支路是不属于其他独立回路的。由独立回路或路径可构造独立方程组。

电路中的任一闭合路径称为**回路**。

网络拓扑结构的基本定理指出：若一个网络有 b 条支路、n 个节点和 l 条独立回路，则有：

$$\boxed{b = l + n - 1} \tag{4-1}$$

如下面两个概念所展示的，电路拓扑对分析电路中的电压电流关系有很大的帮助。

两个或多个元件**串联**：各元件级联或依次相连，并且流经各元件的电流相同。

两个或多个元件**并联**：各元件连接到相同的两个节点上，并且各元件两端的电压相同。

当各元件以链状方式连接，或依次首尾相连，则称它们是串联。例如，两个元件如果有一个公共节点，并且没有其他元件连接到该节点上，则称为两个元件串联。并联方式指的是各元件连接在同一对节点之间。元件可以既不是串联，也不是并联。以图 4-2 所示的电路为例：电池与 5Ω 电阻是串联的，因为流经它们的电流相同；而 2Ω 电阻、3Ω 电阻和 1Ω 电阻是并联的，因为它们都连接到相同的两个节点（b 和 c）上，它们都有相同的电压；而 5Ω 电阻和 2Ω 电阻既不是串联也不是并联。

例 4-1　确定图 4-4 中电路的支路数和节点数。找出哪些元件是串联的，哪些元件是并联的。

解： 电路中有四个元件，共有四条支路，即 5Ω 电阻、6Ω 电阻、10V 电源和 12V 电

源。如图 4-5 所示，该电路中有三个节点。5Ω 电阻和 10V 电压源串联，流经它们的电流相同；6Ω 电阻与 12V 电压源并联，因为它们都连接到节点 2 和节点 3 之间。

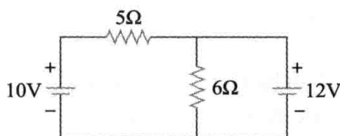


图 4-4 例 4-1 的电路原理图

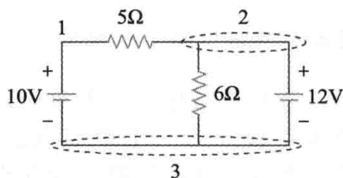


图 4-5 图 4-4 所示电路中的三个节点

练习 4-1 如图 4-6 所示电路，共有多少条支路和多少个节点？找出电路中串联和并联的元件。

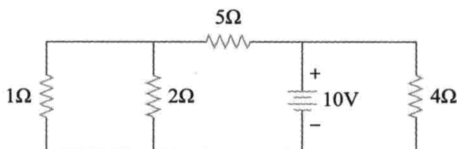


图 4-6 练习 4-1 的电路原理图

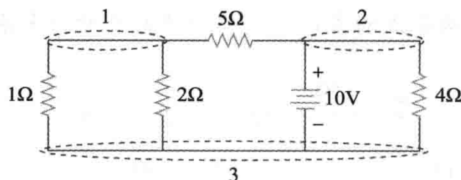


图 4-7 练习 4-1 的答案

答案： 如图 4-7 所示，电路中共有 5 条支路和 3 个节点。1Ω 和 2Ω 电阻是并联的，4Ω 电阻和 10V 电压源也是并联的

4.3 电阻的串联

电阻的串联（或并联）在电路经常出现，因此需要格外注意。图 4-8 中所示为面包板上串联的电阻。如果两个或两个以上的电阻依次首尾连接，则这种连接方式称为串联。串联电路中只有一条路径，因此流经各电阻的电流相同。图 4-9 所示电路是典型的串联电路。

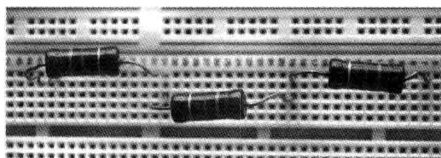


图 4-8 面包板上连接的串联电阻
（© Sarhan M. Musa）

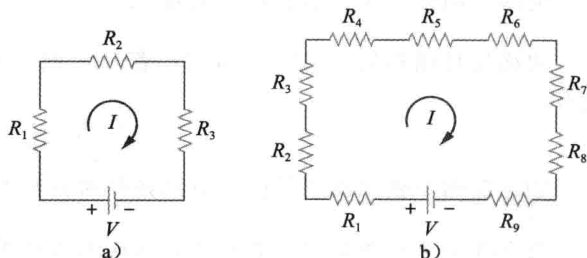


图 4-9 串联电路示例

串联电路中电阻顺序连接，且具有相同的电流。

图 4-9a 所示电路中，总电阻 $R_T=R_1+R_2+R_3$。图 4-9b 所示电路中，总电阻 $R_T=R_1+R_2+R_3+\cdots+R_9$。一般情况下，

任意多个电阻串联的等效电阻值等于各个电阻值的总和。

若串联电路中连接 N 个电阻，则总电阻为

$$\boxed{R_T=R_1+R_2+R_3+\cdots+R_N} \tag{4-2}$$

因为流经各电阻的电流 I 相同，利用欧姆定律可以计算各电阻的电压和吸收的功率。

$$V_1 = IR_1, \quad P_1 = IV_1 = I^2R_1$$
$$V_2 = IR_2, \quad P_2 = IV_2 = I^2R_2$$
$$\vdots \qquad (4\text{-}3)$$
$$V_N = IR_N, \quad P_N = IV_N = I^2R_N$$

这表明串联电路中各电阻的电压取决于其阻值。而串联电路总功率，可通过下式计算：

$$P_T = P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_N = I^2(R_1 + R_2 + R_3 + \cdots + R_N) = I^2R_T \qquad (4\text{-}4)$$

例 4-2 如图 4-10 所示电路。计算：

(a) 总电阻；

(b) 电流 I；

(c) 电阻 R_1、R_2 和 R_3 的电压；

(d) 电阻 R_1、R_2 和 R_3 吸收的功率；

(e) 电源提供的总功率。

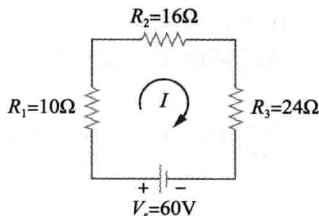


图 4-10 例 4-2 的电路原理图

解： (a) 总电阻为

$$R_T = R_1 + R_2 + R_3 = 10 + 16 + 24 = 50(\Omega)$$

(b) 利用欧姆定律，得

$$I = \frac{V_s}{R_T} = \frac{60}{50} = 1.2(\text{A})$$

(c) 各电阻的电压为

$$V_1 = IR_1 = 1.2 \times 10 = 12(\text{V})$$
$$V_2 = IR_2 = 1.2 \times 16 = 19.2(\text{V})$$
$$V_3 = IR_3 = 1.2 \times 24 = 28.8(\text{V})$$

由此可得，三个电阻按照各自阻值的比例分配电源电压。

(d) 各电阻吸收的功率为

$$P_1 = IV_1 = 1.2 \times 12 = 14.4(\text{W})$$
$$P_2 = IV_2 = 1.2 \times 19.2 = 23.04(\text{W})$$
$$P_3 = IV_3 = 1.2 \times 28.8 = 34.56(\text{W})$$

电阻吸收总功率为

$$P_T = P_1 + P_2 + P_3 = 14.4 + 23.04 + 34.56 = 72(\text{W})$$

(e) 电源提供的总功率为

$$P_d = V_sI = 60 \times 1.2 = 72(\text{W})$$

与电阻吸收的总功率相等。 ◀

练习 4-2 分析图 4-11 中所示的串联电路。试计算：

(a) 总电阻；

(b) 电流 I；

(c) 电阻 R_1、R_2、R_3、R_4 的电压；

(d) 电阻 R_1、R_2、R_3、R_4 吸收的功率；

(e) 电源提供的总功率。

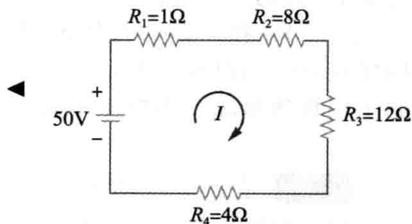


图 4-11 练习 4-2 的电路原理图

答案： (a) 25 (b) 2A (c) 2V，16V，24V，8V (d) 4W，32W，48W，16W (e) 100W

4.4 基尔霍夫电压定律

仅应用欧姆定律还不够分析各种电路。但如果将欧姆定律与基尔霍夫定律结合在一

起，就可以分析各种各样的电路。基尔霍夫定律由德国物理学家古斯塔夫·罗伯特·基尔霍夫于1847年首次提出，它包括两个定律：基尔霍夫电压定律（KVL）、基尔霍夫电流定律（KCL）。本章介绍基尔霍夫电压定律，基尔霍夫电流定律将在下章介绍。

基尔霍夫电压定律（KVL）：环绕任一闭合路径（或回路）的电压代数和为零。

基尔霍夫电压定律的基础是电路的能量守恒原理。（注：电势或电压是指单位电荷通过某个元件所需的能量。）能量守恒定律表示沿回路电势差的代数和为零。

若一条回路或闭合路径有 N 个电压，则 KVL 的数学表达式为

$$V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_N = 0 \tag{4-5}$$

若用符号 $\sum$ 表示求和，则 KVL 的表达式为

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} V_i = 0} \tag{4-6}$$

式中，N 表示回路中的电压个数，V_i 表示第 i 个电压。

下面用图4-12所示的电路来说明 KVL。图中电压的符号取决于环绕回路时先遇到的端点的极性。（注：图2-6描述了电阻的电流方向和电压极性的关系）环绕回路的起点可以是任一支路，环绕的方向可以是顺时针，也可以是逆时针[⊖]。

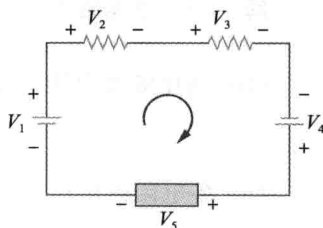


图4-12 说明 KVL 的单回路电路

假设从电压源 V_1 开始，顺时针绕回路一周，那么电压依次是 $-V_1$，$+V_2$，$+V_3$，$-V_4$ 和 $+V_5$。例如，环绕到支路3，先遇到正端，所以支路3的电压是 $+V_3$；而对支路4，先遇到的是负端，所以是 $-V_4$。按 KVL，有：

$$-V_1 + V_2 + V_3 - V_4 + V_5 = 0 \tag{4-7}$$

重写上式得：

$$V_2 + V_3 + V_5 = V_1 + V_4 \tag{4-8}$$

式（4-8）可以认为是：

$$\sum \text{电压降} = \sum \text{电压升} \tag{4-9}$$

这是 KVL 的另一种表示形式，若从 V_1 开始按逆时针方向环绕回路，则得到 $+V_1$，$-V_5$，$+V_4$，$-V_3$ 和 $-V_2$，与顺时针方向所得到的电压符号相反，而式（4-7）和式（4-8）同样成立。同时要注意，若一个元件绕回路先遇到负端再遇正端，则电压上升；而先遇到正端再遇负端，则电压下降。一般有源元件的电压是上升的，无源元件的电压是下降的。

例 4-3 求图4-13所示电路中的电压 V_x。

解：按箭头所示绕回路一周，应用基尔霍夫电压定律得：

$$-24 + V_x + 30 = 0$$

即

$$V_x = 24 - 30 = -6(\text{V})$$

◀

练习 4-3 试求图4-14所示电路中的电压 V_x。

⊖ KVL 适用于两种环绕回路的方式：顺时针方向或逆时针方向。不管哪种方向，其电压的代数和都为零。

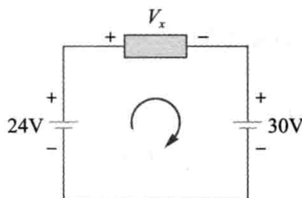


图 4-13　例 4-3 的电路原理图

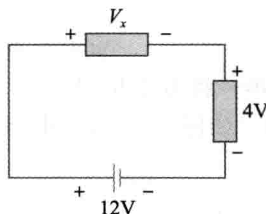


图 4-14　练习 4-3 的电路原理图

答案：8V

例 4-4　求图 4-15 所示电路中的电压 V_1 和 V_2。

解：为了求 V_1 和 V_2，需要用到欧姆定律和基尔霍夫电压定律。假设流过回路的电流 I 流动方向如图 4-15 所示。

根据欧姆定律

$$V_1 = 2I, \quad V_2 = -3I \tag{4-4-1}$$

在回路中用 KVL 计算，有

$$-20 + V_1 - V_2 = 0 \tag{4-4-2}$$

将式（4-4-1）代入式（4-4-2）得

$$-20 + 2I + 3I = 0$$

即

$$5I = 20 \longrightarrow I = \frac{20}{5} = 4(\text{A})$$

将 I 值代入式（4-4-1），最后得到

$$V_1 = 2I = 8(\text{V}), \quad V_2 = -3I = -12(\text{V})$$

事实上，电压 V_2 的极性为负表明它的极性与图 4-15 中的方向相反。也就是说，若图 4-15 中的箭头先遇到电阻正端，则 $V_2 = 12\text{V}$。◀

练习 4-4　试计算图 4-16 所示电路中电压 V_1 和 V_2。

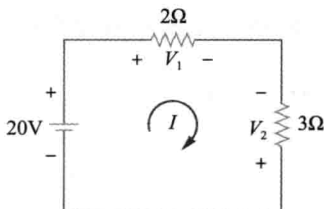


图 4-15　例 4-4 的电路原理图

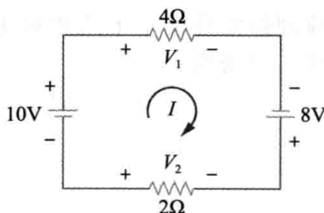


图 4-16　练习 4-4 的电路原理图

答案：12V；−6V

例 4-5　利用基尔霍夫电压定律，试计算图 4-17 中所示电路的电流 I。

解：此题有两种求解方法。

■ **方法一**：串联电路中的总电阻为

$$R_T = 30 + 20 + 40 = 90(\Omega)$$

使用欧姆定律，有

$$I = \frac{V_s}{R_T} = \frac{60}{90} = 0.667(\text{A})$$

■ **方法二**：对回路应用 KVL 有

$$-60 + 30I + 20I + 40I = 0$$

即

$$90I = 60 \quad 即 \quad I = 60/90 = 0.667(A)$$

所得结果与第一种方法相同。◀

练习 4-5 如图 4-18 所示电路，利用 KVL 求解电流 I。

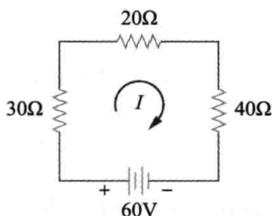


图 4-17 例 4-5 的电路原理图

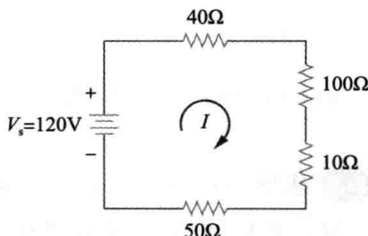


图 4-18 练习 4-5 的电路原理图

答案： 0.6A

4.5 串联电压源

利用 KVL 可以处理两种重要问题：串联电压源和分压问题。本节介绍串联电压源，分压将在下一节介绍。根据 KVL，串联电压源的等效电压是各个电压源电压的代数和。例如图 4-19a 所示的几个电压源，用 KVL 可以得到其等效电压源，如图 4-19b 所示。

$$-V_{ab} + V_1 + V_2 - V_3 = 0 \tag{4-10a}$$

或

$$V_{ab} = V_1 + V_2 - V_3 \tag{4-10b}$$

如图 4-19a 所示电路是理论上的情况，而实际上电压源的反向连接（如电池）将产生反向作用。有些元件如二极管或 LED（发光二极管）对电路的作用效果与电源反向连接类似。

4.6 分压电路

分压原理经常应用于电阻串联电路中。现计算图 4-20 所示电路中各电阻的电压。利用欧姆定律，可得到：

$$V_1 = IR_1, \quad V_2 = IR_2, \quad \cdots, \quad V_n = IR_n \tag{4-11}$$

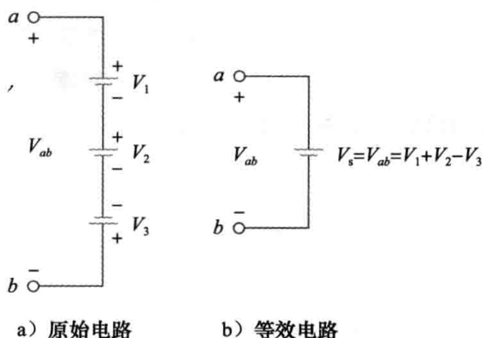


图 4-19 串联电压源

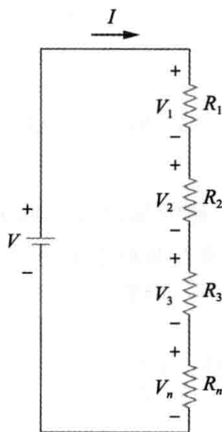


图 4-20 一般分压电路

因为电阻串联，则总阻值即等效阻值为

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \cdots + R_n \tag{4-12}$$

流过电阻的电流 I 为

$$I = \frac{V}{R_{eq}} \tag{4-13}$$

将式（4-13）代入式（4-11）得：

$$V_1 = \left(\frac{R_1}{R_{eq}}\right)V,\quad V_2 = \left(\frac{R_2}{R_{eq}}\right)V,\quad \cdots,\quad V_n = \left(\frac{R_n}{R_{eq}}\right)V \tag{4-14}$$

其中 R_n 表示电路中第 N 个电阻，R_{eq} 为串联电路的总阻值，V 表示串联电阻两端的总电压。式（4-14）表示电压 V 被串联电阻分压情况，分压后各个电阻上的电压与其电阻成正比，电阻越大，电阻上的压降就越大，这叫作*分压原理*（voltage divider rule，VDR），而图 4-20 所示电路称为*分压电路*（voltage divider）。

在分压电路中，各电阻分得的电压与其阻值成正比。

接下来分析电路中只有两个电阻串联的情况，电路图如 4-21 所示。其等效电阻为

$$R_{eq} = R_1 + R_2 \tag{4-15}$$

与式（4-14）联立，得：

$$\boxed{V_1 = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2}\right)V,\quad V_2 = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right)V} \tag{4-16}$$

分压原理适用于两个电阻的电流相同的情况。分压原理可以扩展到多个电阻的情况。特别指出电位器可以作为可调分压器使用，详见 2.6 节。

例 4-6 如图 4-22 所示电路，求各电阻的电压值。

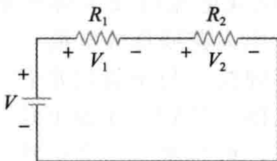


图 4-21　两电阻分压

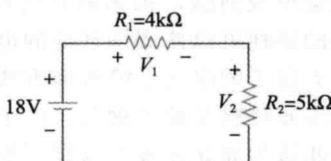


图 4-22　例 4-6 的电路原理图

解：图中仅有两个电阻，由式（4-16）得

$$V_1 = \frac{R_1}{R_{eq}}V = \frac{4}{9} \times 18 = 8(\text{V})$$

$$V_2 = \frac{R_2}{R_{eq}}V = \frac{5}{9} \times 18 = 10(\text{V})$$

V_1 与 V_2 加起来为 18V，与电源电压相同。◀

练习 4-6　利用分压原理求图 4-23 所示电路中 V_1 和 V_2。　**答案**：V_1＝60V；V_2＝40V

例 4-7 利用分压原理，求图 4-24 所示电路中 V_1、V_2 和 V_3。

解：根据题意，由式（4-14），得：R_{eq}＝10＋12＋8＝30Ω，由此

$$V_1 = \frac{R_1}{R_{eq}}V = \frac{10}{30} \times 60 = 20(\text{V})$$

$$V_2 = \frac{R_2}{R_{eq}}V = \frac{12}{30} \times 60 = 24(\text{V})$$

$$V_3 = \frac{R_3}{R_{eq}}V = \frac{8}{30} \times 60 = 16(\text{V})$$

◀

练习 4-7　求图 4-25 所示电路中 V_1、V_2 和 V_3。

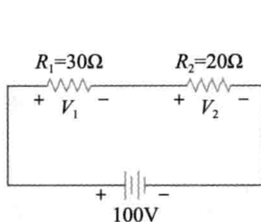


图 4-23　练习 4-6 的电路原理图

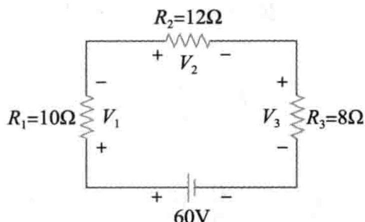


图 4-24　例 4-7 的电路原理图

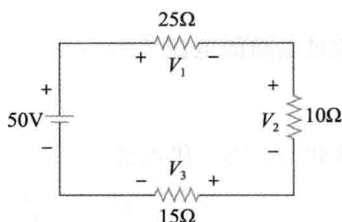


图 4-25　练习 4-7 的电路原理图

答案： $V_1=25V$；$V_2=10V$；$V_3=15V$

4.7　接地

和测量距离类似，测量电势（电压）也需要设置参考点。最常用的参考点是陆地，或者更具体地说，是与所在建筑物相连的地面。参考电势设定为 0V，通常称为**地点**(ground)。电气设备与地相连的情况称为**接地**（grounded 或 earthed）。一般而言，建筑电气布线的一端都会与一根深埋于地下的金属棒相连，以确保良好的接地性。

接地是指通过电线与大地连接。

正确的接地对电气设备的安全使用至关重要（无线电话或手机是例外）。许多设备（如显微镜）都是悬浮接地。设想木桌上有一部没有接地的电气设备，木桌是绝缘体。假设设备损坏，将导致设备表面积累电荷。人体是导体（尽管导电效果很差），因为与地板、墙壁等等接触，其电势可以粗略地记为零。由于人与设备之间存在电势差，若人接触或接近设备就会形成回路，积累的电流将流过人体。大的电压或电流将使人体受到伤害或致命。正确的接地可以使周围环境的电势相同，也就不会产生火花或意外电流了。

许多老房子的电气系统接地方法都是将厚铜地线（即焊线）与主要供水管连接。当时供水管的主要材料是镀锌钢板，由于它是一种优良的导电体，且管道在地下延长相当长的距离，因此认为如此连接可以保证整个电气系统接地良好。但当水管年久生锈，最终需要更换时，一些水暖工把主要的注意力都放在了恶化的水暖设备上，很少关注电气系统的情况。这就产生了问题，因为许多的供水管被换为 PVC（聚氯乙烯）塑料管，而塑料无法导电，也就是说接地系统被破坏了。

接地是一个参考点，其电压值为 0V，电路中的其他点都以接地作为参考电势点。它通常有三种表示形式，如图 4-26 所示。图 4-26c 所示符号被称为屏蔽地，也叫**机壳**(chassis) 地，一般在外壳作为电路接地端时采用这种表示方式。当地作为参考电势时，接地用图 4-26a 或 b 所示符号表示，其中图 4-26b 所示表示方式使用比较普遍。如图 4-27 所示电路，120V 插座的圆形插口表示接地端，作为电路电压的参考点。虽然电路是否接地其工作方式都相同，但接地可以确保安全。

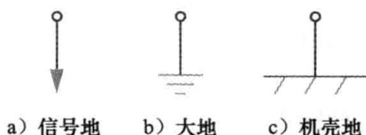


图 4-26　接地符号

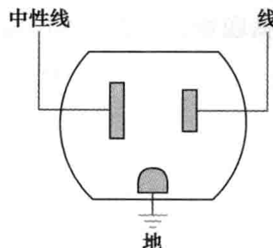


图 4-27　120V 插座的接地端

4.8 计算机辅助分析

这节将介绍两种计算机软件，一种是 Cadence 公司的 PSpice，一种是美国国家仪器（NI）有限公司推出的 Multisim。这是两种非常实用的电路仿真软件，还可以用于分析电路设计最终方案。附录 C 为 PSpice 的简明教程，附录 D 为 Multisim 的简明教程。这两种软件功能基本相同。

4.8.1 PSpice

PSpice 是一种用于电路分析的计算机软件，本书中将逐步为读者介绍它的使用方法。本节示范如何在 Windows 操作系统下使用 PSpice 来分析直流电路问题。在进入下述例之前，读者应该先复习 C.1 节到 C.3 节。还要注意，PSpice 只有在所有电路元件值都已知的条件下，才能给出各支路的电压和电流值。

例 4-8 利用 PSpice 计算图 4-28 所示电路中各节点电压和电流 I。

解： 首先，用 Schematics 画出给定电路。按 C.2 节和 C.3 节所给出的指令，画出如图 4-29 的电路图，因为是对电路作直流分析，所以选用 VDC 标志表示电压源。将完成电路存入名为 exam48.dsn 文件中，选择 PSpice/New Simulation Profile 仿真电路。弹出 New Simulation 对话框，输入名字为 exam48，单击 Create，弹出 Simulation Settings 对话框。这个对话框在瞬态分析和交流分析中起到很大的作用，由于当前进行直流电路分析，因此可直接单击 OK 按钮。然后选择 PSpice/Run。电路仿真运行，部分输出的结果如图 4-29 所示，其他结果输出到输出文件中。选择 PSpice/View Output File 可以查看输出文件，输出文件有下列内容：

```
NODE      VOLTAGE  NODE      VOLTAGE  NODE      VOLTAGE
(N00127)  30.0000  (N00131)  50.0000  (N00135)  100.0000

VOLTAGE SOURCE CURRENTS

NAME      CURRENT
V_V1      -2.000E+00
```

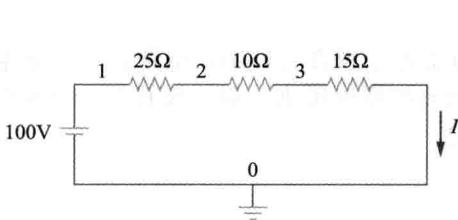


图 4-28 例 4-8 的电路原理图

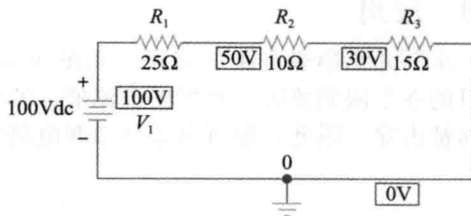


图 4-29 例 4-8 的图；图 4-28 的电路图

得到 $V_1=100\text{V}$，$V_2=50\text{V}$，$V_3=30\text{V}$。电压源电流为 -2A，即 $I=2\text{A}$。注意，V_2 表示节点 N00131 与地之间电压，而不是 R_2 的电压。V_3 也如此。◀

练习 4-8 如图 4-30 所示电路，利用 PSpice 求各点电压。

答案： $V_1=40\text{V}$；$V_2=24\text{V}$；$V_3=14\text{V}$

4.8.2 Multisim

虽然 Multisim 与 PSpice 相似，但并不完全相同，所以分开学习。附录 D 是 Multisim 的简明教程。在进入下述例之前，读者应该先复习附录 D，重点学习 D.1 节和 D.2 节。

例 4-9 使用 Multisim，计算图 4-31 所示电路中的 V_o 和 I_o。

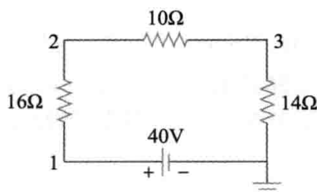


图 4-30 练习 4-8 的电路原理图

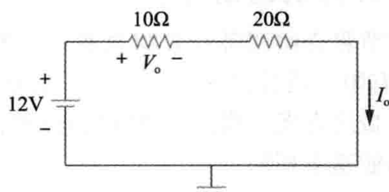


图 4-31 例 4-9 的电路原理图

解： 按 D. 2 节给出的指令画出电路图，结果如图 4-32 所示。用电压表测量 V_o 的值，用电流表测量 I_o 的值。注意电压表要与 10Ω 电阻并联，电流表要与电阻串联，仿真时需要将电路接地。按下开关或选择 Simulate/Run 进行电路仿真。电压表和电流表的读数如图 4-32 所示，为

$$V_o = 4\text{V}, \quad I_o = 0.4\text{A}$$

◀

练习 4-9 应用 Multisim，求图 4-33 所示电路中 V_x 和 I_x。

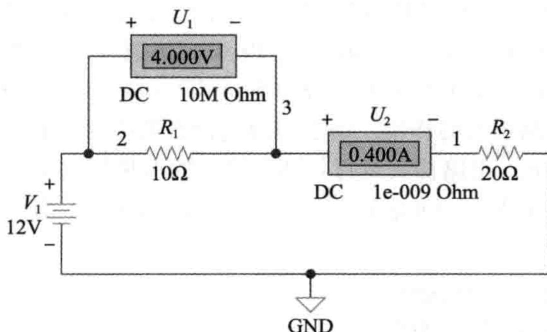


图 4-32 图 4-31 的 Multisim 仿真电路图

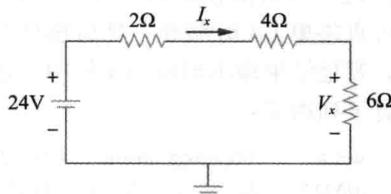


图 4-33 练习 4-9 的电路原理图

答案： 12V；2A

4.9 应用

本节介绍串联电路的应用。如图 4-34 所示的发光二极管（LED）电路。设计该电路的目的在于限制流过二极管的电流值。若电路中没有串联电阻 R，则二极管将会因电流过大而被击穿。因此，限流电路是串联电路的应用之一。

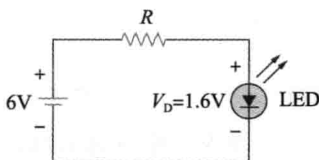


图 4-34 电阻串联限流电路

另一个例子是照明系统，如家庭照明或圣诞树上的灯泡。它总是由 N 个灯泡组成，这些灯串联或并联（下一章介绍），如图 4-35 所示，其中的每一个灯的模型可视为电阻。假设所有的灯相同，V_0 是电源电压，则串联灯泡每个灯两端的电压为 V_0/N。串联连接容易实现，但实际上很少用。这是因为：第一，它的可靠性差，只要一个灯坏了，其他灯泡全都不亮；第二，维修困难，一个灯泡坏了，必须逐个地检查所有的灯泡才能找到坏的那个。不过，现在圣诞灯仍用串联形式，以避免单个灯泡电压为 120V。

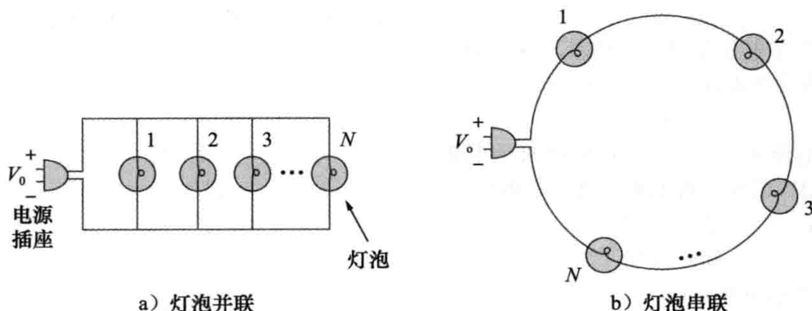


图 4-35 灯泡的并联和串联

例 4-10 如图 4-34 所示电路，若二极管电流为 12mA，求 R。

解：对回路使用基尔霍夫电压定律，得：

$$-6 + IR + 1.6 = 0$$

因此，

$$R = \frac{6-1.6}{I} = \frac{4.4}{12\times 10^{-3}} = 366.7(\Omega)$$ ◀

练习 4-10 如图 4-34 所示电路中电阻为 270Ω，求二极管电流。 **答案**：16.3mA

4.10 本章小结

1）支路是电路中的单个二端元素，两个及两个以上支路的连接点称为节点，电路中的闭合路径称为回路。网络中的支路数 b，节点数 n 和独立回路数 l 满足如下关系：

$$b = l + n - 1$$

2）头尾依次连接的两个元件称为串联。流过串联元件的电流相同。

3）串联电路中总电阻的等价阻值为各电阻值的总和，即：

$$R_T = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots + R_N$$

4）基尔霍夫电压定律（KVL）是：环绕一个闭合路径的电压代数和为零。或者说，电压升高之和等于电压下降之和。

5）若电压源串联在电路中，则总电压值是各个电压值的代数和。

6）在分压电路中，各电阻根据其阻值大小进行分压。例如两电阻串联电路，其分压关系是：

$$V_1 = \left(\frac{R_1}{R_1+R_2}\right)V,\quad V_2 = \left(\frac{R_2}{R_1+R_2}\right)V$$

7）接地是指与大地连接，为 0V 电压提供一个参考点。

8）PSpice 和 Multisim 是计算机程序包，本章中用于分析串联电路。

9）介绍了串联电路的两种简单应用：电阻限流电路和电气照明系统。

复习题

1 一个网络有 12 条支路，8 条独立回路，问该网络有几个节点？
(a) 19　(b) 17
(c) 5　(d) 4

2 串联电路中所有电阻共有的电路变量是：
(a) 功率　(b) 能量
(c) 电压　(d) 电流

3 串联电路中共有 4 个电阻，其阻值分别为 40Ω、50Ω、120Ω、160Ω。则总阻值为：
(a) 90Ω　(b) 280Ω
(c) 370Ω　(d) 740Ω

4 若串联电路中的电流为零，则有一个或多个元件开路。
(a) 正确　(b) 错误

5 在串联电路中，可以改变电阻的位置，而不影响电流或总电阻。

(a) 正确 (b) 错误

6 根据基尔霍夫电压定律（KVL），电路中压降的代数和等于电源电压的代数和。
(a) 正确 (b) 错误

7 已知串联电路由一个 10V 电池和两个电阻（12Ω 和 8Ω）组成。则电路中电流是多少？
(a) 1.25A (b) 0.5A
(c) 2A (d) 200A

8 如图 4-36 所示电路，则 V_x 为：
(a) 30V (b) 14V
(c) 10V (d) 6V

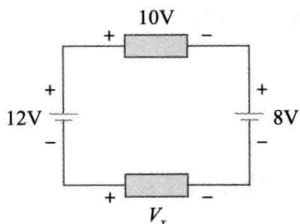


图 4-36 复习题 8 的电路原理图

9 如图 4-37 所示电路，则端电压 V_{ab} 为：
(a) 9V (b) 7V
(c) 6V (d) 2V

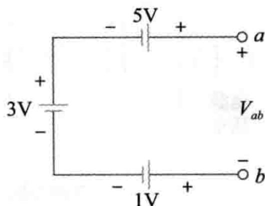


图 4-37 复习题 9 的电路原理图

10 串联电路中有三个电阻（12kΩ，20kΩ，50kΩ），则电压最小的电阻为：
(a) 12kΩ
(b) 20kΩ
(c) 50kΩ
(d) 根据已知条件无法确定

答案：1 (c)，2 (d)，3 (c)，4 (a)，5 (a)，6 (a)，7 (b)，8 (d)，9 (b)，10 (a)

习题

4.2 节

1 求图 4-38 所示电路的节点数、支路数和回路数。

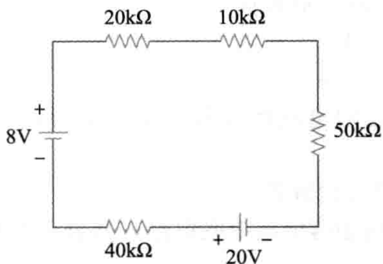


图 4-38 习题 1 的电路原理图

2 如图 4-39 所示电路图，确定其节点数、支路数和回路数。

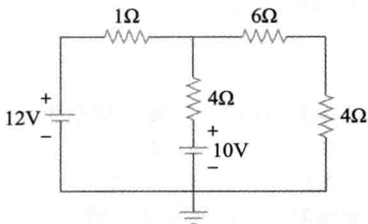


图 4-39 习题 2 和习题 48 的电路原理图

3 如图 4-40 所示网络图（其中每条线代表一个元件），求其节点数，支路数和回路数。

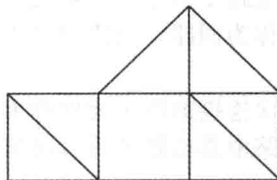


图 4-40 习题 3 的电路原理图

4.3 节

4 已知 $R_1=5.6\text{k}\Omega$，$R_2=47\text{k}\Omega$，$R_3=22\text{k}\Omega$，$R_4=12\text{k}\Omega$，求电阻串联时的总阻值。

5 求图 4-41 所示电路的总阻值。

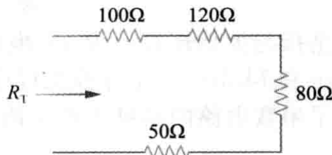


图 4-41 习题 5 的电路原理图

6 计算图 4-42 所示电路中的电阻 R_{ab}。

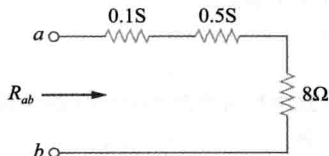


图 4-42 习题 6 的电路原理图

7　计算图 4-43 所示电路中的电阻 R_T。

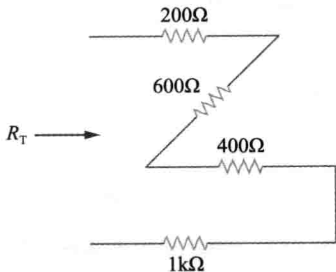


图 4-43　习题 7 的电路原理图

8　四个电阻如图 4-44 所示联接，计算其总阻值。

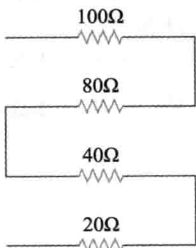


图 4-44　习题 8 的电路原理图

9　五个 47kΩ 电阻串联在电路中，则总阻值是多少？

10　计算下面每组串联电阻的等价阻值。

(a) 120Ω 和 560Ω

(b) 22kΩ、60kΩ 和 34kΩ

(c) 450kΩ、1.2MΩ、960kΩ 和 2.5MΩ

11　若以下电阻串联，则求总阻值。

2.4MΩ　480kΩ　56kΩ　4.2MΩ

12　一电阻与 80Ω 电阻串联在电路中，接 110V 电压源，80Ω 电阻消耗功率为 20W，求电阻阻值。

13　求图 4-45 所示电路图中 R_1 和 R_2 的阻值。

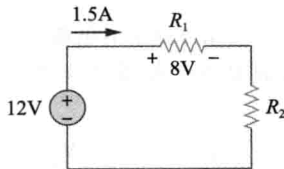


图 4-45　习题 13 的电路原理图

14　3 个电阻 R_1、R_2 和 R_3 与 120V 电压源串联。通过 R_1 和 R_2 后电压下降 90V，而通过 R_2 和 R_3 电压下降 80V。若电路中总电阻为 12Ω，求各电阻阻值。

15　* 如图 4-46 所示电路，已知 $V_s = 120V$，$R_1 = 8\Omega$，$P_2 = 400W$。计算 R_2 的值。

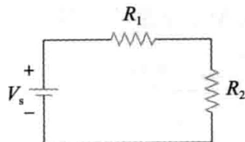


图 4-46　习题 15 的电路原理图

16　3 个电阻 R_1、R_2 和 R_3 与 42V 电压源串联。R_1 的电压为 10V，R_2 的电流为 2A，R_3 的功率为 40W。求各电阻的阻值。

17　4 个电阻 $R_1 = 80\Omega$，$R_2 = 120\Omega$，$R_3 = 160\Omega$，$R_4 = 40\Omega$ 与 6V 电池串联。求流过电阻的电流。

4.4 节

18　求图 4-47 所示电路的电流 I。

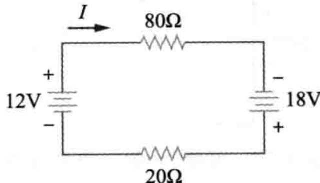


图 4-47　习题 18 的电路原理图

19　计算图 4-48 所示电路中的电流 I_x，并求各电阻吸收的功率。

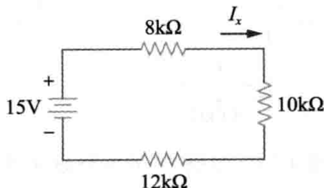


图 4-48　习题 19 的电路原理图

20　利用基尔霍夫电压定律，计算图 4-49 中电路的电流 I。

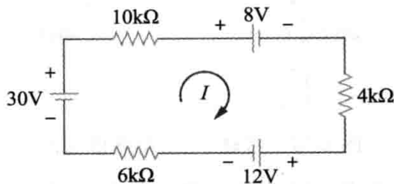


图 4-49　习题 20 的电路原理图

21　求图 4-50 所示电路中的电压 V_x。

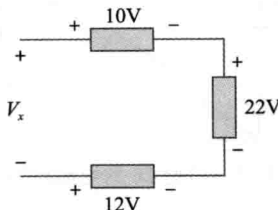


图 4-50　习题 21 的电路原理图

22 求图 4-51 所示电路的电阻 R_x。

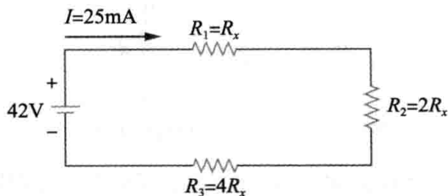


图 4-51 习题 22 的电路原理图

23 如图 4-52 所示电路，计算电压 V 和电阻 R 的值。

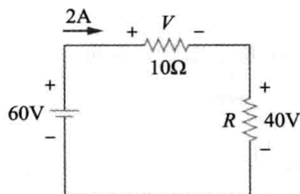


图 4-52 习题 23 的电路原理图

24 求图 4-53 所示电路中的电压 V_x 和电流 I_x。

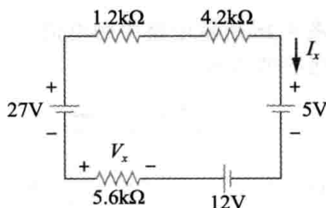


图 4-53 习题 24 的电路原理图

25 求图 4-54 所示电路中的电压 V 和电流 I。

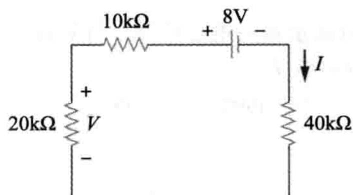


图 4-54 习题 25 的电路原理图

26 计算图 4-55 所示电路的电压 V_1 和 V_2。

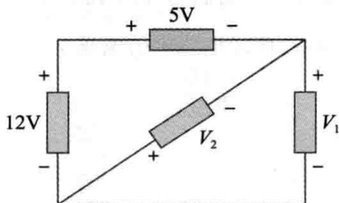


图 4-55 习题 26 的电路原理图

27 计算图 4-56 所示电路的电流 I_x。

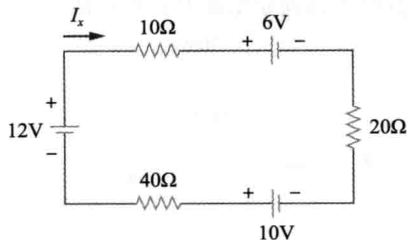


图 4-56 习题 27 的电路原理图

28 串联电路中元件电压值分别为 12V，16V，24V 和 32V。

(a) 电源电压 V_s 是多少？

(b) 包括电压源在内，绕回路一周的电压代数和是多少？

29 求图 4-57 所示电路中的电流 I 和电压 V_{ab}。

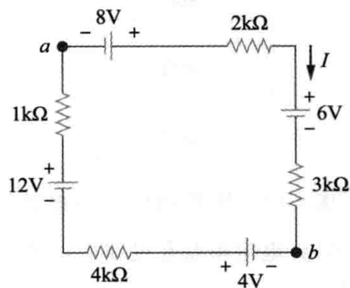


图 4-57 习题 29 的电路原理图

30 求图 4-58 所示电路中的电流 I 和电压 V_{ab}。

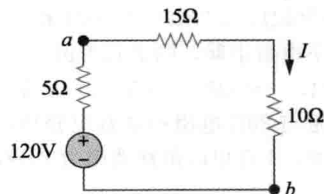


图 4-58 习题 30 的电路原理图

31 求图 4-59 所示电路中的电流 I。计算 x 和 y 两点间的电压，并指出 x 和 y 哪点的电势高？

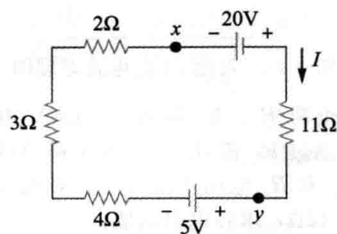


图 4-59 习题 31 的电路原理图

32 如图4-60所示电路，计算两点间的电势差：

(a) x 和 y；

(b) x 和 z。

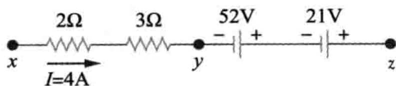


图4-60 习题32的电路原理图

4.5节

33 计算图4-61所示电路中的电压 V_{ab}。

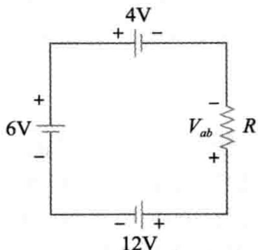


图4-61 习题33的电路原理图

34 手电筒上装了四节1.2V电池，其中一个方向装反。求灯泡两端电压是多少？

35 几节1.5V电池串联可以产生12V的电压？

36 计算图4-62所示电路中的电流 I。

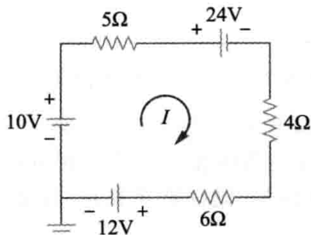


图4-62 习题36和习题50的电路原理图

37 化简图4-63所示电路，使其变为单一电源与电阻串联的形式，并计算电路中电流。

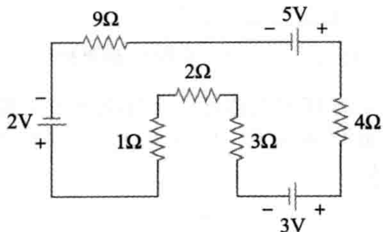


图4-63 习题37的电路原理图

4.6节

38 如图4-64所示电路，计算 a 和 b 两点间的电压。

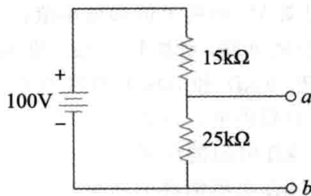


图4-64 习题38和习题51的电路原理图

39 如图4-65所示电路，计算电压 V_{ab}。

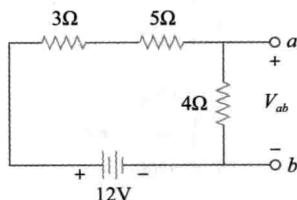


图4-65 习题39和习题53的电路原理图

40 利用分压原理，计算图4-66所示电路中各电阻的电压。

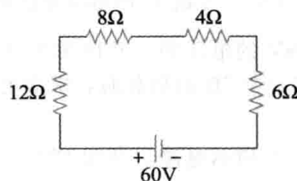


图4-66 习题40的电路原理图

41 已知分压电路由电阻 R_1，R_2 和12V电池组成。其中 $R_1=5.6\text{k}\Omega$ 且其电压为4.5V，则计算 R_2 的值。

42 如图4-67所示电路，若 $V_s=24\text{V}$，$R_s=100\Omega$，且 $V_L=V_s/2$，则求 R_L。在此条件下，R_L 和 R_s 各消耗多少功率？

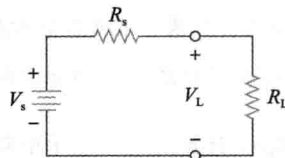


图4-67 习题42的电路原理图

43 如图4-68所示电路，R_2 是5kΩ的电位器（可变电阻）。

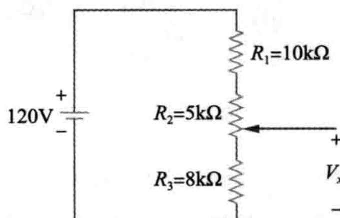


图4-68 习题43的电路原理图

(a) 计算 V_x 的最大值和最小值；

(b) 若 R_3 短路，计算 V_x 的最大值和最小值。

44 两电阻 30kΩ 和 50kΩ 串联在电路中，由 120V 电源供电。计算：

(a) 30kΩ 电阻的压降；

(b) 50kΩ 电阻消耗的功率。

45 计算图 4-69 所示电路中 A 点电压。

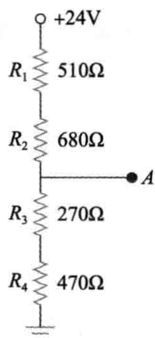


图 4-69 习题 45 的电路原理图

46 一个 28V 的电压源，其内阻为 250mΩ。当其外接一个 7Ω 的负载时，求端电压。

4.8 节

47 如图 4-70 所示电路，利用 PSpice 计算电压 V_1，V_2 和 V_3。

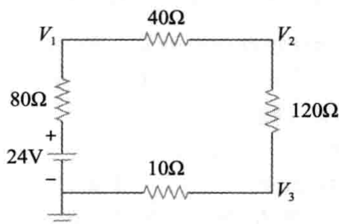


图 4-70 习题 47 的电路原理图

48 利用 PSpice 计算图 4-39 所示电路中各电阻的电压。

49 利用 PSpice 计算图 4-71 所示电路中点电压 V_1 和 V_2。

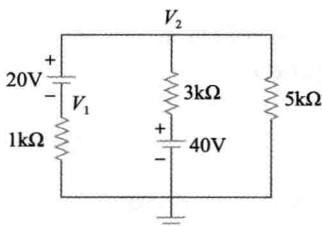


图 4-71 习题 49 的电路原理图

50 利用 PSpice 计算图 4-62 所示电路中电流 I。

51 利用 Multisim 计算图 4-64 所示电路中电压 V_{ab}。

52 如图 4-72 所示电路，利用 Multisim 计算电流 I_o 和各电阻的电压。

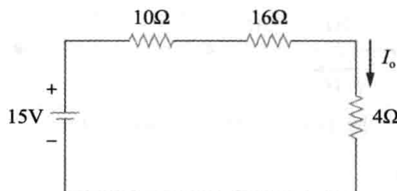


图 4-72 习题 52 的电路原理图

53 如图 4-65 所示电路，利用 Multisim 计算电压 V_{ab}。

4.9 节

54 圣诞树上的灯由 10 个 8W 的灯串联。若将其接到 120V 电源上，计算每个灯的电阻。

55 三个灯泡与 100V 的电源串联，如图 4-73 所示。计算电路中电流 I。

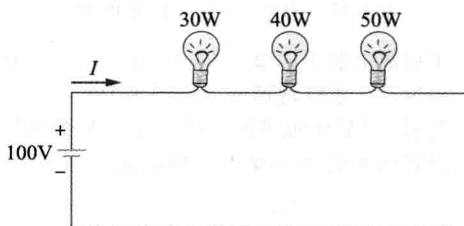


图 4-73 习题 55 的电路原理图

56 图 4-74 所示电路中，电位器（可变电阻）R_x 用于调节电流 I_x 的值，使其电流范围为 1A 到 10A，则计算 R 和 R_x 的阻值。

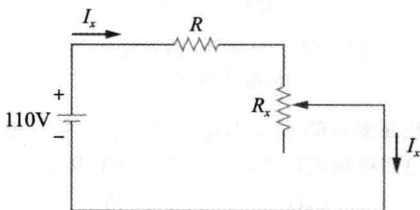


图 4-74 习题 56 的电路原理图

57 图 4-75 所示电路是一个光电太阳能板模型。已知 $V_s = 30V$，$R_1 = 20Ω$，$I = 1A$，求 R_L 的值。

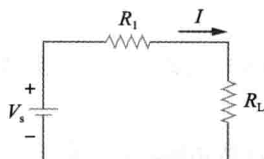


图 4-75 习题 57 的电路原理图

58 计算图4-76所示电路中电阻 R 的值，假设LED电压为1.6V，电阻将电路电流限制为2mA。

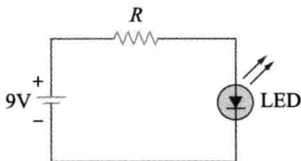


图4-76 习题58的电路原理图

59 如图4-77所示电路，计算不同切换位置时电流表测得的电流值。

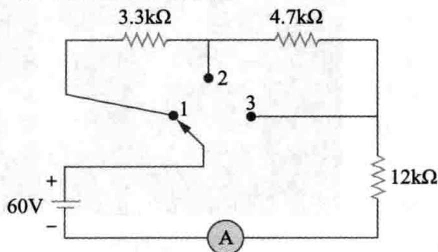


图4-77 习题59的电路原理图

60 3个0.7A的灯串联在电路中，且每个灯的电压为120V。计算：

(a) 总电流；

(b) 总电压；

(c) 消耗的总功率。

61 圣诞树上的灯由8个灯串联组成。若每个灯额定电压为14V，额定电流为0.2A，则计算：

(a) 总电流；

(b) 总电压；

(c) 消耗总功率。

62 有3个12V电池与一个2Ω负载串联在电路中，假设电池的内阻分别为1Ω，2Ω和3Ω，则计算：

(a) 负载电流；

(b) 负载电压；

(c) 负载消耗的功率；

(d) 电池提供的功率。

63 图4-78所示电路由一个电阻为11.7Ω的灯泡和一节内阻 $R_i=0.3\Omega$ 的电池串联组成。求：

(a) 电池供电电流；

(b) 内阻 R_i 的压降；

(c) 电池的端电压；

(d) 电池内部消耗的功率；

(e) 负载传递的功率；

(f) 电池的效率。

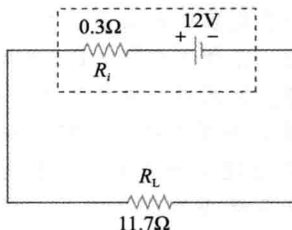


图4-78 习题63的电路原理图

64 一支手电筒需要两节电池，每节电池的开路电压为3V，内阻为0.2Ω。计算：

(a) 在无负载情况下，电池总的端电压；

(b) 总内阻；

(c) 短路时，流过电池的电流。

第5章

并联电路

学会从正反两面解释一个问题。

——亚伯拉罕·林肯

增长您的阅历

提问



学生在计算机课上提问

(© Photodisc/Getty RF)

过去30年的教学过程中，我一直努力寻找有助于学生学习的方法。无论学生学习某门课程的时间多少，最有效的学习方法是学习如何在课堂上提问题，然后提出问题(网络课堂同样可以提问)。学生通过提问会积极参与到学习中去，不再仅仅被动接收信息。积极参与有助于学习，也是未来教育发展的最重要方面。实际上，提问是科学与技术的基础。正如查尔斯·P·斯坦梅茨所说："只要一个人还没有停止问问题，他就还不是真正的傻瓜。"

提问看起来很直接又非常简单，但或许有人终生也没有提过问题。以正确的方式提问可以使学习过程中的思考和准备更有效。

提高学习效率有许多方法，我将与大家分享我的秘诀。一定要记住你不必非要提一个完美的问题。固有的提问回答模式很容易会局限你提问题的思维。我总告诉学生，欢迎他们在课堂上随时提出问题。

在提问时，你有三点需要注意：第一，问题的准备。或许你同许多害羞的同学一样，或许你没有在课程上提过问题，那你最好提前在课外准备好你的问题。第二，在适当的时间提问。例如，在讨论电路效率的课堂上就不适合提关于断路的问题。第三，明确你的问题。用不同的方式解释你的问题，使问题不会重复。

最后一个建议：虽然教授们会说他们喜欢学生在课堂上提问，可实际上却不一定。你应该做出正确判断。这是成为一名技师的重要技能，希望有所提高。

5.1 引言

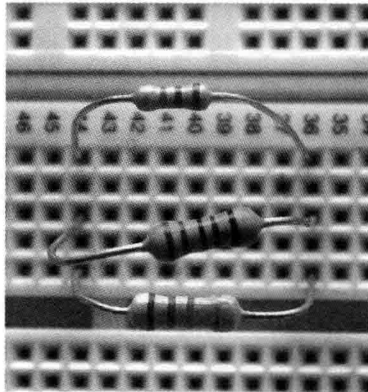


图5-1 电阻并联在面包板上

(© Sarhan M. Musa)

上一章介绍了串联电路和如何应用基尔霍夫电压定律(KVL)分析电路的知识。而这一章的主要内容是学习并联电路和基尔霍夫电流定律(KCL)及其应用。复杂电路可以由串联或并联电路连接组成，而有些电路中只有并联结构。图5-1给出了并联电路的一个简单的示例。在生活中，许多汽车配件是并联的。一般家用电器布线也都是并联电路，这样就不会因为关掉电视而使电灯也被关掉。

这一章主要研究并联电路的特性。并联电路有许多性质与串联电路既相似，又对立。应用基尔霍夫电流定律(KCL)分析并联电流源、分流和电阻并联等。最后，本

章介绍了并联电路的应用，以及如何使用 PSpice 和 Multisim 分析并联电路。

5.2　并联电路

并联电路由两端连到相同的两个节点上的电阻（或元件）组成，所以各电阻（或元件）的电压相同。

两电阻的两端连到相同的两个端点或节点上，则电阻并联。一般说来，如果两个或多个电阻连接到两个节点之间，则称它们是并联的。

由图 5-2 所示的并联电路例子，可以得到并联电路具有以下特点：

1）每个元件都是连到两个节点上的。

2）有两条或多条电流路径。

3）各并联元件的电压相同。

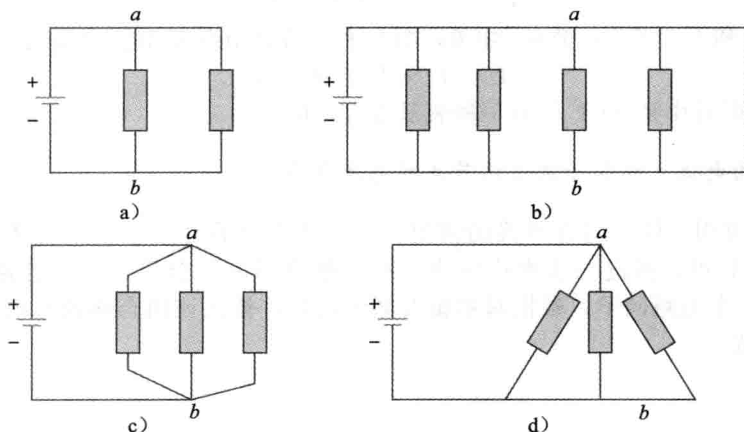


图 5-2　并联电路示例

与串联电路相比，并联电路的一个优点是，若有一个元件开路，对其他元件没有影响。

例 5-1　如图 5-3 所示电路，求各电阻电流和各电阻消耗的功率。

解：电路中电阻并联，则各电阻电压相同且为 20V。利用欧姆定律，则有

$$I_1 = \frac{V}{R_1} = \frac{20}{4} = 5(\text{A})$$

$$I_2 = \frac{V}{R_2} = \frac{20}{5} = 4(\text{A})$$

R_1 消耗的功率为

$$P_1 = VI_1 = 20 \times 5 = 100(\text{W})$$

R_2 消耗的功率为

$$P_2 = VI_2 = 20 \times 4 = 80(\text{W})$$

◀

练习 5-1　计算如图 5-4 所示电路中 R_1，R_2 和 R_3 消耗的功率。

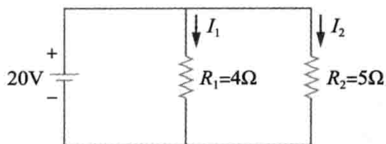


图 5-3　例 5-1 和练习 5-51 的电路原理图

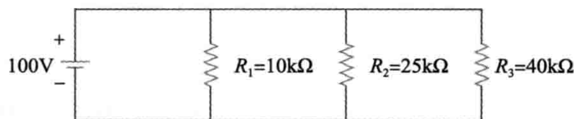


图 5-4　练习 5-1 的电路原理图

答案：1W；0.4W；0.25W

5.3 基尔霍夫电流定律

基尔霍夫电流定律的基础是电荷守恒定律，即在一个系统内电荷的代数和是恒定的。

基尔霍夫电流定律（KCL）：流入任一节点（或任一闭合界线）的电流代数和为零。

KCL 的数学表达式是：

$$I_1 + I_2 + I_3 + \cdots + I_N = 0 \tag{5-1}$$

式中 N 是与该节点相连的支路数，I_n 是流入（或流出）该节点的第 n 个支路的电流，$n=1, 2, 3, \cdots, N$。电流的正、负符号可以任意选取，即若将流入该节点的电流为正，则流出的电流为负，反之亦然。

将 KCL 应用到图 5-5 的节点上，有：

$$+I_1 - I_2 + I_3 + I_4 - I_5 = 0 \tag{5-2}$$

这是因为 I_1，I_3 和 I_4 是流入该节点的电流，而 I_2 和 I_5 是由节点流出的电流，重写式（5-2），得：

$$I_1 + I_3 + I_4 = I_2 + I_5 \tag{5-3}$$

式（5-3）可看作是 KCL 的另一种表示方式，即：

流入节点的电流之和等于流出该节点的电流之和。

KCL 还可应用于任一闭合界线的情况，如果把节点看作是一个闭合表面缩小后的一个点，那么 KCL 可以被进一步推广应用。在二维空间内闭合界线与闭合路径是一样的。图 5-6 所示为一个电路例子，根据基尔霍夫电流定律，流入该闭合面的总电流等于流出该闭合面的总电流。

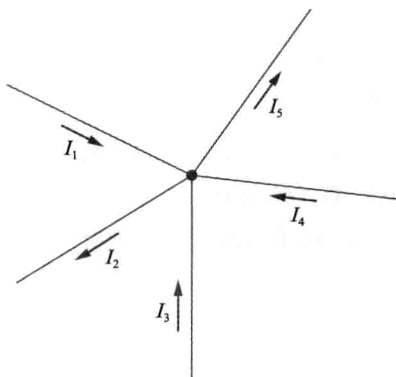


图 5-5 节点电流 KCL 示意图

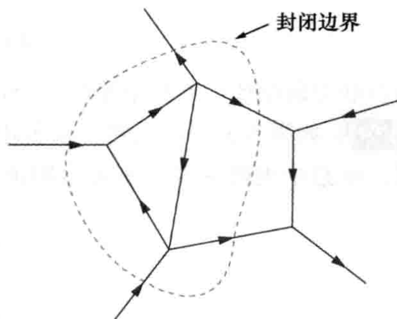


图 5-6 KCL 应用于闭合界线

例 5-2 求图 5-7 所示电路中电流 I_3。

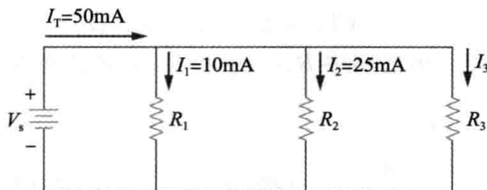


图 5-7 例 5-2 的电路原理图

解：对上面的节点应用 KCL 有

$$I_T = I_1 + I_2 + I_3$$

即

$$I_3 = I_T - I_1 - I_2 = 50\text{mA} - 10\text{mA} - 25\text{mA} = 15\text{mA}$$ ◀

练习 5-2　求图 5-8 所示电路中电流 I_2。

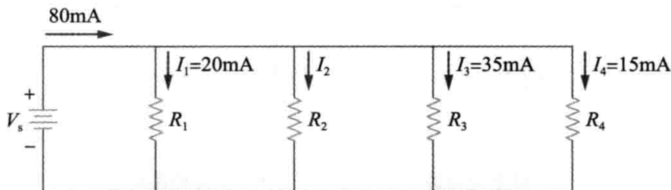


图 5-8　练习 5-2 的电路原理图

答案： 10mA

例 5-3 利用 KCL，求解图 5-9 所示电路中 I_1，I_2 和 I_3。

解： 在节点 a 处有

$$8\text{mA} = 12\text{mA} + I_1$$

即

$$I_1 = 8\text{mA} - 12\text{mA} = -4\text{mA}$$

负号表示实际电流方向与假设方向相反。

在节点 b 处有

$$9\text{mA} = 8\text{mA} + I_2$$

即

$$I_2 = 9\text{mA} - 8\text{mA} = 1\text{mA}$$

在节点 c 处有

$$9\text{mA} = 12\text{mA} + I_3$$

即

$$I_3 = 9\text{mA} - 12\text{mA} = -3\text{mA}$$

对节点 d 应用 KCL 检测电流，则

$$I_3 = I_1 + I_2 \quad \Rightarrow \quad -3\text{mA} = -4\text{mA} + 1\text{mA}$$

符合题意。 ◀

练习 5-3　求图 5-10 所示电路中电流 I_1、I_2 和 I_3。

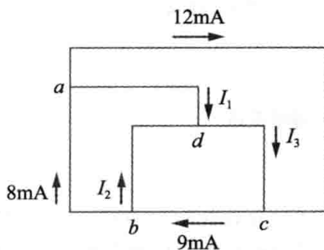


图 5-9　例 5-3 的电路原理图

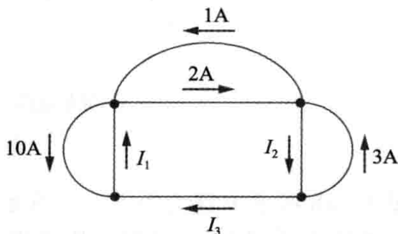


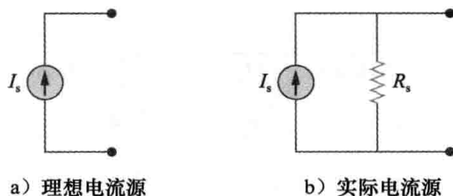
图 5-10　练习 5-3 的电路原理图

答案： 11A；4A；1A

5.4　并联电流源

电流源是除电压源以外另一种形式的电源，它可以产生电流并提供给外电路。电流源应用于需要恒定电流的电路中。图 5-11a 给出电流源的电路符号。而实际电流源有内阻

R_s，如图 5-11b 所示。理想电流源的内阻无穷大（$R_s \to \infty$），如图 5-11a 所示。图 5-12 所示的稳压集成电路 LM2576 是实际的恒流电流源，其工作原理超过本书知识范围。虽然不了解 LM2576 的实际工作方式，但知道它可以产生恒定的电流。



a）理想电流源　　b）实际电流源

图 5-11　电流源

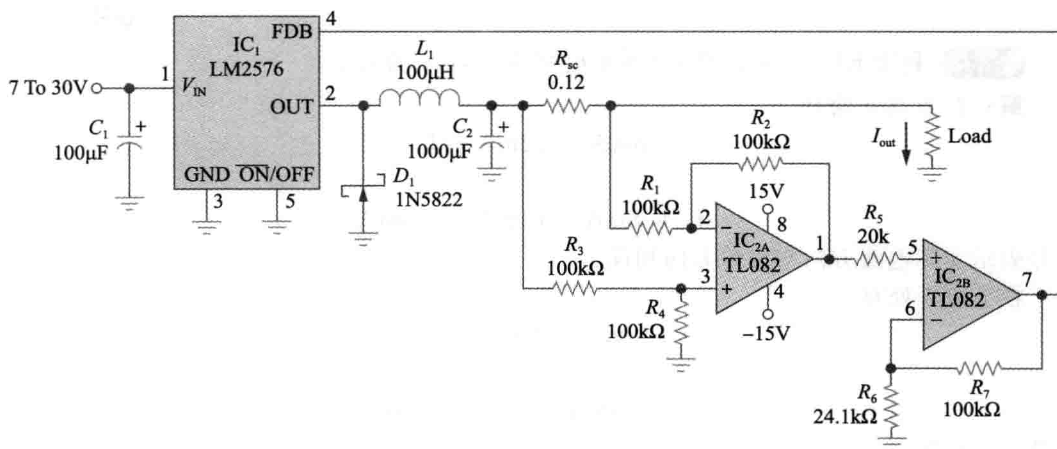
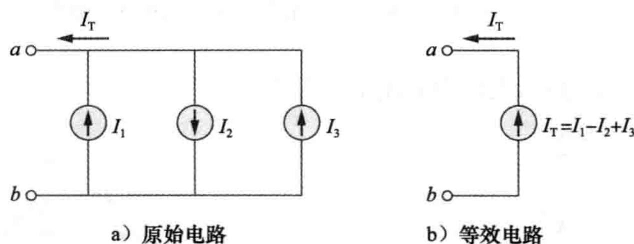


图 5-12　一个恒流源示例

图片由 EDN 提供

KCL 的一个简单应用是并联电流源的组合，组合后的等效电流是各个电流源所提供电流的代数和。如图 5-13a 所示的电流源可以变换为图 5-13b 所示的电流源。



a）原始电路　　b）等效电路

图 5-13　并联电流源

图 5-13b 所示电路为图 5-13a 所示电路的**等效电路**（equivalent circuit）。若两电路有相同的电流电压（I-V）特性，则两电路等效。在节点 a 处用 KCL 得到等效电流为

$$I_T + I_2 = I_1 + I_3$$

即

$$I_T = I_1 - I_2 + I_3 \tag{5-4}$$

KCL 还表明，一个电路不可能串联两个不同的电流 I_1 和 I_2，除非 $I_1 = I_2$，否则，不符合基尔霍夫电流定律。

5.5 电阻并联

图 5-14 所示电路为两个电阻并联的情况，则其两端的电压相同。（两电阻并联则压降相同）由欧姆定律可得

$$V = I_1R_1 = I_2R_2$$

则

$$I_1 = \frac{V}{R_1}, \quad I_2 = \frac{V}{R_2} \tag{5-5}$$

在节点 a 处，按照 KCL 计算，总电流为

$$I = I_1 + I_2 \tag{5-6}$$

将式（5-5）代入式（5-6），有

$$I = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{V}{R_{eq}} \tag{5-7}$$

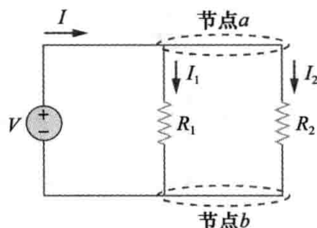


图 5-14 两个电阻的并联

式中 R_{eq} 是两个并联电阻的等效电阻值：

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \tag{5-8}$$

或

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{R_1 + R_2}{R_1R_2}$$

即

$$\boxed{R_{eq} = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}} \tag{5-9}$$

上式称为积除以和。所以

两个并联电阻的等效电阻等于它们各自电阻的乘积除以它们的电阻之和。

应该注意，上述表达只适用于两个电阻的并联。若 $R_1 = R_2$，由式（5-9）可知，则 $R_{eq} = R_1/2$。

可将式（5-8）扩展到有 N 个电阻并联的一般情况，则等效电阻为：

$$\boxed{\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots + \frac{1}{R_N}} \tag{5-10}$$

不难发现，多个电阻并联后的等效电阻 R_{eq} 总是小于其中阻值最小的那个电阻。若 $R_1 = R_2 = \cdots = R_N = R$，则有：

$$R_{eq} = R/N \tag{5-11}$$

例如，如果四个 100Ω 的电阻并联连接，其等效电阻为 25Ω。

在处理电阻并联情况时，使用电导表示要比用电阻表示更为方便。由式（5-10）可知，N 个电阻并联[⊖]的等效电导是：

$$\boxed{G_{eq} = G_1 + G_2 + G_3 + \cdots + G_N} \tag{5-12}$$

式中 $G_{eq} = 1/R_{eq}$，$G_1 = 1/R_1$，$G_2 = 1/R_2$，$G_3 = 1/R_3$，…，$G_N = 1/R_N$。式（5-12）表明：

并联电阻的等效电导等于各个电导之和。

可以用图 5-15 所示电路代替图 5-14 所示电路，即图 5-15 所示为图 5-14 电路的等效电

⊖ 并联电导的等效电导等于各个电导之和。

路。式 (4-2) 和式 (5-12) 具有相似性，通过对比可知，并联电阻等效电导的推导方法与串联电阻等效电阻的推导方法相同。同样，串联电阻等效电导的推导方法与并联电阻等效电阻的推导方法一样。

例 5-4 计算图 5-16 所示电路的等效电阻 R_{eq}，电流 I_T 和电压源提供的功率。

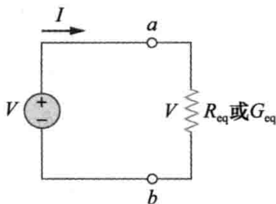


图 5-15 图 5-14 的等效电路

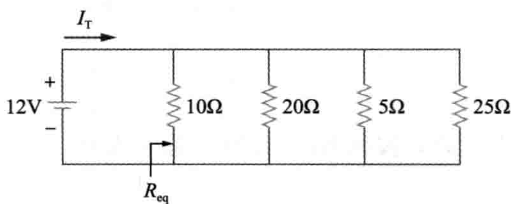


图 5-16 例 5-4 的电路原理图

解：

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} = 0.39(\text{S}) \tag{5-4-1}$$

用 Ti-89 钛计算器计算步骤如下。

输入 1/10+1/20+1/5+1/25，然后按 ◆ Enter 输出显示 0.39，则

$$R_{eq} = 1/0.39 = 2.564(\Omega)$$

其中斜线“/”表示除号（÷）。注意等效电阻 R_{eq}小于图 5-16 所示电路中的最小电阻。

利用欧姆定律，得

$$I_T = \frac{V}{R_{eq}} = \frac{12}{2.564} = 4.68(\text{A})$$

电源提供的功率为

$$P = VI_T = 12 \times 4.68 = 56.16(\text{W})$$ ◀

练习 5-4 求图 5-17 所示电路中等效电阻 R_{eq}，计算电压源提供的功率。

答案： 571.43Ω；1.008W

例 5-5 计算图 5-18 所示电路中电压 V_{ab}、I_1 和 I_2。

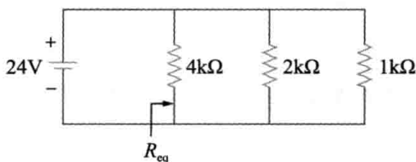


图 5-17 练习 5-4 的电路原理图

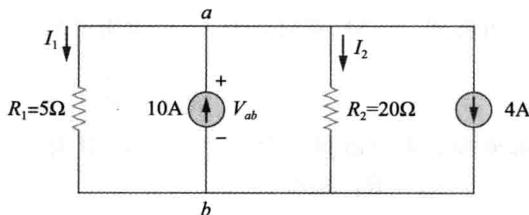


图 5-18 例 5-5 和例 5-8 的电路原理图

解： V_{ab}是 a 和 b 两点间电势差，有两种计算方法。

■ **方法一：** 计算等效电阻，得

$$R_T = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{5 \times 20}{5 + 25} = 4(\Omega) \tag{5-5-1}$$

流入节点 a 的电流为

$$I_T = 10 - 4 = 6(\text{A})$$

得到图 5-18 电路的等效电路，如图 5-19 所示。用欧姆定律，有

$$V_{ab} = I_T R_T = 6 \times 4 = 24(\text{V}) \tag{5-5-2}$$

■ **方法二：** 对节点 a 处应用 KCL，有

$$10 = 4 + I_1 + I_2 \tag{5-5-3}$$

而

$$I_1 = \frac{V_{ab}}{R_1} = \frac{V_{ab}}{5}, \quad I_2 = \frac{V_{ab}}{R_2} = \frac{V_{ab}}{20}$$

将其代入式（5-5-3），得

$$6 = \frac{V_{ab}}{5} + \frac{V_{ab}}{20}$$

两边同乘 20，得

$$120 = 4V_{ab} + V_{ab} = 5V_{ab}$$

即

$$V_{ab} = 120/5 = 24(\text{V})$$

与上一种方法结果相同。当 V_{ab} 值已知，利用欧姆定律计算电流 I_1 和 I_2，则有：

$$I_1 = \frac{V_{ab}}{R_1} = \frac{24}{5} = 4.8(\text{A})$$

$$I_2 = \frac{V_{ab}}{R_2} = \frac{24}{20} = 1.2(\text{A})$$ ◀

练习 5-5 计算图 5-20 所示电路中电压 V_{ab}、电流 I_1、I_2 和 I_3。

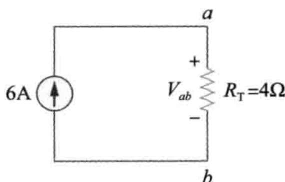


图 5-19 图 5-18 的等效电路

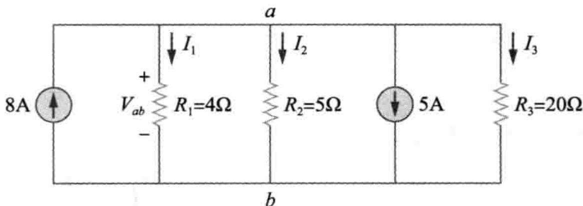


图 5-20 练习 5-5 和练习 5-8 的电路原理图

答案： 6V；1.5A；1.2A；0.3A

5.6 分流电路

图 5-21 所示电路中，若流入节点 a 的总电流是 I_T，如何求得电流 I_1 和 I_2？已知等效电阻的电压为

$$V = I_T R_{eq} = \frac{I_T R_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{5-13}$$

联立式（5-5）和式（5-13），得

$$\boxed{I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I_T, \quad I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I_T} \tag{5-14}$$

即

$$I_1 = \frac{R_{eq}}{R_1} I_T, \quad I_2 = \frac{R_{eq}}{R_2} I_T \tag{5-15}$$

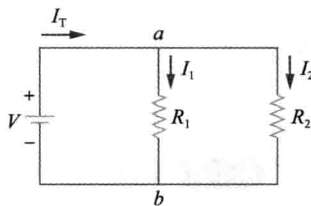


图 5-21 并联电阻分流

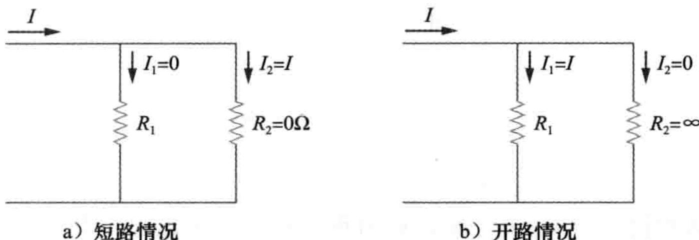
上式说明总电流 I 被两条支路分流，且各支路电流与其电阻成反比，这个规律称为**分流法则**（principle of current division）或**分流原理**（current divider rule，CDR），图 5-21 所示电路称为**分流电路**（current divider）。电阻较小的支路流过的电流较大，且有 $I_T = I_1 + I_2$，满足 KCL。

在极端的情况下，设定图 5-21 所示电路中某个电阻为零值，若设 $R_2 = 0\Omega$，即如图 5-22a 所示电路中 R_2 短路。则由式（5-14）可见，$I_1 = 0\text{A}$，$I_2 = I$。这就表明，电流 I 不流经 R_1，而只流过 $R_2 = 0\Omega$ 的短路支路。因此，一旦出现图 5-22a 所示的短路情况，记住以下两点：

1）等效电阻 $R_{eq}=0\Omega$（见式（5-9），以 $R_2=0\Omega$ 代入）。

2）全部电流都流过短路支路。

另一个极端情况是若 $R_2=\infty\Omega$，即 R_2 为开路，如图 5-22b 所示，此时电流仍按电阻小的路径流动，即流经 R_1 支路。式（5-9）对 R_2 取极限，得到 $R_{eq}=R_1$。



a）短路情况　　b）开路情况

图 5-22　短路与开路

分流原理可以扩展到多个电阻的情况。如图 5-23 所示电路，各电阻并联，因此它们的电压 V 相同。用 R_{eq}表示等效电阻，则有

$$V=I_T R_{eq} \quad \Rightarrow \quad I_T=\frac{V}{R_{eq}} \tag{5-16}$$

类似地，有

$$I_x=\frac{V}{R_x} \tag{5-17}$$

将式（5-16）代入式（5-17），得

$$\boxed{I_x=\frac{R_{eq}}{R_x}I_T} \tag{5-18}$$

分流原理也可以表示为电导的形式。若将式（5-14）的分子和分母同除以 R_1R_2，则：

$$I_1=\frac{G_1}{G_1+G_2}I_T, \quad I_2=\frac{G_2}{G_1+G_2}I_T \tag{5-19}$$

一般地，若有 N 个电导（G_1，G_2，…，G_N）并联连接，且与电流源 I_T 组成分流电路，则流经第 k 个电导（G_k）的电流为

$$I_k=\frac{G_k}{G_1+G_2+\cdots+G_N}I_T \tag{5-20}$$

即

$$\boxed{I_k=\frac{G_k}{G_{eq}}I_T} \tag{5-21}$$

例 5-6 如图 5-24 所示电路，(a) 若等效电阻为 4kΩ，求 R_2。(b) 求电流 I_1 和 I_2。

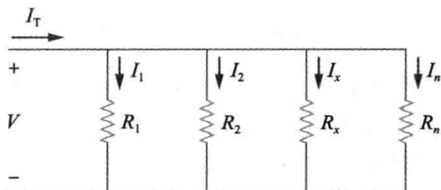


图 5-23　n 条支路的分流电路

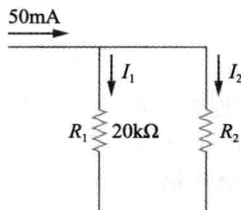


图 5-24　例 5-6 的电路原理图

解：已知两电阻并联，等效电阻 R 单位为 kΩ，则有

$$4=\frac{20R_2}{20+R_2}$$

即

$$80 + 4R_2 = 20R_2$$

得

$$16R_2 = 80$$
$$R_2 = 80/16 = 5(\text{k}\Omega)$$

应用分流原理，得电流为

$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \times 50\text{mA} = \frac{5}{20+5} \times 50\text{mA} = 10\text{mA}$$

$$I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \times 50\text{mA} = \frac{20}{20+5} \times 50\text{mA} = 40\text{mA}$$ ◀

练习 5-6　利用分流原理，求解图 5-25 所示电路中电流 I_1 和 I_2。

答案：37.5mA；12.5mA

例 5-7　如图 5-26 所示电路，求电流 I_1、I_2 和 I_3。

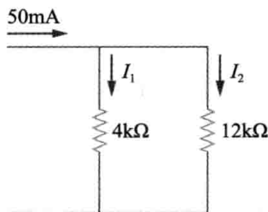


图 5-25　练习 5-6 的电路原理图

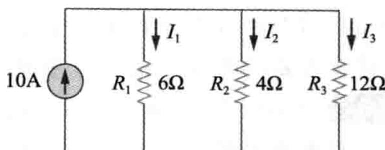


图 5-26　例 5-7 的电路原理图

解：有两种方法。

■ 方法 1：利用式（5-21）求等效电导，得

$$G_{eq} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = 0.5(\text{S})$$

因此，

$$I_1 = \frac{G_1}{G_{eq}} I = \frac{1/6}{0.5} \times 10 = 3.333(\text{A})$$

$$I_2 = \frac{G_2}{G_{eq}} I = \frac{1/4}{0.5} \times 10 = 5(\text{A})$$

$$I_3 = \frac{G_3}{G_{eq}} I = \frac{1/12}{0.5} \times 10 = 1.667(\text{A})$$

■ 方法 2：用式（5-14）求电阻。每次只考虑两个电阻，为便于理解，重画电路，如图 5-27 所示。4Ω 与 12Ω 电阻并联，有

$$R_T = 4 \parallel 12 = \frac{4 \times 12}{4 + 12} = 3(\Omega)$$

电流源为 10A，而 6Ω 电阻与 R_T 分流，使用（5-14）式，得

$$I_1 = \frac{R_T}{R_1 + R_T} I = \frac{3}{6+3} \times 10 = 3.333(\text{A})$$

$$I_T = \frac{R_1}{R_1 + R_T} I = \frac{6}{6+3} \times 10 = 6.667(\text{A})$$

电流 I_T 由电阻 4Ω 与 12Ω 分流，则有

$$I_2 = \frac{R_3}{R_2 + R_3} I_T = \frac{12}{4+12} \times 6.667 = 5(\text{A})$$

$$I_3 = \frac{R_2}{R_2 + R_3} I_T = \frac{4}{4+12} \times 6.667 = 1.667(\text{A})$$

与第一种方法结果相同。注意最小电阻的电流最大，最大电阻的电流最小。◀

练习 5-7 求图 5-28 所示电路中电流 I_1，I_2 和 I_3。

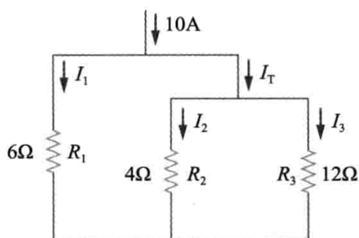


图 5-27 例 5-7 的图

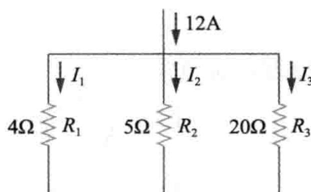


图 5-28 练习 5-7 的电路原理图

答案：6A；4.8A；1.2A

5.7 计算机辅助分析

5.7.1 PSpice

PSpice 对分析并联电路很有帮助。下面是运用 PSpice 处理并联电路的例子。在学习之前，请读者复习附录 C 的 C.1 节到 C.3 节。

例 5-8 利用 PSpice 解例 5-5（见图 5-18）。

解：原理图如图 5-29 所示。这是一个直流分析，用 IDC 表示电流源。将画好的电路图保存为 exam58.dsn 文件。选择 Pspice/New Simulation Profile 仿真电路。弹出 New Simulation 对话框，输入名字"exam58"，单击 Create。弹出 Simulation Settings 对话框，由于是直流分析，直接单击 OK 按钮。然后选择 Pspice/Run。电路进行仿真，部分结果如图 5-29 所示。其他结果存入输出文件。可以选择 Pspice/View Output File 查看输出文件。结果为

$$V_{ab} = 24\text{V}, \quad I_1 = 4.8\text{A}, \quad I_2 = 1.2\text{A}$$

与例 5-5 相同。◀

练习 5-8 用 PSpice 重做练习 5-5。 **答案**：6V；1.5A；1.2A；0.3A

5.7.2 Multisim

利用 Multisim 可以很容易进行并联电路分析。Multisim 处理并联电路的方式与处理串联电路的方式类似。下面为使用 Multisim 仿真并联电路的实例。

例 5-9 如图 5-30 所示电路，利用 Multisim，求电流 I_T，I_1 和 I_2。

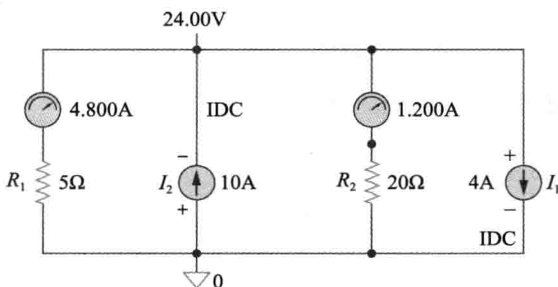


图 5-29 例 5-8 的 PSpice 电路原理图

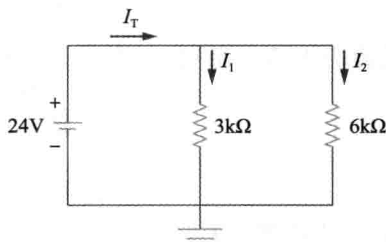


图 5-30 例 5-9 的电路图

解：用 Multisim 画出电路图，如图 5-31 所示。插入电流表测量 I_T，I_1 和 I_2（也可以用万用表测量，万用表可以测量电流、电压和电阻）。电路接地，保存电路，按下开关或

选择 Simulate/Run 进行仿真。结果如图 5-31 所示，为

$$I_T = 12\text{mA},\quad I_1 = 8\text{mA},\quad I_2 = 4\text{mA}$$

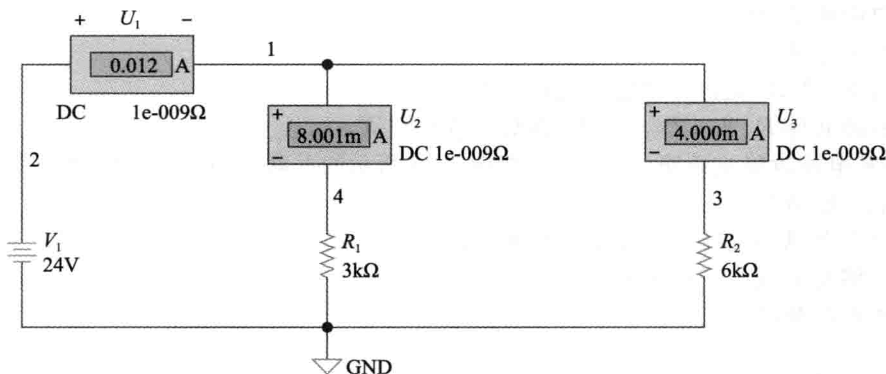


图 5-31 图 5-30 的 Multisim 仿真电路图

练习 5-9 如图 5-32 所示电路，利用 Multisim，求 I_T 和 I_2。

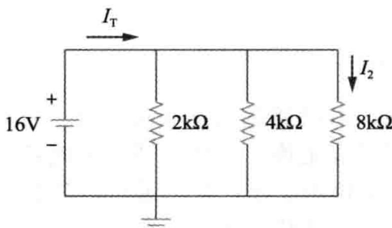


图 5-32 练习 5-9 的电路原理图

答案： $I_T = 14\text{mA}$；$I_2 = 2\text{mA}$

5.8 故障排除

作为一名技术人员，需要面对元件、设备、系统等出现的故障，日常生活中晶体管、收音机、计算机等，都可能会出现故障。排除故障需要丰富的经验、合理的推断、有效的分析原因。

故障排除是用知识和经验诊断电路故障的过程。

电路出现故障不能正常工作的原因有很多：可能是供电连接不正确，可能是某部分连接松动或断开，可能是某元件短路或损坏，可能是熔丝烧断。为了排除电路故障，首先要了解电路的工作原理。利用电路基本定理，根据经验可以判断故障原因。以下是一些经验法则：

- 检查连接状况；
- 沿每条路径查找问题，V（供电）到地，$-V$（供电）到地，再反向查找；
- 确保元件的每个管脚都连接正确，且不与其他不应该连接的管脚相连。

下面讨论单元件电路的故障分析。主要任务是找到发生故障的元件或支路，将它替换掉。有几种不同的策略来定位故障发生的位置。有两种问题较容易发现，即开路和断路。查找问题时，一般先移除电源，使用欧姆表测量。

无论电路中某元件是并联还是串联，若电阻无穷大，则为**开路**（open），这个元件被烧毁。电路中可能有一个或多个元件开路。如图 5-33 所示电路是一个并联电路，若其中

R_2 烧毁，将有以下现象：

1）因为 R_2 开路，$R_2=\infty$，$I_2=0\text{A}$。

2）总电流 I_T 小于正常值。

3）电压正常。

4）若 R_1 和 R_3 是灯，则它们仍然亮着。

5）故障元件 R_2 不工作。若 R_2 是灯，则它熄灭。

另一种电路故障是**短路**（short）。如图 5-34 所示的并联电路。若有电阻短路，则测得阻值为 0Ω。电路有以下现象：

1）所有电流都流经短路部分，其他支路没有电流。

2）电路总电流大于正常值。

3）所有负载停止工作。

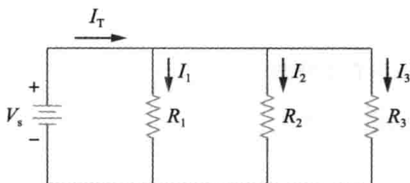


图 5-33 并联电路开路

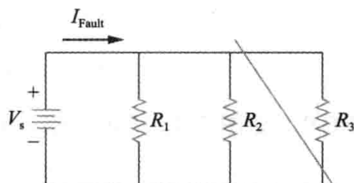


图 5-34 并联电路短路

例如，居民电路出现问题，可以通过以下方法排查。若某电器不工作，重新启动，如果仍不工作，可能是电器坏了需要更换。若两个或更多电器出现问题，可以尝试复位断路器及漏电保护器（GFCI）。如果仍不工作，可以通过改进接口连接来确定故障所在。当你熟悉电路时，可以尝试改进电路不工作部分与工作部分的连接；当你不熟悉电路时，可以尝试改进电路不工作部分和其附近任意工作部分的连接。如果还不能正常工作，可以尝试更换断路器，然后检查零线连接。

尽管很容易分辨短路或过载的电路，但很难直接判断出系统哪里出现了问题。比如电烤箱出现故障，接入电路后，可能会使灯灭掉。判断故障位置，首先应关闭所有的墙壁开关，并拔掉所有的灯和电器。然后重置断路器或更换烧断的熔丝。当您已经尝试了所有方法故障仍未排除，请咨询有经验的人。

例 5-10 如图 5-33 所示电路，计算电路正常和异常工作时的电流与功率。其中 $V_s=60\text{V}$，$R_1=20\Omega$，$R_2=10\Omega$，$R_3=5\Omega$。

解：电路在正常工作情况下，

$$I_1=\frac{V_s}{R_1}=\frac{60}{20}=3(\text{A})$$

$$I_2=\frac{V_s}{R_2}=\frac{60}{10}=6(\text{A})$$

$$I_3=\frac{V_s}{R_3}=\frac{60}{5}=12(\text{A})$$

总电流为

$$I_T=3+6+12=21(\text{A})$$

总功率为

$$P_T=V_1I_1+V_2I_2+V_3I_3=60\times3+60\times6+60\times12=1260(\text{W})$$

在异常情况下，R_2 开路，则 $I_2=0$，$R=\infty$。

$$I_1=\frac{V_s}{R_1}=\frac{60}{20}=3(\text{A})$$

$$I_2 = \frac{V_s}{\infty} = 0(\mathrm{A})$$

$$I_3 = \frac{V_s}{R_3} = \frac{60}{5} = 12(\mathrm{A})$$

总电流为

$$I_T = 3 + 0 + 12 = 15(\mathrm{A})$$

总功率为

$$P_T = V_1 I_1 + V_2 I_2 + V_3 I_3 = 60 \times 3 + 0 + 60 \times 12 = 900(\mathrm{W})$$

由于电路故障，功率下降。 ◀

练习 5-10 如图 5-35 所示电路，计算电路正常和异常工作时的电流 I。其中 $V_s =$ 120V，$R_1 = 10\Omega$，$R_2 = 20\Omega$，$R_3 = 5\Omega$。

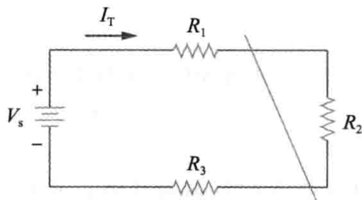


图 5-35 练习 5-10 的图

答案： 正常：3.429A；异常：4.8A

†5.9 应用

并联电路有许多实际应用。例如圣诞灯（如 4.9 节所述），汽车照明系统和居民住宅电气布线。下面介绍两种应用。

并联电路通常用于配电电路，特别是居民住宅电气系统。所有家电和灯都是并联连接的。图 5-36 所示表明电插座都是并联的。

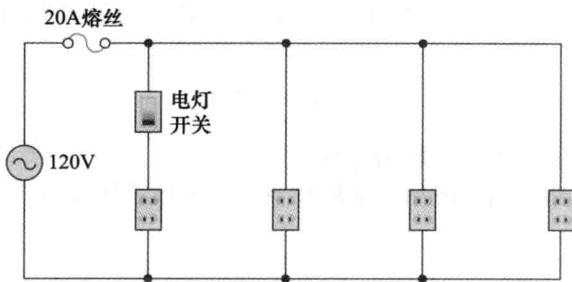


图 5-36 电插座是并联连接

这说明所有插座的电压是相等的。总电流是所有并联支路电流之和。由于电存在危险性，居民住宅的电气布线一般以当地标准或国家电气规范（NEC）为依据。为防止电路出现问题，会采取一些防护措施，如使用绝缘体、接地、熔丝、断路器等。现代布线标准要求有单独接地线，即第三根线。接地线与零线不同，可以给家电提供单独的接地线。

并联电路的另一个普遍应用是汽车照明系统。其简化电路如图 5-37 所示。电路为并联，若一个头灯坏了（即开路）不会影响其他灯。汽车照明系统是一个直流系统，由 12V 电池给整个直流系统供电。这个系统是一个并联系统，每个元件都与电池、地或机壳连接。

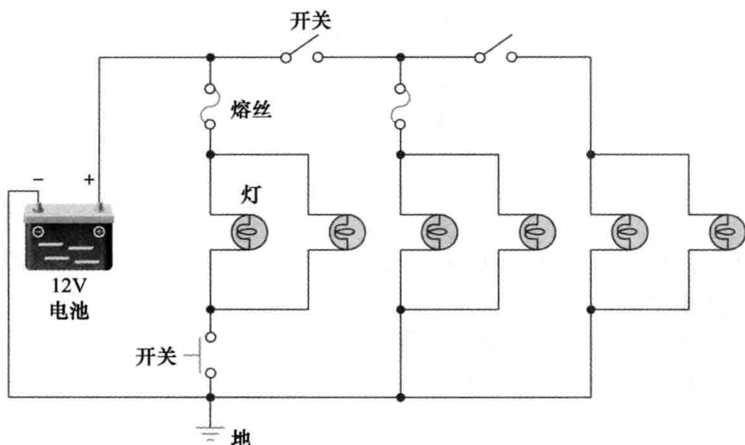


图 5-37 汽车照明系统的简单形式

5.10 本章小结

1）两个元件的两端连到相同的两个节点上称为并联，并联元件两端的电压相同。
2）基尔霍夫电流定律（KCL）是：流入任意节点的电流代数和为零。或者说，流入节点的电流之和等于流出该节点的电流之和。
3）若电流源并联，则总电流是各个支路电流的代数和。
4）两个电阻 $R_1(=1/G_1)$ 和 $R_2(=1/G_2)$ 并联，其等效电阻 R_{eq} 和等效电导 G_{eq} 是：

$$R_{eq}=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2},\quad G_{eq}=G_1+G_2$$

5）两个电阻并联，其分流关系是：

$$I_1=\frac{R_2}{R_1+R_2}I,\quad I_2=\frac{R_1}{R_1+R_2}I$$

若分流电路中 N 个电导（G_1，G_2，…，G_N）并联，电流源电流为 I，则第 k 个电导（G_k）的电流为：

$$I_k=\frac{G_k}{G_{eq}}I$$

6）故障排除就是分析故障电路问题的过程。
7）本章介绍了并联电路的两种应用，居民住宅电气布线系统和汽车照明系统。

复习题

1 若电阻并联，则它们有相同的：
(a) 电流 (b) 电压
(c) 功率 (d) 电阻

2 电压值不同的电压源可以并联连接。
(a) 正确 (b) 错误

3 R_{eq}的值总是小于并联电路中的最小阻值。
(a) 正确 (b) 错误

4 三个电阻阻值分别为 240Ω，560Ω 和 100Ω，并联接入电路，则最接近等效电阻的值为：
(a) 900Ω (b) 63Ω
(c) 56Ω (d) 22Ω

5 如图 5-38 所示电路，电阻 R_1 和 R_2 并联接入电路。
(a) 正确 (b) 错误

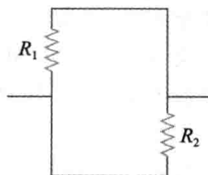


图 5-38 复习题 5 的电路原理图

6 并联电路中有一个电阻短路，则总阻值：

(a) 增加一倍　(b) 增加
(c) 下降　(d) 为零

7 如图5-39所示电路，求电流 I_o：
(a) -4A　(b) -2A
(c) 4A　(d) 16A

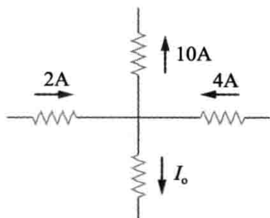


图5-39 复习题7的电路原理图

8 电流分压原理用于电阻并联电路分析。
(a) 正确　(b) 错误

9 若电阻40Ω，60Ω，80Ω和100Ω并联，接到电流源上，则电流最小的电阻是：
(a) 40Ω　(b) 60Ω
(c) 80Ω　(d) 100Ω

10 两电阻40Ω和60Ω并联，接到10mA电流源上，则40Ω电阻的电流是：
(a) 10mA　(b) 6mA
(c) 4mA　(d) 0mA

答案：1 (b)，2 (b)，3 (a)，4 (b)，5 (a)，6 (d)，7 (a)，8 (a)，9 (d)，10 (b)

习题

5.3节

1 如图5-40所示电路，已知 $I_1=-12$A，$I_2=3$A，$I_4=5$A，求电流 I_3 的值。

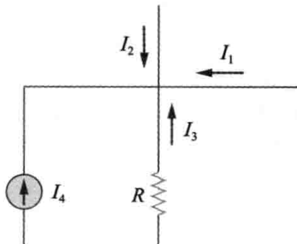


图5-40 习题1的电路原理图

2 如图5-41所示电路，计算未知的电流值。

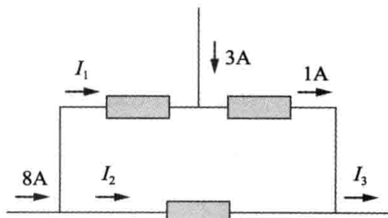


图5-41 习题2的电路原理图

3 如图5-42所示电路，利用KCL计算未知电流 I_1，I_2 和 I_3 的值。

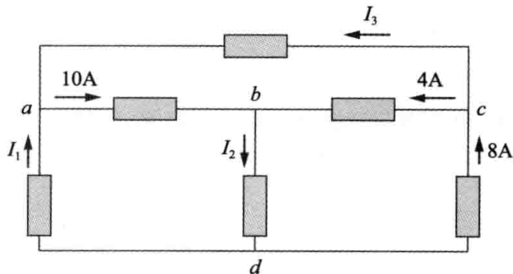


图5-42 习题3的电路原理图

4 求图5-43所示电路中的电流 I_3 和 I_4 的值。

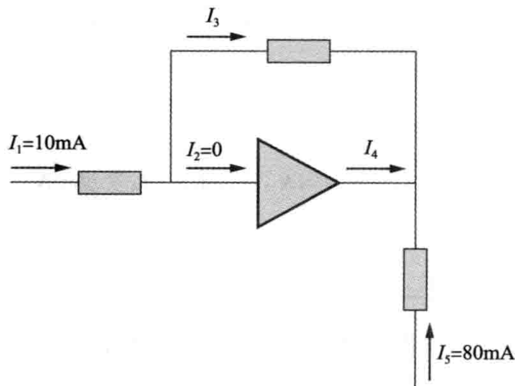


图5-43 习题4的电路原理图

5 计算图5-44所示电路中的电流 I_1 和 I_2 的值。

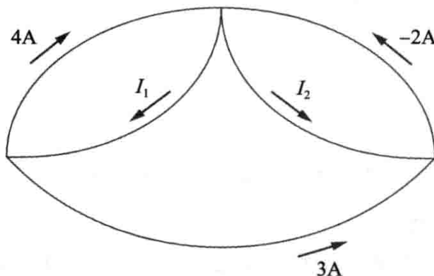


图5-44 习题5的电路原理图

6 计算图5-45所示电路中的电流 I_o 的值。

7 计算图5-46所示电路中的电流 I_1 的值。

8 如图5-47所示电路，已知 $I_1=4$A，$I_2=3$A，$I_3=-12$A，求电流 I_4，I_5 和电压 V 的值。

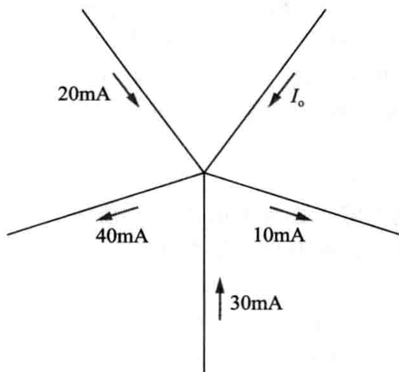


图 5-45 习题 6 的电路原理图

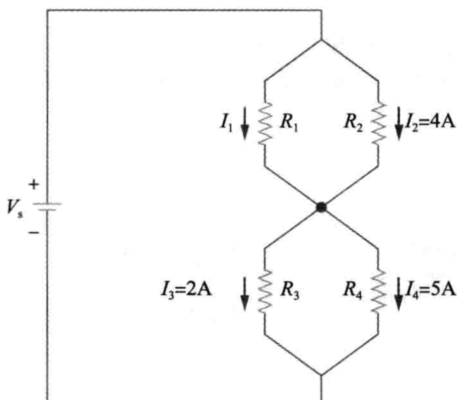


图 5-46 习题 7 的电路原理图

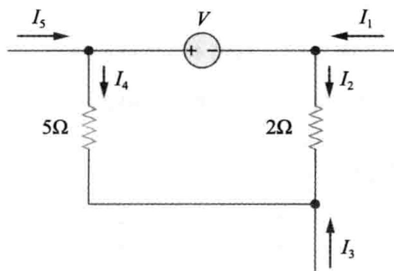


图 5-47 习题 8 的电路原理图

5.4 节

9 计算图 5-48 所示电路中流过电阻的电流值。

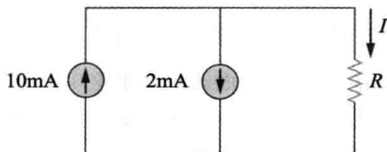


图 5-48 习题 9 的电路原理图

10 如图 5-49 所示电路，计算流过电阻的电流值。

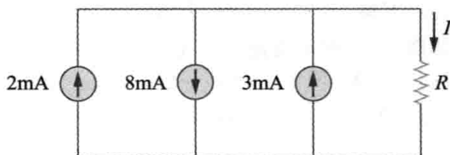


图 5-49 习题 10 的电路原理图

5.5 节

11 三个灯泡并联在电路中，其阻值均为 30Ω，计算灯泡的总阻值。

12 两个 50Ω 的电阻并联，计算总阻值。

13 计算下面各组并联电阻的总阻值。
(a) 50Ω 和 82Ω；
(b) 12kΩ，36kΩ 和 75kΩ；
(c) 1.2MΩ，5.6MΩ 和 680kΩ。

14 10 个 24kΩ 的电阻并联，求其总阻值和总电导值。

15 若四条并联支路的电导分别为 750mS，640mS，480mS 和 300mS，则并联电路的等效电导是多少？

16 三个电阻并联，其等效电阻为 4.2kΩ。若 $R_1=20\text{k}\Omega$，$R_2=25\text{k}\Omega$，则求 R_3 的值。

17 求图 5-50 所示电路中 R_T 的值。

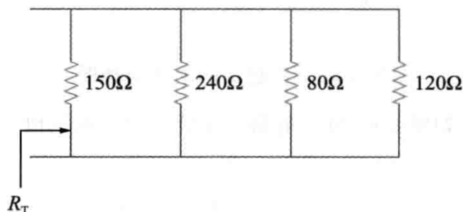


图 5-50 习题 17 的电路原理图

18 求图 5-51 所示电路中的等效电导 G_{eq}的值。

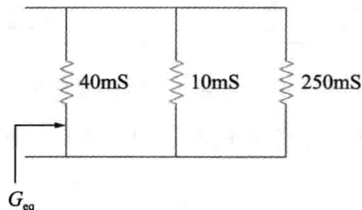


图 5-51 习题 18 的电路原理图

19 计算图 5-52 所示电路中电阻 R_x 的值。

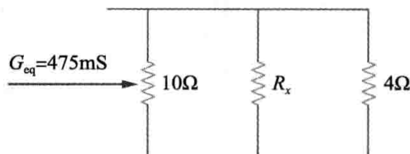


图 5-52 习题 19 的电路原理图

20 计算图5-53所示电路中的等效电阻R_{eq}和等效电导G_{eq}的值。

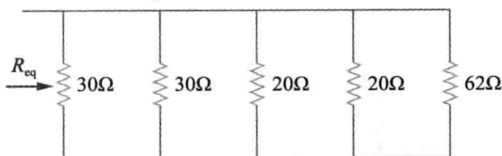


图5-53 习题20的电路原理图

21 求图5-54所示电路中电阻R_T的值。

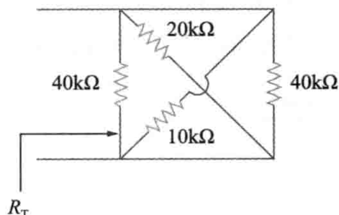


图5-54 习题21的电路原理图

22 求图5-55所示电路中的等效电阻。

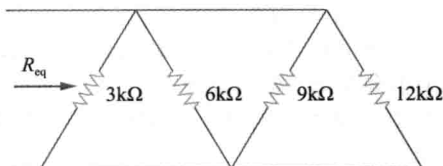


图5-55 习题22的电路原理图

23 四个1.2kΩ电阻和两个300Ω电阻都并联在电路中。求等效电阻。

24 计算图5-56所示电路中的电阻R_L的值。(a)使电流源端电压降为8V；(b)R_L的电流为源电流的1/4。

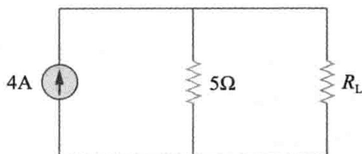


图5-56 习题24的电路原理图

25 假设两电流表电阻为零，求图5-57所示电路中两电流表的读数。

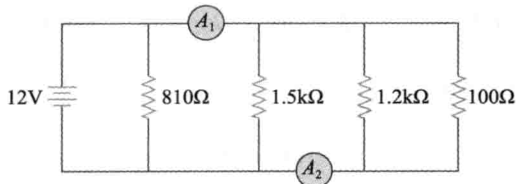


图5-57 习题25的电路原理图

26 两个电导$G_1=750\mu S$，$G_2=500\mu S$，和电阻20Ω并联在电路中。计算并联电路的等效电阻。

27 计算图5-58所示电路中各电阻的电流和消耗的功率。

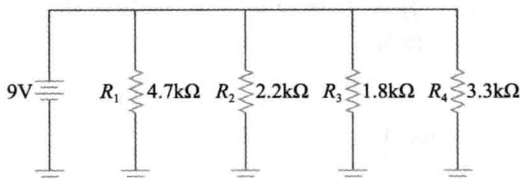


图5-58 习题27的电路原理图

28 计算图5-59所示电路中各电阻的电流和总的电源电流。

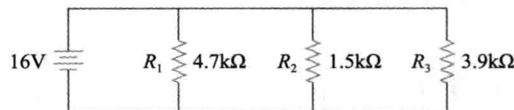


图5-59 习题28的电路原理图

29 三个0.7A的灯并联，接到120V的电源上。计算：

(a) 总电流；

(b) 总电压；

(c) 灯消耗的总功率。

30 求图5-60所示电路中电阻R_T的值。

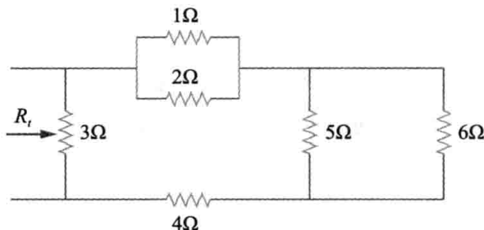


图5-60 习题30的电路原理图

31 如图5-61所示为一个理想电压表接入并联电路中。计算：

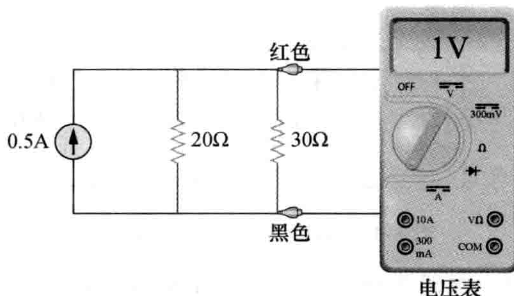


图5-61 习题31的电路原理图

(a) 电压表测量的电压；
(b) 两个电阻各消耗的功率；
(c) 电流源提供的功率。

32 如图 5-62 所示电路，
(a) 当 $I_R=2A$ 时，计算电阻 R 的值；
(b) 若 R 消耗的功率为 700W，求它的阻值。

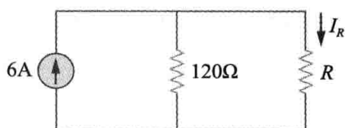


图 5-62　习题 32 的电路原理图

33 如图 5-63 所示的并联电路，若 $I=3A$，求电阻 R 和端电压 V。

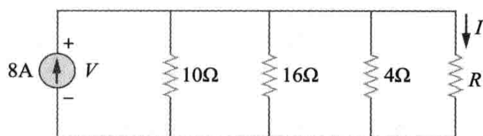


图 5-63　习题 33 的电路原理图

34 某电阻与一个 20Ω 电阻并联后总阻值为 8Ω，求其阻值。

5.6 节

35 求图 5-64 所示电路中电流 I_1 和 I_2 的值。

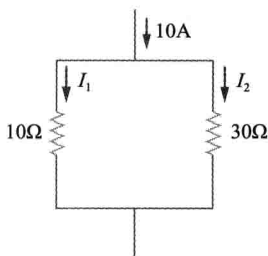


图 5-64　习题 35 的电路原理图

36 求图 5-65 所示电路中电流 I_1、I_2 和 I_3 的值。

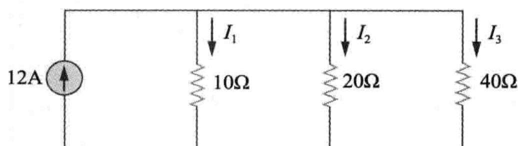


图 5-65　习题 36 和习题 47 的图

37 求图 5-66 所示电路中电流 I_1、I_2 和 I_3 的值。

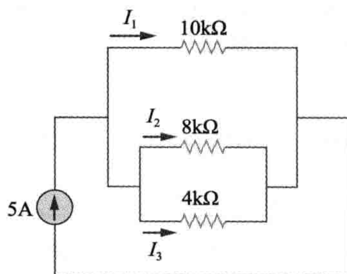


图 5-66　习题 37 和习题 48 的电路原理图

38 求图 5-67 所示电路中各电阻的电流值。

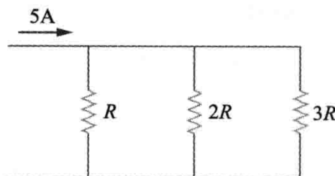


图 5-67　习题 38 的电路原理图

39 三个大小分别为 100mS、300mS、600mS 的电导并联在电路中，总电流为 250mA。计算每个电导的电流值。

40 如图 5-68 所示电路，求两电流表的电流值是多少？

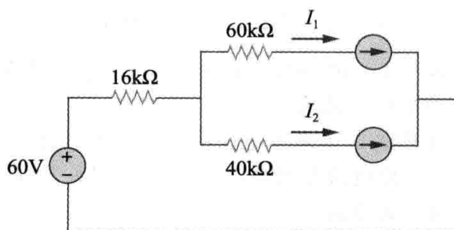


图 5-68　习题 40 和习题 52 的电路原理图

41 如图 5-69 所示电路，求：
(a) G_T 的值；
(b) R_T、I_T 和 P_3 的值。

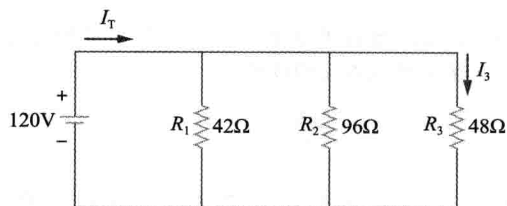


图 5-69　习题 41 的电路原理图

42 求图 5-70 所示电路中电流 I_1 和 I_2 的值。

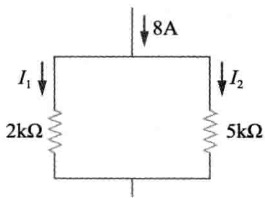


图 5-70 习题 42 的电路原理图

43 求图 5-71 所示电路中电流 I_1、I_2 和 I_3 的值。

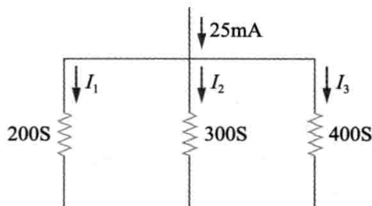


图 5-71 习题 43 的电路原理图

44 如图 5-72 所示电路，求：

(a) V_s 的值；

(b) I_x 的值。

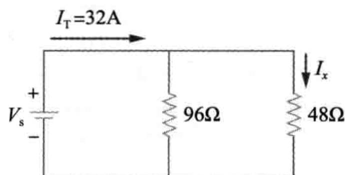


图 5-72 习题 44 的电路原理图

45 如图 5-73 所示电路，求：

(a) R_T 的值；

(b) G_T 的值；

(c) I_T 和 I_x 的值。

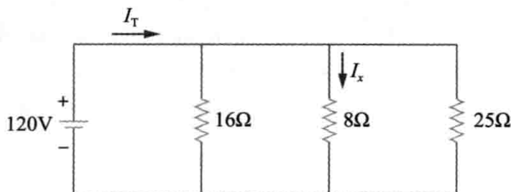


图 5-73 习题 45 的电路原理图

46 求图 5-74 所示电路中各电流表的值。

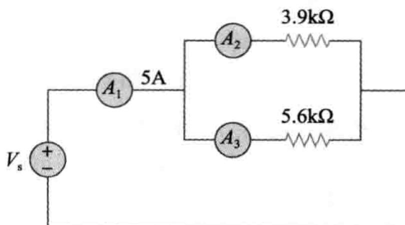


图 5-74 习题 46 的电路原理图

5.7 节

47 利用 PSpice 求图 5-65 中的电流 I_1 和 I_3 的值。

48 利用 PSpice 重做习题 37。

49 运用 Multisim 求图 5-75 所示电路中电流 I_T 的值。

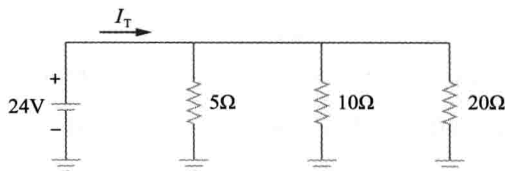


图 5-75 习题 49 的电路原理图

50 运用 Multisim 求图 5-76 所示电路中电流 I_1 到 I_5 的值。

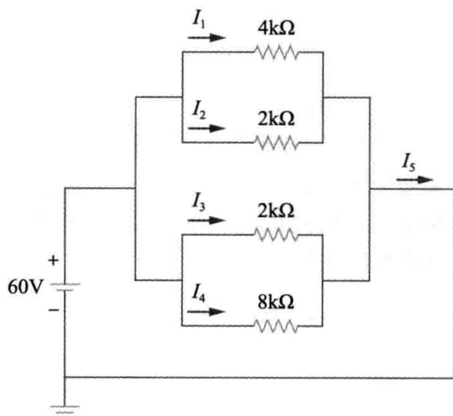


图 5-76 习题 50 的电路原理图

51 运用 Multisim，求图 5-3（见例 5-1）所示电路中电流 I_1 和 I_2 的值。

52 运用 Multisim，求图 5-68 所示电路中电流 I_1 和 I_2 的值。

53 如图 5-77 所示电路，运用 Multisim 计算各电阻电流值。

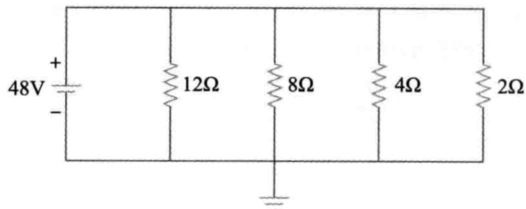


图 5-77 习题 53 的电路原理图

5.8 节

54 如图 5-78 所示电路，假设 R_3 开路。求 V_1，V_2，V_3 和 V_4 的值是多少？

55 重做习题 54，条件改为 R_3 短路。

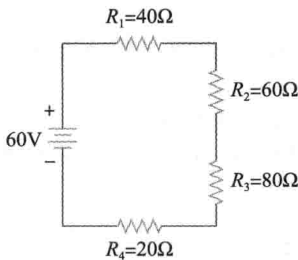


图 5-78 习题 54 和习题 55 的电路原理图

56 如图 5-79 所示电路，求 I_o 和 V_{ab} 的值。

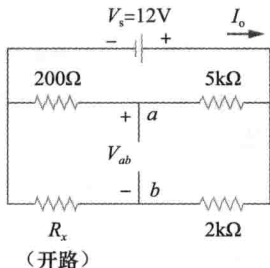


图 5-79 习题 56 的电路原理图

57 测量图 5-80 所示电路的电压，测量值如下。根据每行的测量值，分析哪些元件出了故障及故障类型。

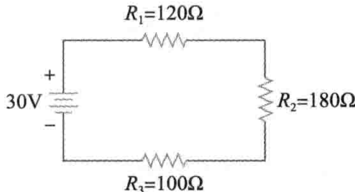


图 5-80 习题 57 的电路原理图

	V_1	V_2	V_3
正常	9	13.5	7.5
故障 1	0	30	0
故障 2	30	0	0
故障 3	0	0	30

58 分析图 5-81 所示电路，求正常情况下和 R_2 短路的异常情况下电流 I 的值。

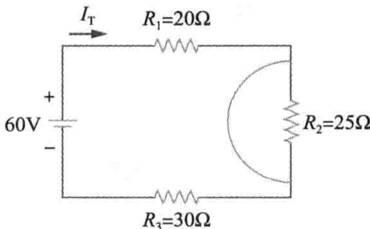


图 5-81 习题 58 的电路原理图

59 如图 5-82 所示电路，R_2 开路。计算正常情况下和异常情况（R_2 开路）下 I_T 的值。

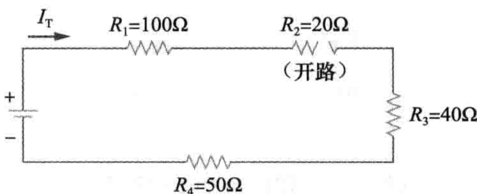


图 5-82 习题 59 的电路原理图

60 若串联电路有多条支路，则哪种方法可以有效排除电路中的故障？

5.9 节

61 由 110V 电压给三只并联的灯供电，$P_1=120$W，$P_2=80$W，$P_3=45$W。确保电流不超过 4A 的情况下，若电路中再接入一只灯，求其消耗的功率。

62 由 110V 电压给四只并联的灯供电，额定功率分别为 $P_1=120$W，$P_2=80$W，$P_3=60$W，$P_4=40$W。求每只灯的电流。

63 某电气设计师设计了一种手电筒，将三个电阻分别为 7Ω，6Ω 和 5Ω 的灯泡并联，供电电压为 9V。计算出各灯泡的电流值和总电流。

64 一座房子的墙壁插座电压为 120V。一台烤面包机和一盏台灯并联由插座供电。假设烤面包机的额定功率为 640W，台灯的额定功率为 62W。求：

(a) 烤面包机的阻值；
(b) 台灯的阻值；
(c) 电路的总阻值；
(d) 烤面包机和台灯的电流各为多少。

65 如图 5-83 所示是电烤箱的一个单元。它由两个电阻加热元件和一个特别的开关构成，可以通过切换开关选择两电阻串联或并联接到电压源上。若 $R_1=10\Omega$，$R_2=14\Omega$，$V_s=120$V，则计算总加热功率的最大值和最小值。

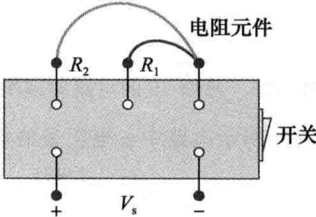


图 5-83 习题 65 的电路原理图

66 一台咖啡过滤器，一台烤面包机和一只电熨斗的电阻分别为 18Ω，17Ω 和 15Ω。若它们并联接到 120V 电压源上，计算：

(a) 总阻值；(b) 总电流。

第6章 串-并联电路

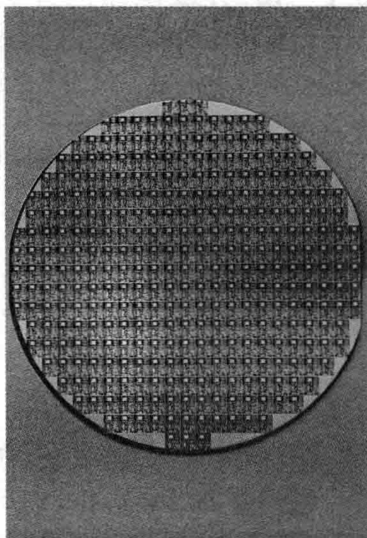
聪明人用自己的头脑思考，而无知者盲从于他人的意见。

——中国谚语

拓展职业生涯

电子学职业

电子学是电子电路分析的一个重要应用领域。“电子学”这个术语最初用于区分极低电流电路，由于功率半导体器件工作在大电流条件下，现在这种区分已经没有必要了。当今，电子学被视为研究各种应用仪器中电子的行为和影响的科学，涉及电荷在气体、真空和半导体中的运动。现代电子学包括晶体管和晶体管电路。早期的电子电路通常由分立原件组装而成。现在大多数电子电路已演变为在半导体基片或芯片上制成的集成电路。



300mm（12英寸）的硅晶片
（© Corbis RF）

电子电路在自动化、控制、广播、计算机和仪器设备等很多领域都有广泛的应用。由电子电路构成的设备或装置的数量之多已经超出我们的想象，收音机、电视机、计算机和立体音响系统等仅是电子电路的几种常见应用。

电子工程师经常会利用、设计或构建由不同电子电路构成的系统，从而实现各种不同的功能。因此，掌握电子电路的分析和运行对一个电子工程技术人员来讲是尤为重要的。电子学已经成为电气工程领域中区别于其他学科的专门学科。由于电子学领域的超越性发展，电子工程技术人员必须参加培训学校、研讨会或者在线课堂以便及时更新知识，另一种方式是成为专业机构的会员，例如成为美国电气与电子工程师协会（Institute of Electrical and Electronics Engineers，IEEE），美国认证工程技师协会（American Society of Certified Engineering Technicians，ASCET），国家认证工程技术协会（National Institute for Certification in Engineering Technologies，NICET），英属哥伦比亚应用科学技术技师协会（Applied Science Technologists and Technicians of British Columbia，ASTTBC）和设备、系统与自动控制协会（Instrumentation，Systems，and Automation Society，ISA）等组织的成员。这些组织的成员将受益于组织出版的大量的杂志、期刊、学报、会议/研讨会论文集，读者可以考虑成为其中至少一个组织的会员。

6.1 引言

掌握了串联电路和并联电路的分析之后，本章将讨论通常而言更为复杂的串-并联电路。

串-并联电路是指既包含串联又包含并联拓扑结构的电路。

串-并联电路既含有串联电路的某些属性又含有并联电路的某些属性。如图 6-1 所示为一个典型的串-并联电路。由图 6-1 可见，R_1 和 R_2 串联，R_3 和 R_4 串联，而 R_5 和 R_6 则为并联。一般来说，虽然串-并联电路较串联电路和并联电路更为复杂，但是电路分析原理相同，同样可以利用欧姆定律、KVL 和 KCL 来分析串-并联电路。

本章从典型的串-并联电路展开分析，然后讨论梯型网络和惠斯通电桥，最后学习利用计算机软件 PSpice 和 Multisim 来分析串-并联电路。

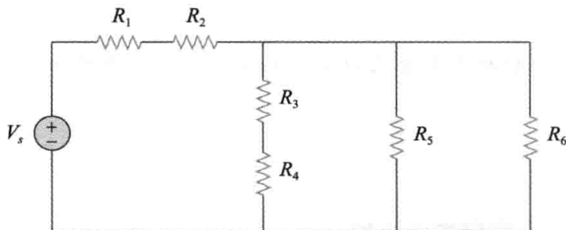


图 6-1 典型的串-并联电路

6.2 串-并联电路的分析

分析串-并联电路时，需要将每个串联组合转化为它的等效电阻，将每个并联组合转化为它的等效电阻，根据电路结构此过程可以重复多次。换而言之，就是将电路中各个串联或并联组合用其等效电阻代替直到原电路化简为简单的串联或并联电路。因此，串-并联电路的分析可以应用以下原理：

- 电阻的串联组合
- 电阻的并联组合
- 基尔霍夫电压定律（KVL）
- 基尔霍夫电流定律（KCL）
- 欧姆定律
- 分压原理
- 分流原理

下面举例具体说明如何利用这些原理分析串-并联电路。

例 6-1 试计算如图 6-2 所示电路中的 I_1、I_2 和 I_3，并计算每个电阻吸收的功率。

解：首先由电路图可以看出由于 R_2 和 R_3 连接到两个相同的节点之间，因此 R_2 和 R_3 是并联的，则它们的等效电阻为

$$R_{eq} = R_2 \mathbin{/\!/} R_3 = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{36 \times 72}{36 + 72} = 24(\Omega)$$

（其中，符号 $/\!/$ 表示并联组合）。用 R_{eq} 代替 R_2 和 R_3，则等效电路如图 6-3 所示，该等效电路为串联电路，因此对电路应用 KVL 可得，

$$-20 + I_1(16 + 24) = 0 \quad \Rightarrow \quad I_1 = 20/40 = 0.5(\text{A})$$

只要得到 I_1，就可以利用分流原理计算 I_2 和 I_3。参见图 6-2 所示电路的并联部分，则有：

$$I_2 = \frac{R_3}{R_2 + R_3} I_1 = \frac{72}{36 + 72} \times 0.5 = 333.3(\text{mA})$$

$$I_3 = \frac{R_2}{R_2 + R_3} I_1 = \frac{36}{36 + 72} \times 0.5 = 166.7(\text{mA})$$

只要得到流过该支路的电流，就可以计算该支路电阻吸收的功率，即，

$$P_1 = I_1^2 R_1 = (0.5)^2 \times 16 = 4(\text{W})$$

$$P_2 = I_2^2 R_2 = (0.3333)^2 \times 36 = 4(\text{W})$$

$$P_3 = I_3^2 R_3 = (0.1667)^2 \times 72 = 2(\text{W})$$

因此，总的吸收功率为 10W，可以计算总的提供功率来验证此结果，电源提供的功率为

$$P_s = V_s I_1 = 20 \times 0.5 = 10(\text{W})$$

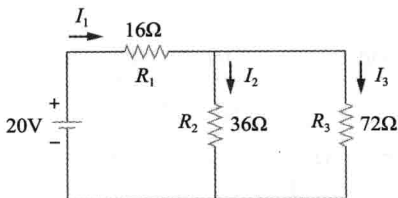


图 6-2　例 6-1 的电路原理图

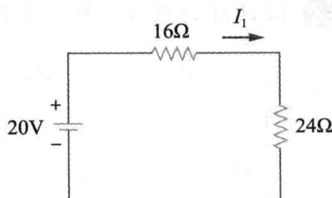


图 6-3　例 6-1 的电路原理图 ◀

练习 6-1　电路如图 6-4 所示，计算 I_1，I_2 和 I_3，并计算每个电阻吸收的功率。

答案：1.2A；0.8A；2A；57.6W；38.4W；104W

例 6-2　试计算如图 6-5 所示电路的等效电阻 R_{eq}。

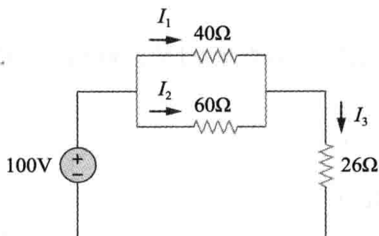


图 6-4　练习 6-1 的电路原理图

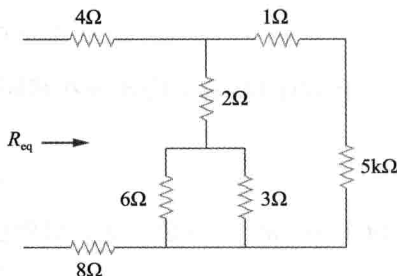


图 6-5　例 6-2 的电路原理图

解：为了计算 R_{eq}，首先判断电阻的串联和并联组合，由于 6Ω 和 3Ω 电阻连接在两个相同的节点之间，因此它们是并联的，则其等效电阻为

$$6 \parallel 3 = \frac{6 \times 3}{6 + 3} = 2(\Omega)$$

同样地，由于 1Ω 和 5Ω 电阻流过相同的电流，因此它们是串联的，等效电阻为

$$1 + 5 = 6(\Omega)$$

因此，图 6-5 所示电路化简为如图 6-6a 所示的电路。由图 6-6a 可知，两个 2Ω 电阻是串联的，则其等效电阻为

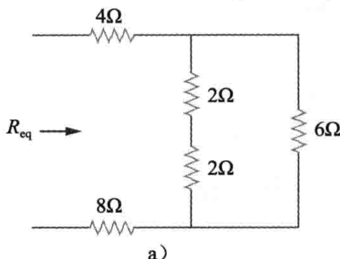
$$2 + 2 = 4(\Omega)$$

且该 4Ω 电阻与图 6-6a 中的 6Ω 电阻并联，则等效电阻为

$$4 \parallel 6 = \frac{4 \times 6}{4 + 6} = 2.4(\Omega)$$

于是用图 6-6b 所示电路代替图 6-6a 所示电路，由图 6-6b 可知，三个电阻串联在一起。因此，电路的等效电阻为

$$R_{eq} = 4 + 2.4 + 8 = 14.4(\Omega)$$



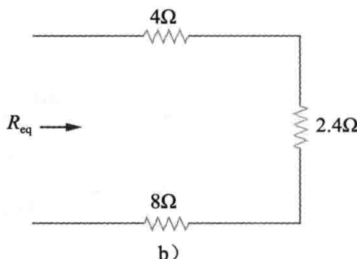


图 6-6　例 6-2 电路的等效电阻 ◀

练习 6-2　合并图 6-7 所示电路中的电阻，计算等效电阻 R_{eq}。　**答案**：6Ω

例 6-3 试计算如图 6-8 所示电路的等效电阻 R_{ab}。

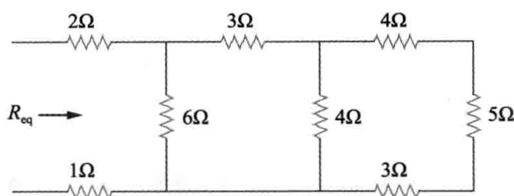


图 6-7 练习 6-2 的电路原理图

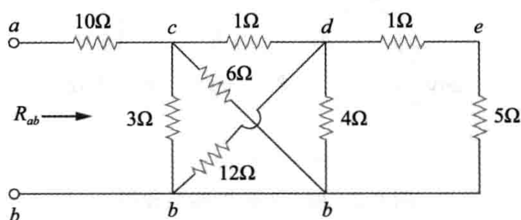


图 6-8 例 6-3 的电路原理图

解： 由于 3Ω 和 6Ω 电阻连接在相同的节点 c 和 b 之间，因此它们是并联的，则其等效电阻为

$$3 \mathbin{/\!/} 6 = \frac{3 \times 6}{3 + 6} = 2(\Omega) \tag{6-3-1}$$

同理，由于 12Ω 和 4Ω 电阻连接在相同的节点 d 和 b 之间，因此它们是并联的，则其等效电阻为

$$12 \mathbin{/\!/} 4 = \frac{12 \times 4}{12 + 4} = 3(\Omega) \tag{6-3-2}$$

另外，由于 1Ω 和 5Ω 电阻串联，因此它们的等效电阻为

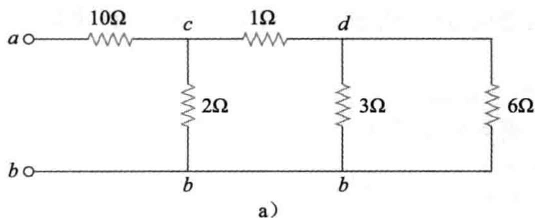
$$1 + 5 = 6(\Omega) \tag{6-3-3}$$

由于以上三个组合，可以用图 6-9a 所示电路代替图 6-8 所示电路。由图 6-9a 可知，3Ω 和 6Ω 并联，由式（6-3-1）得到等效电阻 2Ω，且该 2Ω 等效电阻与 1Ω 串联得到1+2=3Ω，因此，可以用图 6-9b 所示电路取代图 6-9a 所示电路。由图 6-9b 可知，2Ω 和 3Ω 电阻并联，可得：

$$2 \mathbin{/\!/} 3 = \frac{2 \times 3}{2 + 3} = 1.2(\Omega)$$

1.2Ω 电阻与 10Ω 电阻串联，因此有，

$$R_{ab} = 10 + 1.2 = 11.2(\Omega)$$



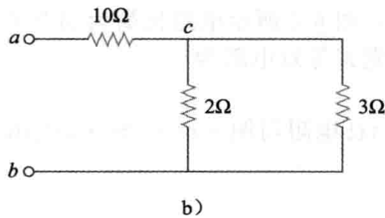


图 6-9 例 6-3 所示电路的等效电路

练习 6-3 试计算如图 6-10 所示电路中的 R_{ab}。

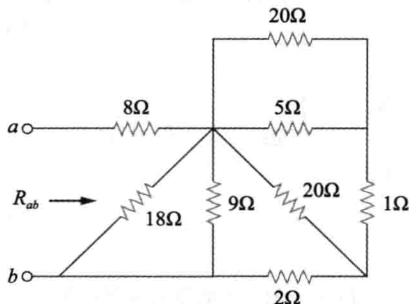


图 6-10 练习 6-3 的电路原理图

答案： 11Ω

例 6-4 试计算如图 6-11a 所示电路的等效导纳 G_{eq}。

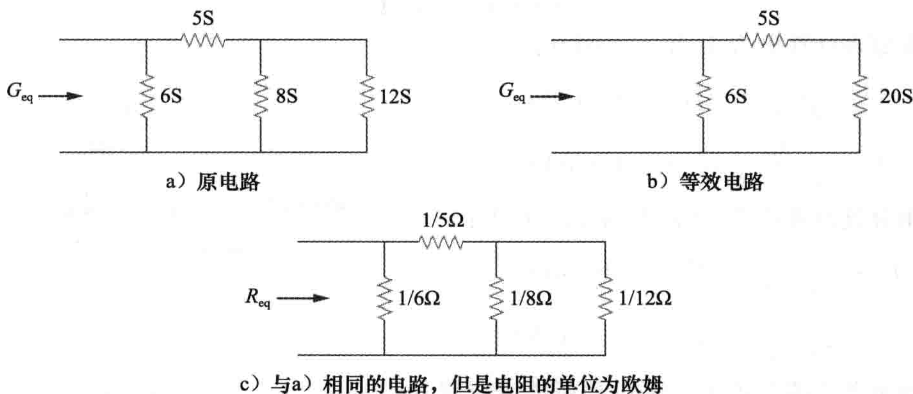


图 6-11　例 6-4 的电路原理图

解： 有两种解决办法——利用电阻计算或利用导纳计算

■ **方法 1**　8S 和 12S 电阻并联，因此它们的导纳为

$$8+12=20(\mathrm{S})$$

如图 6-11b 所示，20S 与 5S 电阻串联，因此合并后导纳为

$$\frac{20\times 5}{20+5}=4(\mathrm{S})$$

合并得到的导纳与 6S 电阻并联，因此可得，

$$G_{eq}=6+4=10(\mathrm{S})$$

■ **方法 2**　可以看出图 6-11c 所示电路与 6-11a 所示电路相同，图 6-11a 中用导纳值（单位为西门子）表示，而图 6-11c 用电阻值（单位为欧姆）表示。为了证明两个电路是一样的，计算图 6-11c 所示电路的 R_{eq} 可得，

$$R_{eq}=\frac{1}{6}\,/\!/\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{8}\,/\!/\,\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{6}\,/\!/\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{20}\right)=\frac{1}{6}\,/\!/\,\frac{1}{4}=\frac{\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{4}}=\frac{1}{10}(\Omega)$$

其中，

$$\frac{1}{8}\,/\!/\,\frac{1}{12}=\frac{\frac{1}{8}\times\frac{1}{12}}{\frac{1}{8}+\frac{1}{12}}=\frac{\frac{1}{96}}{\frac{20}{96}}=\frac{1}{20}$$

因此，

$$G_{eq}=\frac{1}{R_{eq}}=10(\mathrm{S})$$

该结果同方法 1 所得的结果相同。◀

练习 6-4　试计算如图 6-12 所示电路的 G_{eq}。

答案： 4S

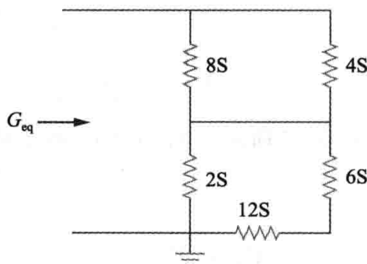


图 6-12　练习 6-4 的电路原理图

例 6-5 试计算如图 6-13 所示串-并联电路中每个电阻两端的电压。

解： 80Ω 和 20Ω 电阻并联，将它们合并可得，

$$80\,/\!/\,20=\frac{80\times 20}{80+20}=16(\Omega)$$

16Ω 电阻与 14Ω 电阻串联，可得，

$$16+14=30(\Omega)$$

利用分流原理计算电流 I_1 和 I_2，则有：

$$I_1=\frac{70}{70+30}\times 40=28(\text{mA})$$

$$I_2=\frac{30}{70+30}\times 40=12(\text{mA})$$

再次利用分流原理由 I_1 计算 I_3 和 I_4，可得：

$$I_3=\frac{20}{20+80}\times 28=5.6(\text{mA})$$

$$I_4=\frac{80}{20+80}\times 28=22.4(\text{mA})$$

图 6-13 例 6-5 和例 6-12 的电路原理图

只要得到每条支路的电流，可以利用欧姆定律计算每个电阻两端的电压，对 70Ω 电阻，

$$V_{70}=70I_2=70\times 12\times 10^{-3}=0.84(\text{V})$$

对 14Ω 电阻则有，

$$V_{14}=14I_1=14\times 28\times 10^{-3}=0.392(\text{V})$$

由于 80Ω 和 20Ω 电阻并联，它们两端的电压相同，因此可得，

$$V_{20}=V_{80}=80I_3=80\times 5.6\times 10^{-3}=0.448(\text{V})$$ ◀

练习 6-5 试计算如图 6-14 所示串-并联电路中每个电阻两端的电压。

答案： $V_{50}=1.5\text{V}$；$V_{12}=0.6\text{V}$；$V_{15}=0.75\text{V}$；$V_6=0.15\text{V}$

例 6-6 试计算如图 6-15 所示电路中的电压 V_{ab}。

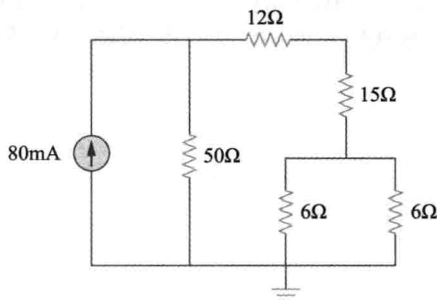


图 6-14 练习 6-5 和练习 6-12 的电路原理图

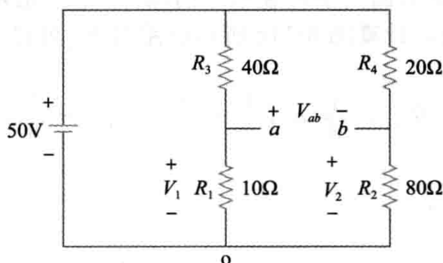


图 6-15 例 6-6 的电路原理图

解： 由于 40Ω 和 10Ω 电阻串联组合以及 20Ω 和 80Ω 电阻串联组合与 50V 电压源并联，因此利用分压原理计算 V_1 和 V_2，可以得到：

$$V_1=\frac{10}{10+40}\times 50=10(\text{V})$$

$$V_2=\frac{80}{80+20}\times 50=40(\text{V})$$

如图 6-16 所示，对回路 *oabo* 应用 KVL，

$$-V_1+V_{ab}+V_2=0$$

即，

$$V_{ab}=V_1-V_2=10-40=-30(\text{V})$$ ◀

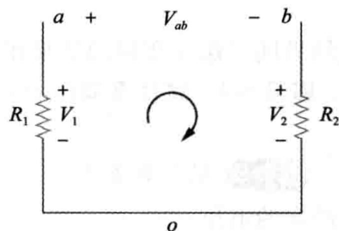


图 6-16 例 6-6 的电路原理图

练习 6-6 试计算如图 6-17 所示电路中的电流 I。

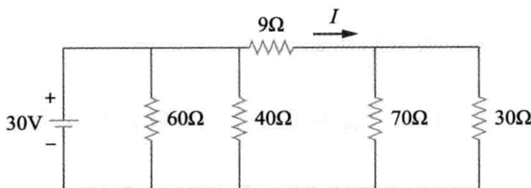


图 6-17 练习 6-6 的电路原理图

答案： 1A

6.3 梯形网络

梯形网络是特殊的串-并联电路，它由一系列串联和并联的电阻器构成，如图 6-18 所示为一个典型的梯形网络。由于该网络的构造类似阶梯形状，因此有时电路图也画成类似“阶梯”的形状。

梯形网络可以作为参考电压源，产生 1/2，1/4，1/8 等类似数值的电压，因而在数模转换器（DAC）电路中经常使用。其中一种称为 $R/2R$ 的特殊梯形网络如图 6-19 所示（LSB 表示最低有效位，MSB 表示最高有效位）。数字信息每个字的每一位分别传递给梯形网络，从而可以在参考电压和地之间进行切换。

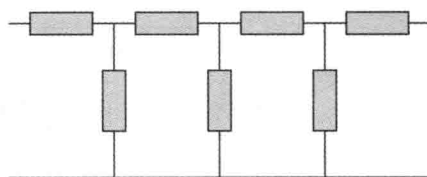


图 6-18 梯形网络

梯形电路是拓扑结构类似于阶梯状的串-并联电路。

分析梯形网络和分析其他串-并联电路是一样的，只是通常采用倒序的方式展开分析，以下通过例题阐明这种分析方式。

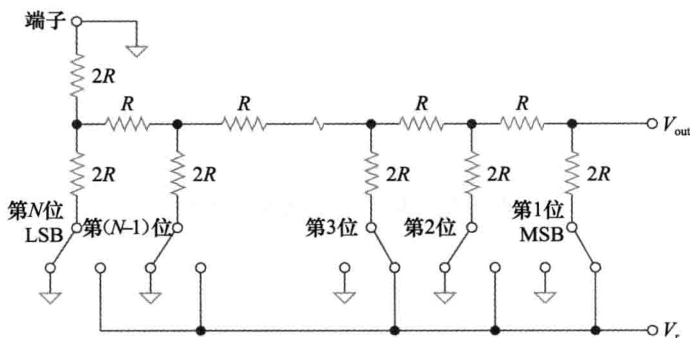


图 6-19 数模转换器中的 N 比特 $R/2R$ 梯形网络

图片由 TT Electronics IRC 提供

例 6-7 试计算如图 6-20 所示梯形电路中的电压 V_o。

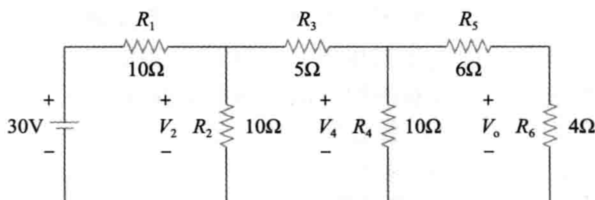


图 6-20 例 6-7 的电路原理图

解：由图 6-20 可知，R_5 和 R_6 串联，因此合并后电阻为

$$6+4=10(\Omega)$$

该 10Ω 与 $R_4=10\Omega$ 并联，因此合并后电阻为

$$10 /\!/ 10=5(\Omega)$$

由此可得等效电路如图 6-21a 所示，5Ω 与 $R_3=5\Omega$ 串联，合并后可得，

$$5+5=10(\Omega)$$

再次，该 10Ω 电阻与另一个 10Ω 电阻并联，合并后可得阻值为 5Ω。因此，等效电路如图 6-21b 所示，利用分压原理可得，

$$V_2=\frac{5}{5+10}\times 30=10(\mathrm{V})$$

由此按顺序计算便可得到 V_o。如图 6-21a 所示，电压 $V_2=10\mathrm{V}$ 由两个 5Ω 电阻均分，即，$V_4=10/2=5\mathrm{V}$。同理，$V_4=5\mathrm{V}$ 又由 6Ω 和 4Ω 电阻分压。因此，由分压原理可得，

$$V_o=\frac{4}{4+6}\times 5=2(\mathrm{V})$$

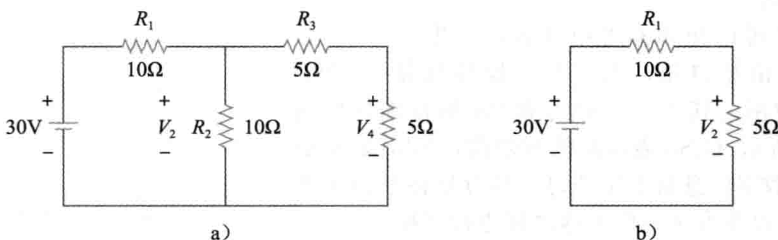


图 6-21 例 6-7 的等效电路 ◀

练习 6-7 如图 6-22 所示电路称为 $R/2R$ 梯形电路，令 $R=10\mathrm{k}\Omega$，试计算 I_x。

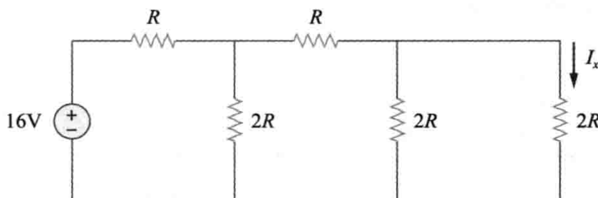


图 6-22 练习 6-7 的电路原理图

答案：0.2mA

6.4 受控源

到目前为止，前面的内容已经讨论了含有独立电源电路的分析方法。独立电压源的符号如图 6-23a 所示，独立电流源的符号则如图 6-23b 所示。独立源为电路提供的电压或电流不受电路其余部分的影响。

由于受控源是电路中其他元件的抽象模型，因此它是电路中非常重要的元件。在电路中经常采用菱形符号表示受控源，如图 6-24 所示。由于受控源的控制变量为电路中其他元件的电压或电流，且既可以为受控电压源也可以为受控电流源，所以有四种可能类型的受控源：

1）电压控制电压源（VCVS），参见图 6-24a；
2）电压控制电流源（VCCS），参见图 6-24b；
3）电流控制电压源（CCVS），参见图 6-24c；

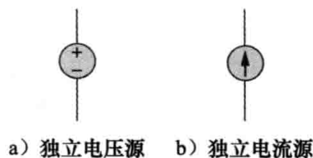


图 6-23 独立源

4）电流控制电流源（CCCS），参见图 6-24d。

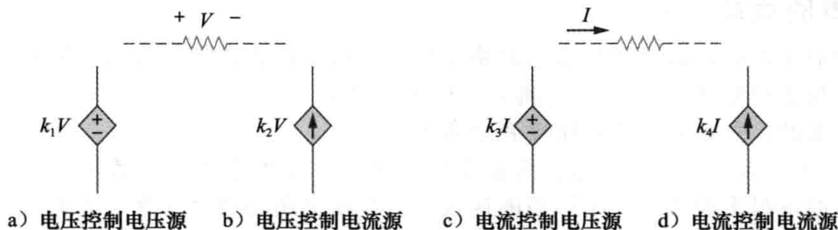


图 6-24 受控源

受控源不同于独立源，不能作为电路的输入，它们仅是有源电路元件的抽象模型。例如，可以利用电压控制电压源来描述运算放大器（operation amplifier，op amp）。

受控源就是与电路中其他电压或电流成比例的电压源或电流源。

例 6-8 试计算如图 6-25 所示电路中的电压 V_x。

解：对回路应用 KVL 可以得到，

$$-12+5I+2V_x=0$$

由于 $5I=V_x$，可得：

$$-12+V_x+2V_x=0 \quad \Rightarrow \quad 3V_x=12$$

$$V_x=4\text{V}$$ ◀

练习 6-8 试计算如图 6-26 所示电路中电压 V_x。

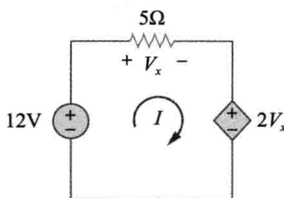


图 6-25 例 6-8 的电路原理图

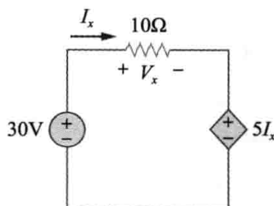


图 6-26 练习 6-8 的电路原理图

答案：20V

例 6-9 试计算如图 6-27 所示电路中电压 V_x。

解：令 I 为流过 10Ω 电阻的电流，并假定电流方向为从上到下。

$$I=2+0.2V_x$$

$$V_x=10I=20+2V_x$$

因此，求解方程可以得到 V_x，即

$$V_x=-20\text{V}$$ ◀

练习 6-9 试计算如图 6-28 所示电路中电压 V_x。

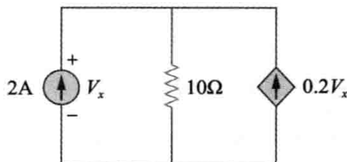


图 6-27 例 6-9 的电路原理图

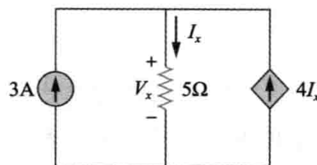


图 6-28 练习 6-9 的电路原理图

答案：-5V

6.5 仪表的负载效应

当类似电压表或电流表的仪表与电路连接时，由于仪表自身存在的内阻，会影响仪表读数，同时仪表也要从电路中吸收能量，这就是负载效应（loading effect）。考虑负载效应是非常重要的，尤其是对测量精度要求高的场合。

如图 6-29 所示，当电压表与被测量支路并联时，在理想状态下要求电压表内阻无限大，也就是说内阻无限大时，电压表的连接不会改变电路的运行状况。然而实际电压表含有内阻 R_V，为了减弱负载效应，电压表内阻应该尽可能的大。R_V 的值越大，负载效应的影响越小。

同样地，如图 6-30 所示的电流表与测量支路串联的典型电路，理想状态时电流表内阻应该为零，以确保电路电阻保持不变。然而，实际电流表内阻为有限值 R_A。如果电流表与阻值较大的电阻连接，则可以忽略 R_A 的影响。但是当电流表与一个阻值相对小的电阻串联时，则不可以忽略 R_A 的影响。

由仪表引入的误差百分比可以按照下式计算，

$$\text{误差}(\%)=\frac{\text{理想值}-\text{测量值}}{\text{理想值}}\times 100 \tag{6-1}$$

其中，当没有仪表或仪表为理想仪表时可以得到理想值，而通过仪表得到的即为测量值。不同情形的误差允许范围不同，一个公认的原则是负载效应的误差不超过百分之五。

例 6-10 电路如图 6-31 所示，如果采用内阻为 10MΩ 电压表测量 V_1 和 V_2，试计算负载效应。

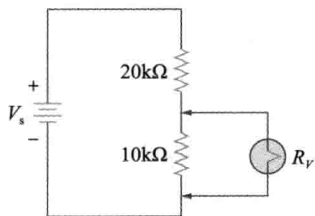


图 6-29 电压表的负载效应

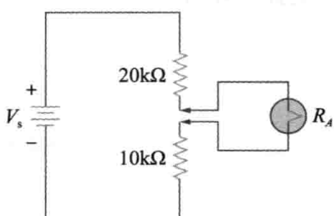


图 6-30 电流表的负载效应

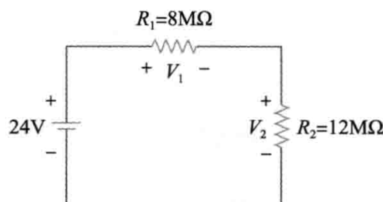


图 6-31 例 6-10 的电路原理图

解： 需要分别计算有无仪表负载时的电压值。当电压表没有接入电路中时，V_1 和 V_2 为无负载（或理想）的电压值。利用分压原理可得，

$$V_1=\frac{R_1}{R_1+R_2}V_s=\frac{8\text{M}\Omega}{8\text{M}\Omega+12\text{M}\Omega}\times 24\text{V}=9.6\text{V}$$

$$V_2=\frac{R_2}{R_1+R_2}V_s=\frac{12\text{M}\Omega}{8\text{M}\Omega+12\text{M}\Omega}\times 24\text{V}=14.4\text{V}$$

当电压表连接入电路时，V_1 和 V_2 为负载（或测量）电压值。计算 V_1，如图 6-32a 所示电压表与 R_1 并联，则 R_1 和 R_V 的并联组合可得，

$$R_{T1}=R_1 /\!/ R_V=\frac{R_1R_V}{R_1+R_V}=\frac{8\times 10}{8+10}\text{M}\Omega=4.444\text{M}\Omega$$

因此，

$$V_1'=\frac{R_{T1}}{R_{T1}+R_2}V_s=\frac{4.444\text{M}\Omega}{4.444\text{M}\Omega+12\text{M}\Omega}\times 24\text{V}=6.486\text{V}$$

计算 V_2，如图 6-32b 所示电压表与 R_1 并联，则 R_2 和 R_V 的并联组合可得，

$$R_{T2}=R_2 /\!/ R_V=\frac{R_2R_V}{R_2+R_V}=\frac{12\times 10}{12+10}\text{M}\Omega=5.455\text{M}\Omega$$

因此，

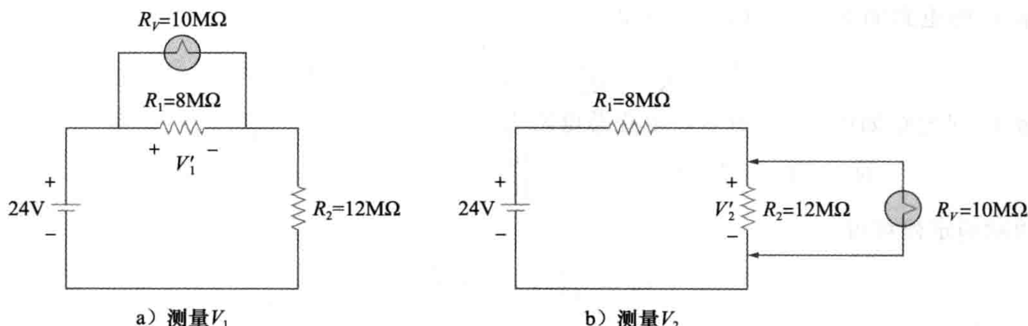


图 6-32　读数效果

$$V_2' = \frac{R_{T2}}{R_{T2}+R_1}V_s = \frac{5.455\text{M}\Omega}{5.455\text{M}\Omega + 8\text{M}\Omega} \times 24\text{V} = 9.730\text{V}$$

测量 V_1 时，由电压表引入的误差为

$$误差(\%) = \frac{V_1 - V_1'}{V_1} \times 100 = \frac{9.6 - 6.486}{9.6} \times 100 = 32.44\%$$

而测量 V_2 时，由电压表引入的误差为

$$误差(\%) = \frac{V_2 - V_2'}{V_2} \times 100 = \frac{14.4 - 9.730}{14.4} \times 100 = 32.43\%$$

由此可以看出，误差百分比相当高，这是由于电压表内阻 R_V 与 R_1 和 R_2 阻值相当，因此增加 R_V 就可以降低误差。◀

练习 6-10　电路如图 6-33 所示，试计算测量 V_3 时引入的误差百分比。假定电压表内阻为 12MΩ。　**答案：** 38.46%

例 6-11　如果采用内阻为 5Ω 电流表，试计算如图 6-34 所示电路中 I_1、I_2 和 I_T 的理想值和测量值。

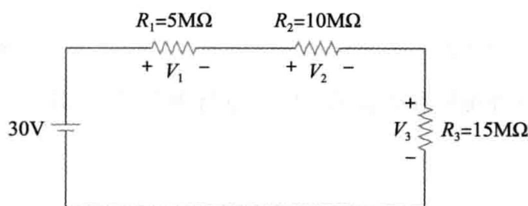


图 6-33　练习 6-10 的电路原理图

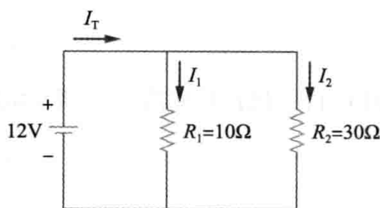


图 6-34　例 6-11 的电路原理图

解： 当电流表没有接入电路或电流表内阻为零时，可以得到这些参量的理想值。利用欧姆定律，可得

$$I_1 = \frac{V_s}{R_1} = \frac{12}{10} = 1.2(\text{A})$$

$$I_2 = \frac{V_s}{R_2} = \frac{12}{30} = 0.4(\text{A})$$

利用基尔霍夫电流定律，可得，

$$I_T = I_1 + I_2 = 1.2 + 0.4 = 1.6(\text{A})$$

通过在每条支路串联电流表可以获得电流的测量值。测量 I_1 时电路如图 6-35a 所示，流过电流表的电流为

$$I_1' = \frac{V_s}{R_1 + R_A} = \frac{12}{10+5} = 0.8(\text{A})$$

测量 I_2 时电路如图 6-35b 所示，可得，

$$I_2' = \frac{V_s}{R_2 + R_A} = \frac{12}{30+5} = 0.343(\mathrm{A})$$

测量 I_T 时电路如图 6-35c 所示，电路总电阻为

$$R_T = R_A + R_1 \mathbin{/\!/} R_2 = 5 + \frac{10 \times 30}{10+30} = 5 + 7.5 = 12.5(\Omega)$$

利用欧姆定律可得，

$$I_T' = \frac{12}{12.5} = 0.96(\mathrm{A})$$

由此可知，

$$I_T' \neq I_1' + I_2'$$

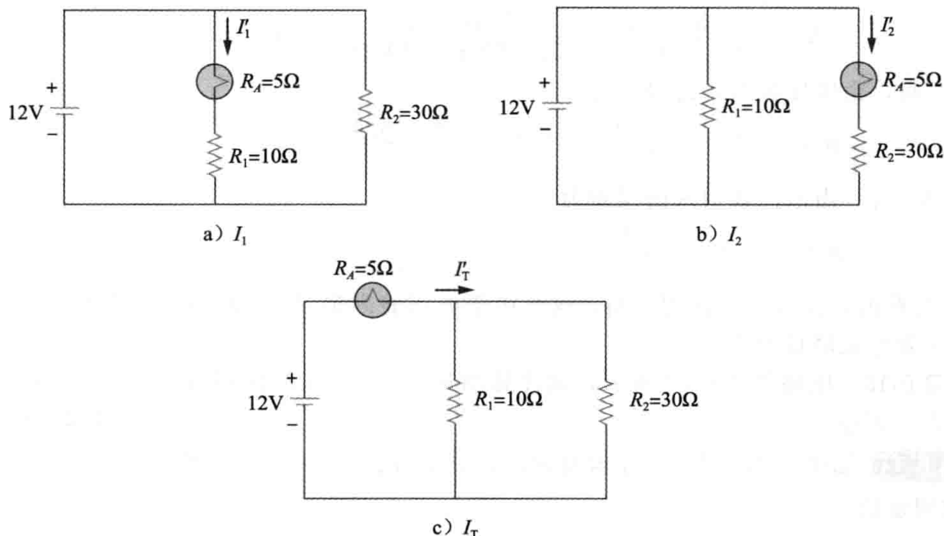


图 6-35 测量电路图 ◀

练习 6-11 试计算如图 6-36 所示电路中 I_T 的理想值和测量值。假定电流表内阻为 2Ω。

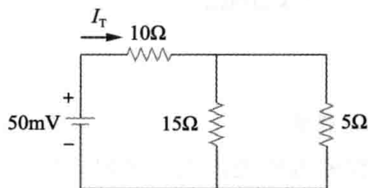


图 6-36 练习 6-11 的电路原理图

答案： 3.636A；3.175A

6.6 计算机辅助分析

6.6.1 PSpice

利用 PSpice 可以很方便地计算串-并联电路中的支路电流和节点电压，下面以例进行说明。

例 6-12 在如图 6-13 所示电路中，试利用 PSpice 计算电流 I_1 和 I_4。

解： 画出如图 6-37 所示的电路示意图。要进行直流分析，选择电流源 IDC。电路绘制

完毕后保存为文件“exam612. dsn”，通过选择 PSpice/New Simulation Profile 进行电路仿真。在 New Simulation 对话框中，输入“exam612”作为文件名并单击 Create。之后弹出仿真设置对话框，由于仅进行直流分析，因此直接单击 OK 按钮。然后选择 PSpice/Run，电路仿真开始，如图 6-37 所示节点电压直接显示在电路中，然后可以手动计算支路电流，可得：

$$I_1 = \frac{840-448}{14} = 28(\text{mA})$$

$$I_2 = \frac{840}{70} = 12(\text{mA})$$

$$I_3 = \frac{448}{80} = 5.6(\text{mA})$$

$$I_4 = \frac{448}{20} = 22.4(\text{mA})$$

该结果与例 6-5 的结果一致。◀

练习 6-12　在如图 6-14 所示的串-并联电路中，试利用 PSpice 计算每个电阻的电压。

答案： $V_{50}=1.5\text{V}$；$V_{12}=0.6\text{V}$；$V_{15}=0.75\text{V}$；$V_6=0.15\text{V}$

6.6.2 Multisim

同上一章利用 Multisim 软件分析串联和并联电路一样，Multisim 同样可以分析串-并联电路。Multisim 软件中含有可以测量电阻的万用表和测量功率的瓦特表。下面以实例具体说明如何利用 Multisim 分析串-并联电路。

例 6-13　参见如图 6-38 所示电路，(a) 试利用 Multisim 计算 R_{eq}。(b) 试利用 Multisim 计算 V_o。

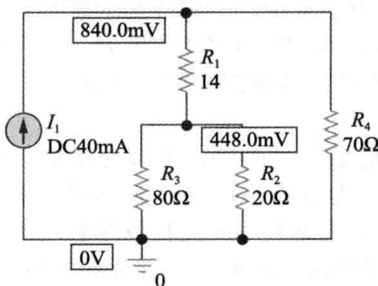


图 6-37　例 6-12 电路的 PSpice 电路示意图

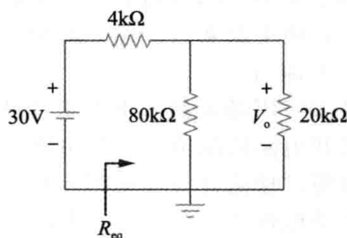


图 6-38　例 6-13 的电路原理图

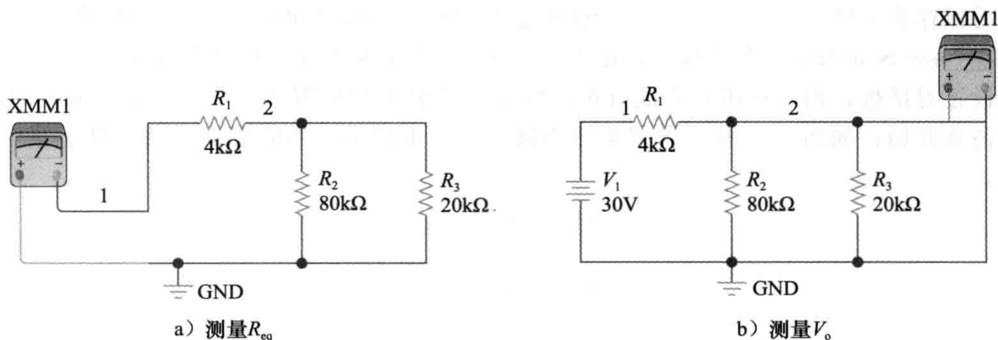
解： (a) 参照图 6-39a 所示连接电路，用可以测量电压、电流或电阻的万用表代替电压源。因此，利用它可以测量等效电阻 R_{eq}，双击万用表并选择欧姆挡。保存和仿真电路后可以得到，

$$R_{eq} = 20\text{k}\Omega$$

不同于直接显示读数的电压表和电流表，万用表不直接显示测量结果。在仿真结束后，双击万用表就可以看到显示的结果。

(b) 参照图 6-39b 所示连接电路，虽然可以利用电压表来测量 V_o，但为了让读者更为熟悉万用表，依然选择万用表。因此，将万用表与 20kΩ 电阻器并联来测量电压 V_o，并且万用表选择直流电压挡。保存和仿真电路后，双击万用表可以得到，

$$V_o = 24\text{V}$$



a）测量R_{eq}　　b）测量V_o

图 6-39　例 6-13 的电路图 ◀

练习 6-13　试利用 Multisim 计算如图 6-40 所示电路中的支路电流 I_o。

答案： 0.5mA

†6.7　应用：惠斯通电桥

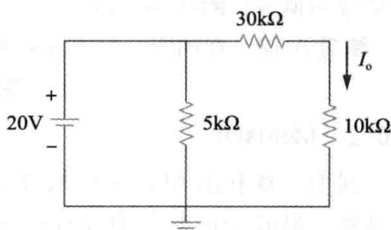


图 6-40　练习 6-13 的电路原理图

除梯形网络外，串-并联电路还有许多其他的应用，例如收音机、电视机和计算机等大部分电子仪器和设备内都含有串-并联电路。本节将讨论串-并联电路的一个重要应用——惠斯通电桥（Wheatstone bridge）电路。

惠斯通电桥是通过调节已知电阻使得测量电流为零，从而确定未知电阻值的电子电路。

虽然利用欧姆表是测量电阻值的一种最简单的方法，但利用惠斯通电桥测量电阻则会得到更为精确的测量结果。欧姆表的测量量程被设计为小量程、中量程和大量程，而惠斯通电桥则主要用于测量阻值位于中量程范围内的电阻，即 1Ω～1MΩ 的电阻。阻值极低的电阻可以利用毫欧表（milliohmmeter）测量，而阻值极高的电阻可以利用兆欧表（Megger tester）测量。

在许多应用场合都采用了惠斯通电桥[⊖]（或称为电阻桥）电路，本节介绍如何利用它来测量未知电阻的阻值。未知电阻 R_x 与电桥的连接方式如图 6-41 所示，调节可变电阻直至无电流流过检流计（参见图 6-42）为止，检流计实际上就是一套达松伐尔转动装置，与微安培表类似作为一种灵敏的电流指示装置。（达松伐尔转动就是一个直流线圈转动装置，其中电磁感应铁心悬挂在永久磁体的两极之间。）转动线圈电子电流检测装置在早期即被称为检流计。当电流流过磁场中的线圈，线圈随电流成比例的发生扭曲。当没有电流流过检流计时，$V_1=V_2$，称电桥处于平衡（balanced）状态。由于没有电流流过检流计，所以 R_1 与 R_2 之间的连接关系如同串联，R_3 与 R_x 也是如此。利用分压原理可得：

$$V_1=\frac{R_2}{R_1+R_2}V=V_2=\frac{R_x}{R_3+R_x}V \tag{6-2}$$

因此，满足如下条件时没有电流流过检流计：

$$\frac{R_2}{R_1+R_2}=\frac{R_x}{R_3+R_x}\quad\Rightarrow\quad R_2R_3=R_1R_x$$

即

⊖ 历史摘记：惠斯登电桥是由英国教授查尔斯·惠斯通（Charles Wheatstone，1802—1875）发明的，惠斯通还发明了电报，与美国工程师塞缪尔·摩尔斯（Samuel Morse）独立发明电报的时间相同。

$$\boxed{R_x = \frac{R_3}{R_1}R_2} \tag{6-3}$$

如果 $R_1=R_3$，并且调节 R_2 直至没有电流流过检流计，则有 $R_x=R_2$。除测量电阻外，惠斯通电桥还可以用来测量电容值和电感值，将在后续章节具体讨论。

惠斯通电桥可以在平衡模式和非平衡模式两种状态下使用。当惠斯通桥不平衡（unbalanced）时，如何确定流过检流计的电流呢？实际上例 6-6 处理了与此相类似的问题，只要利用 KVL 就可以了。非平衡惠斯通电桥经常应用于测量如拉力、温度和压力等物理参量。待测参量值取决于电桥的非平衡程度。

例 6-14 在如图 6-41 所示电路中，$R_1=500\Omega$，$R_3=200\Omega$，并且当 R_2 调节到 125Ω 时，电桥处于平衡状态，试求未知电阻 R_x。

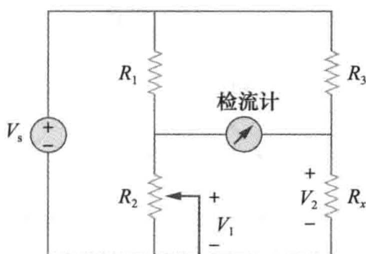


图 6-41 惠斯通桥；例 6-14 和习题 63 的电路原理图



图 6-42 检流计
（© Sarhan M. Musa）

解：利用式（6-3）可得：

$$R_x = \frac{R_3}{R_1}R_2 = \frac{200}{500}\times 125 = 50(\Omega)$$ ◀

练习 6-14 在惠斯通电桥电路中，$R_1=R_3=1\text{k}\Omega$，调节 R_2 直至无电流流过检流计，此时 $R_2=3.2\text{k}\Omega$，试问未知电阻的阻值为多少？ **答案**：3.2kΩ

6.8 本章小结

1）串-并联电路结合了串联电路和并联电路的特点。
2）合并串联和并联的电阻就可以得到串-并联电路的总电阻。
3）利用 KVL、KCL、欧姆定律、分压原理和分流原理来计算支路电压和支路电流。
4）梯形网络是电路原理图结构类似于阶梯的串-并联电路。
5）受控源是有源电子电路元件的抽象模型。受控源的值与电路中其他的电压或电流成比例。
6）由于负载效应的影响，电压表和电流表的测量存在误差。
7）可以利用 PSpice 和 Multisim 软件来分析串-并联电路。
8）惠斯通电桥是精确测量电阻的电子电路。当输出电压为零时，电桥达到平衡。当电桥一侧的电阻之比等于另一侧电阻之比时，电桥的平衡条件满足。因此，

$$R_x = \frac{R_3}{R_1}R_2$$

复习题

1 60Ω 和 40Ω 电阻的并联组合与 10Ω 和 30Ω 电阻串联组合串联在一起，总电阻是：
(a) 140Ω (b) 64Ω
(c) 31.5Ω (d) 7.5Ω

2 图 6-43 所示电路中的电流 I_x 是：

(a) 12A (b) 7A

(c) 5A (d) 2A

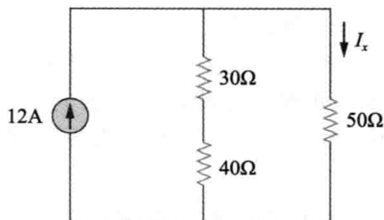


图 6-43 复习题 2 到 4 的电路原理图

3 若图 6-43 所示电路中的 30Ω 电阻被短路，则 I_x 为：

(a) 12A (b) 6.777A

(c) 5.333A (d) 0A

4 若图 6-43 所示电路中的 40Ω 电阻开路，则 I_x 为：

(a) 12A (b) 7.5A

(c) 4.5A (d) 0A

5 图 6-44 所示的电路属于何种类型？

(a) 串联 (b) 并联

(c) 梯形 (d) 惠斯通电桥

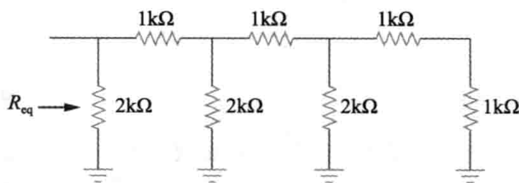


图 6-44 复习题 5 和 6 的电路原理图

6 图 6-44 所示电路的等效电阻 R_{eq}是：

(a) 1kΩ (b) 2kΩ

(c) 3kΩ (d) 10kΩ

7 梯形电路中，化简电路应该开始于：

(a) 电源

(b) 中心

(c) 离电源最近的电阻

(d) 离电源最远的电阻

8 惠斯通电桥是测量阻值非常小的电阻的有效方法。

(a) 正确 (b) 错误

9 图 6-45 所示的惠斯通电桥电路达到平衡状态。

(a) 正确 (b) 错误

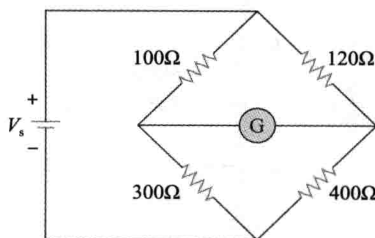


图 6-45 复习题 9 的电路原理图

10 下面哪个变量值不可以利用惠斯通电桥测量？

(a) 电阻 (b) 电感

(c) 温度 (d) 功率

答案：1 (b)，2 (b)，3 (c)，4 (a)，5 (c)，6 (a)，7 (d)，8 (a)，9 (b)，10 (d)

习题

6.2 节

1 给定电路如图 6-46 所示，识别其中电阻的串联和并联关系。

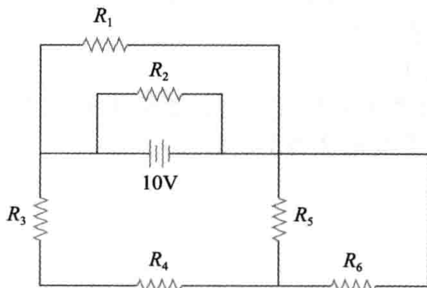


图 6-46 习题 1 的电路原理图

2 试计算图 6-47 所示电路中的 R_{ab}。

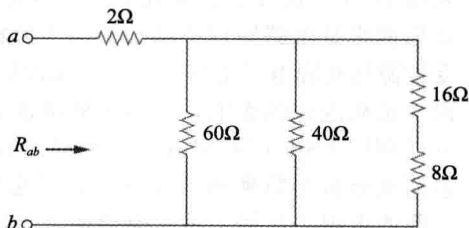


图 6-47 习题 2 的电路原理图

3 试计算图 6-48 所示电路中的 R_T。

4 试计算图 6-49 所示电路中 $a-b$ 两端的等效电阻。

5 试计算图 6-50 所示电路中的等效电阻。

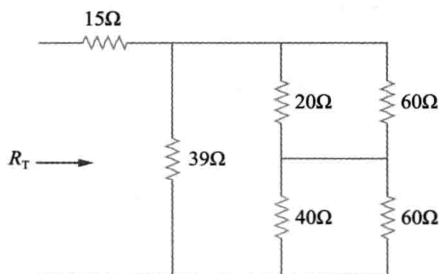


图 6-48　习题 3 的电路原理图

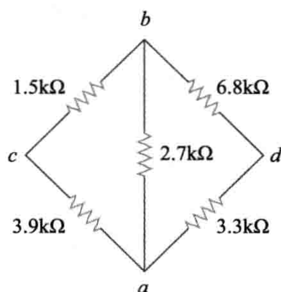


图 6-49　习题 4 的电路原理图

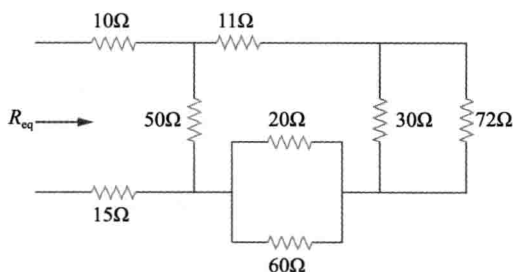


图 6-50　习题 5 的电路原理图

6　令 $R=5\text{k}\Omega$，试计算图 6-51 所示电路中的 R_{eq}。

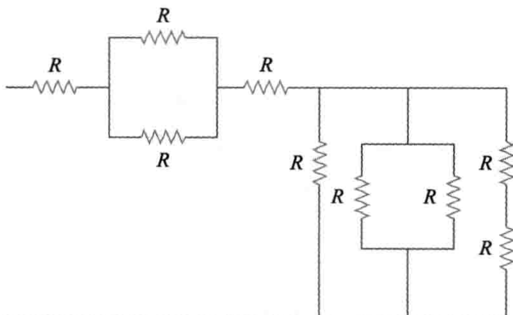


图 6-51　习题 6 的电路原理图

7　试计算图 6-52 所示电路中的 R_{ab}。

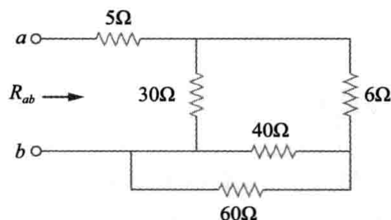


图 6-52　习题 7 的电路原理图

8　电路如图 6-53 所示，试求解等效电阻 R_{ab}。

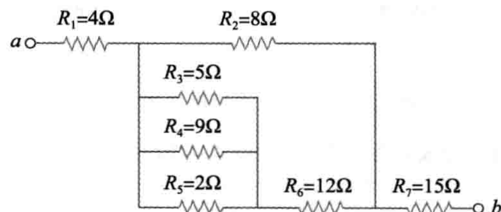


图 6-53　习题 8 的电路原理图

9　试计算图 6-54 所示电路的等效电阻 R_T。

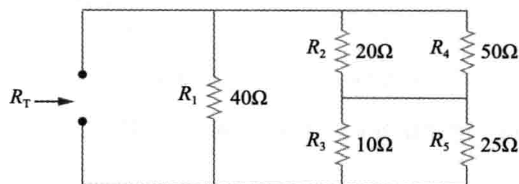


图 6-54　习题 9 的电路原理图

10　电路如图 6-55 所示，试求解等效电阻 R_{eq}和电流 I_T。

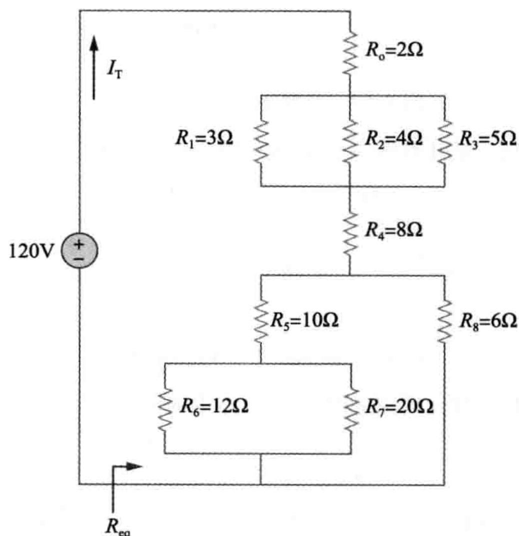


图 6-55　习题 10 的电路原理图

11　试求解图 6-56 所示电路中的 I_o。

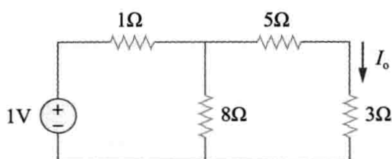


图 6-56　习题 11 的电路原理图

12　试计算图 6-57 所示电路中每个电阻的电压。

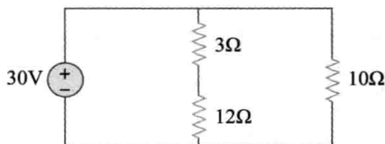


图 6-57　习题 12 的电路原理图

13　试求解图 6-58 所示电路中的电流 I。

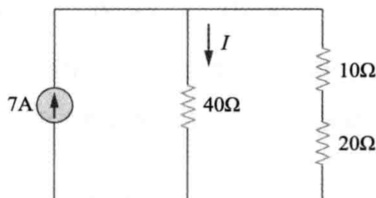


图 6-58　习题 13 的电路原理图

14　试计算图 6-59 所示电路中的电压 V_{ab}。

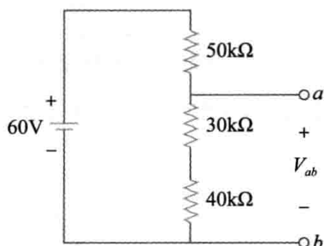


图 6-59　习题 14 的电路原理图

15　试计算图 6-60 所示电路中的电压 V_o。

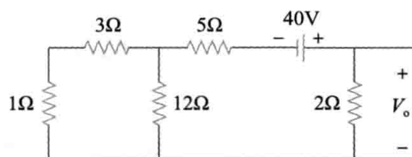


图 6-60　习题 15 的电路原理图

16　试计算图 6-61 所示电路中的 I_o。

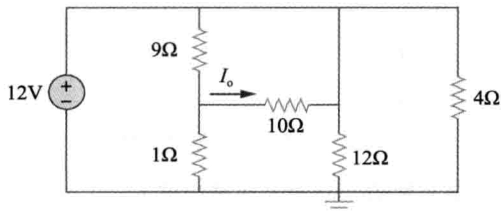


图 6-61　习题 16 和习题 51 的电路原理图

17　试计算图 6-62 所示电路中的每个电阻的电压。

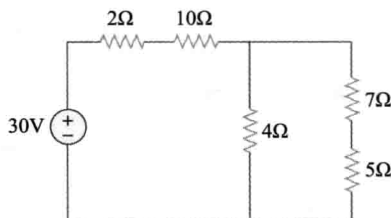


图 6-62　习题 17 的电路原理图

18　试求解图 6-63 所示电路中的电流 I_x。

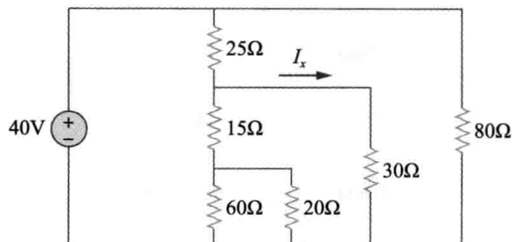


图 6-63　习题 18 的电路原理图

19　试计算图 6-64 所示电路中的每个电阻的电压。

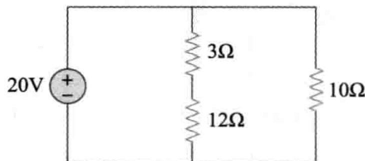


图 6-64　习题 19 的电路原理图

20　电路如图 6-65 所示，试求解节点电压 V_1 和 V_2。

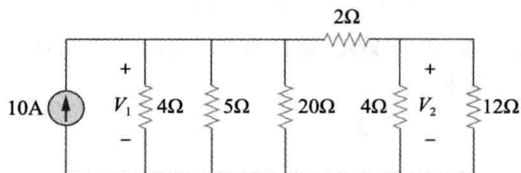


图 6-65　习题 20 的电路原理图

21　电路如图 6-66 所示，试计算 I_T。

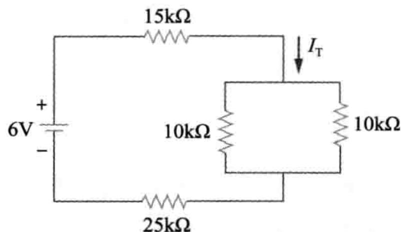


图 6-66　习题 21 的电路原理图

22 试计算图 6-67 所示电路中的 V_s 和 V_o。

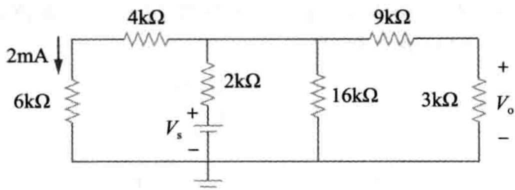


图 6-67 习题 22 的电路原理图

23 电路如图 6-68 所示，其中所有电阻均为 1Ω。试计算（a）$a-b$ 两端的 R_T（b）$c-d$ 两端的 R_T。

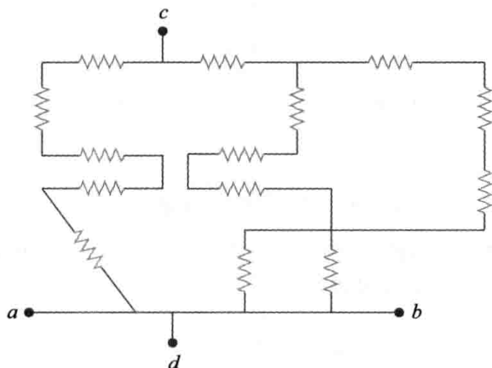


图 6-68 习题 23 的电路原理图

24 （a）电路如图 6-69 所示，试求解 V_o。

（b）当 R_4 短路时重新计算（a）。

（c）当 R_5 开路时重新计算（a）。

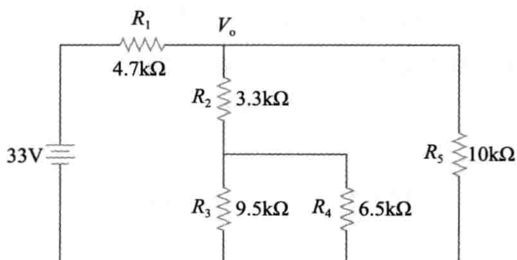


图 6-69 习题 24 的电路原理图

25 若图 6-70 所示电路中的 AB 支路开路，试计算 V_{AB}。

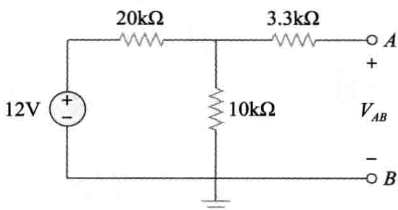


图 6-70 习题 25 的电路原理图

26 电路如图 6-71 所示，计算满足下列条件时电阻 R_{AB} 的值：（a）输出端开路，（b）输出端短路，（c）输出端连接一个 200Ω 电阻。

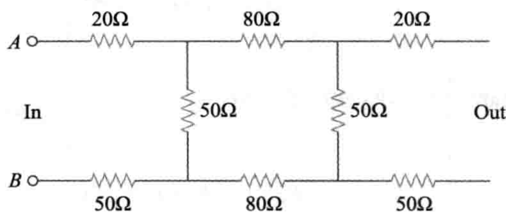


图 6-71 习题 26 的电路原理图

27 试求解图 6-72 所示电路的等效电阻 R_{AB}。

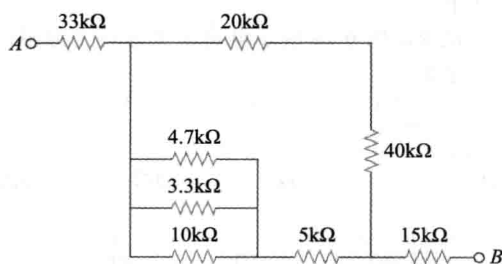


图 6-72 习题 27 的电路原理图

28 电路如图 6-73 所示，试计算（a）等效电阻 R_{eq}，（b）电流 I，（c）消耗的总功率，（d）电压 V_1 和 V_2。

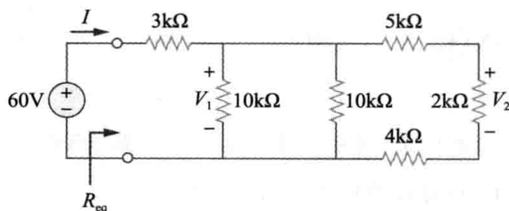


图 6-73 习题 28 的电路原理图

29 电路如图 6-74 所示，试求解 R_{eq} 和 I。

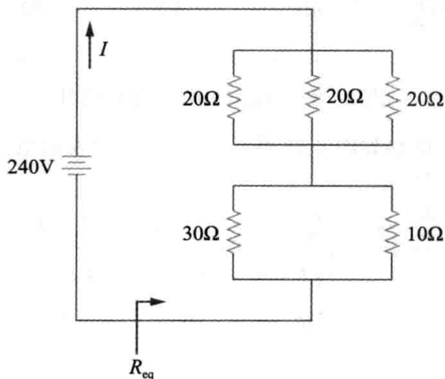


图 6-74 习题 29 的电路原理图

30 参考如图 6-75 所示的电路，试计算等效电阻 R_{eq}和电流 I_t。

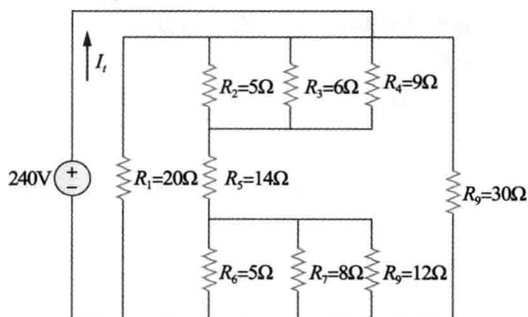


图 6-75 习题 30 的电路原理图

6.3 节

31 试求解图 6-76 所示电路中流过每个电阻的电流。

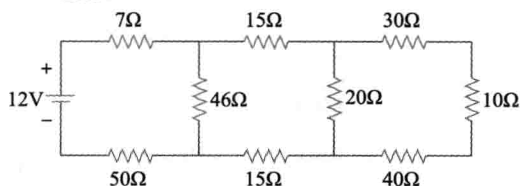


图 6-76 习题 31 和习题 32 的电路原理图

32 电路如图 6-76 所示，试计算每个电阻的电压。

33 试计算图 6-77 所示电路中的 V_o。

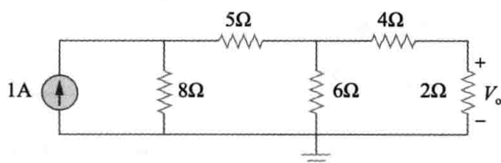


图 6-77 习题 33 和习题 52 的电路原理图

34 试计算图 6-78 所示电路中的 V_x。

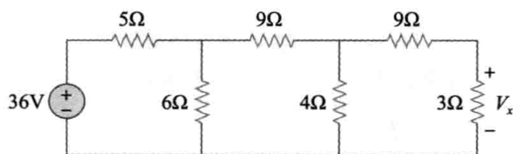


图 6-78 习题 34 的电路原理图

35 电路如图 6-79 所示，用 I_o 分别表示电流 I_1 到 I_6。

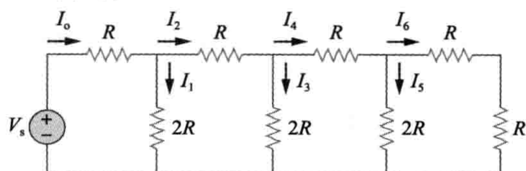


图 6-79 习题 35 的电路原理图

6.4 节

36 图 6-80 所示为一个电压控制电压源电路，试计算 I 和 V_o。

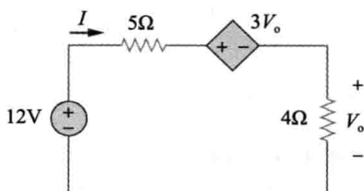


图 6-80 习题 36 的电路原理图

37 试计算图 6-81 所示电路中的 R 和 V。

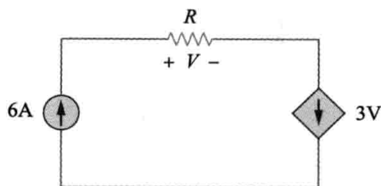


图 6-81 习题 37 的电路原理图

38 若电流 I_o 为 2A，试计算图 6-82 所示电路中 R 的阻值。

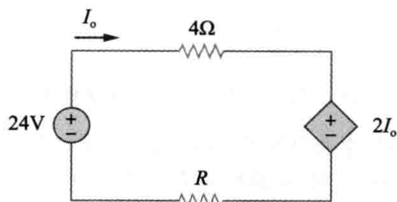


图 6-82 习题 38 的电路原理图

39 试求解图 6-83 所示电路中的电流 I。

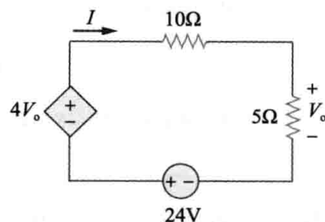


图 6-83 习题 39 的电路原理图

40 试计算图 6-84 所示电路中的 I。

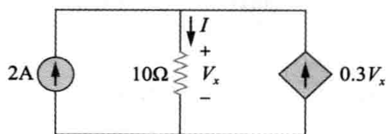


图 6-84 习题 40 的电路原理图

41 试计算图 6-85 所示电路中的 V_o。

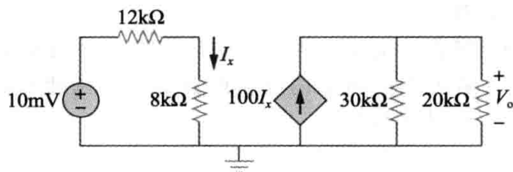


图 6-85　习题 41 的电路原理图

6.5 节

42　给定如图 6-86 所示的网络：(a) 求解 V_1，(b) 10MΩ 电压表并接在 R_1 两端时电压表的读数，(c) 求解误差所占的百分比。

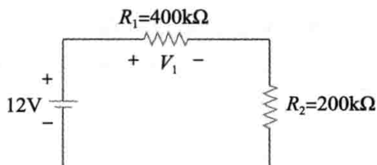


图 6-86　习题 42 的电路原理图

43　电路如图 6-87 所示，(a) 试计算开路电压 V_{ab}，(b) 若电压表的内阻是 12MΩ，试计算电压表上显示的 V_{ab} 的读数。

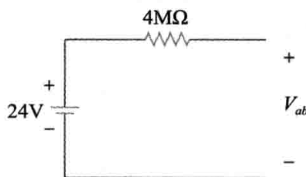


图 6-87　习题 43 的电路原理图

44　使用内阻为 0.5Ω 的电流表测量图 6-88 所示电路中的 I_T，试求解误差所占的百分比。

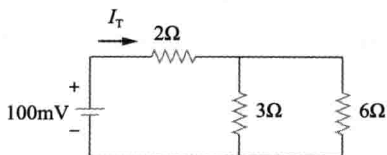


图 6-88　习题 44 的电路原理图

45　内阻为 200kΩ 的电压表并接在 40kΩ 电阻的两端，如图 6-89 所示。(a) 电压表的读数是多少？(b) V_1 的理想值是多少？(c) 计算误差的百分比。

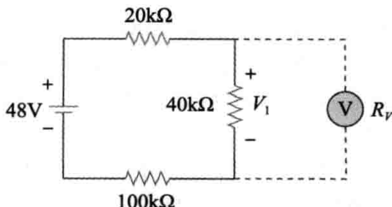


图 6-89　习题 45 的电路原理图

46　用电压表测量图 6-90 所示电路中电阻 R_3 两端的电压，测量值比理想或实际电压值低多少？设 R_V＝20kΩ。

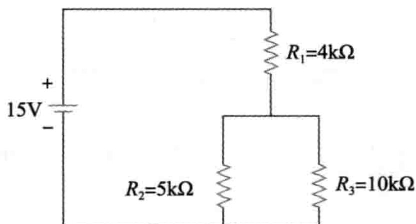


图 6-90　习题 46 的电路原理图

47　某数字万用表（DMM）测量电压时内阻为 10MΩ，用其测量图 6-91 所示电路中 2MΩ 电阻两端的电压。若万用表读数为 20V，试计算激励源 V_s 的电压值。

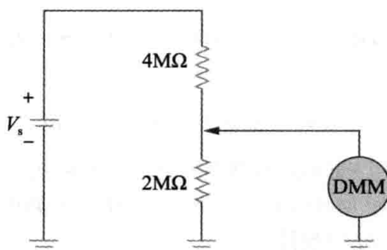


图 6-91　习题 47 的电路原理图

48　两个 850kΩ 的电阻和一个 30V 电压源串联在一起。若用内阻为 10MΩ 的数字万用表测量其中一个电阻两端的电压，万用表的读数是多少？误差百分比是多少？

6.6 节

49　利用 PSpice 计算图 6-92 所示梯形电路中 V_1 到 V_3 的值。

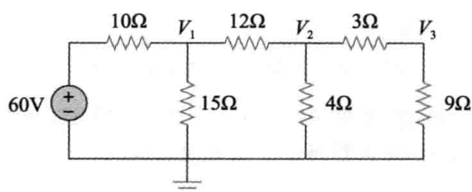


图 6-92　习题 49 的电路原理图

50　利用 PSpice 仿真图 6-93 所示的电路，并计算节点电压 V_1 到 V_3。

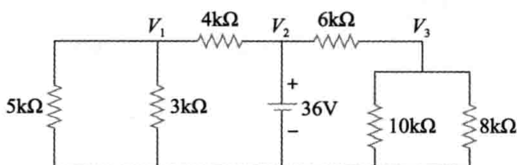


图 6-93　习题 50 和习题 56 的电路原理图

51　利用 PSpice 计算图 6-61 所示电路中的 I_o。

52　利用 PSpice 计算图 6-77 所示电路中的 V_o。

53　利用 PSpice 计算图 6-94 所示电路中的 V_x。

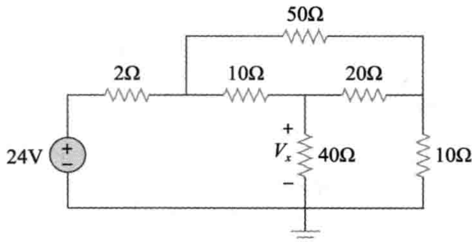


图 6-94　习题 53 和习题 55 的电路原理图

54　利用 Multisim 计算图 6-95 所示电路中的电阻 R_o。

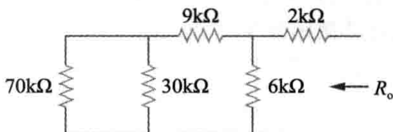


图 6-95　习题 54 的电路原理图

55　利用 Multisim 计算图 6-94 所示电路中的 V_x。

56　利用 Multisim 计算图 6-93 所示电路中的 V_1 到 V_3 的数值。

57　电路如图 6-96 所示，(a) 利用 Multisim 计算等效电阻 R，(b) 利用 Multisim 计算电流 I_1 和 I_2。

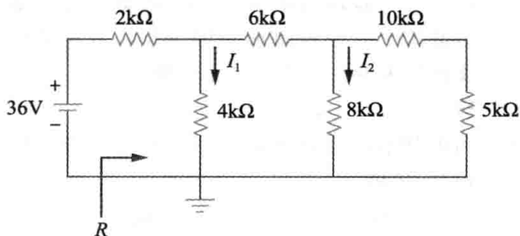


图 6-96　习题 57 的电路原理图

58　电路如图 6-97 所示，利用 Multisim 或 PSpice 计算每个节点对地的电压。

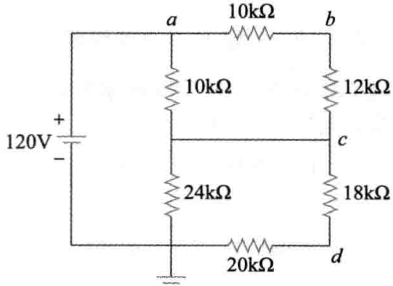


图 6-97　习题 58 的电路原理图

6.7 节

59　当 $R_1=120\Omega$，$R_2=800\Omega$ 和 $R_3=300\Omega$ 时，若图 6-98 所示的电桥电路达到平衡状态，R_x 为多少？

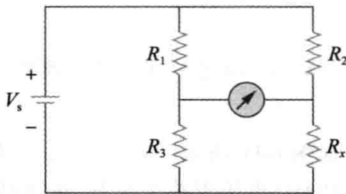


图 6-98　习题 59 的电路原理图

60　图 6-99 所示的惠斯通电桥在平衡状态运行，若 $R_1=50\text{k}\Omega$，$R_2=30\text{k}\Omega$ 和 $R_3=100\Omega$，试计算 R_x。

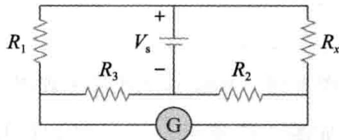


图 6-99　习题 60 的电路原理图

61　如图 6-100 所示的惠斯通电桥电路，试求解平衡状态下的 V_{ab}。

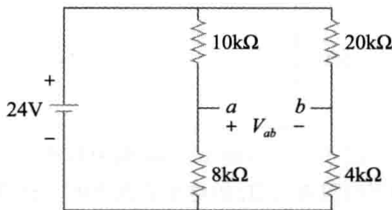


图 6-100　习题 61 的电路原理图

62　试计算平衡状态下图 6-101 所示电路中的 V_{ab}。

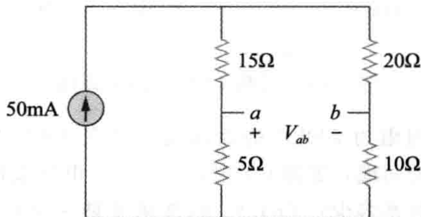


图 6-101　习题 62 的电路原理图

63　假设图 6-41 所示的未知电阻代表应力测量仪（应力测量仪是用来测量物体机械应力的仪器），在无负载条件下 $R_x=100\Omega$，其中 $R_1=250\Omega$，$R_2=300\Omega$。试计算无负载条件下电桥达到平衡状态时 R_3 的阻值，以及有负载即 $R_x=100.25\Omega$ 时 R_3 的阻值。

第7章 分析方法

认真做事，有人满意，有人惊奇。

——马克·吐温

拓展职业生涯

电子仪器学科



测量仪器
(© Sarhan M. Musa)

工程学利用物理原理设计各种不同的设备造福人类。但是，不通过测量就不能很好地理解物理原理。物理学家常说，物理学实际上是度量现实世界的科学。正如度量是了解客观世界的工具，仪器是度量的工具。在科学与工程技术的各个领域中都会用到电子仪器。电子仪器的应用在科学技术领域迅猛增长并已达到相当高的程度，在理工科教育中不接触电子仪器简直是不可思议的事情。例如，物理学家、生理学家、化学家和生物学家都必须学会使用电子仪器。特别是作为电气工程专业的学生，操作数字和模拟电子仪器的技能是非常关键的，这类仪器包括安培表、伏特表、欧姆表、示波器、频谱分析仪和信号发生器等，如图7-1～图7-7所示。

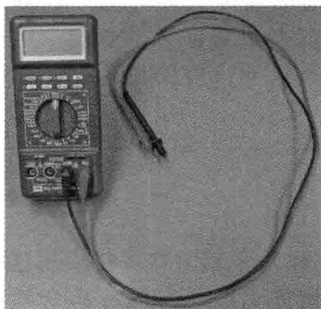


图7-1　带有测量表笔的数字万用表
(© Sarhan M. Musa)

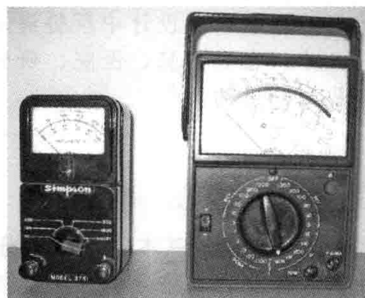


图7-2　模拟微安计
(© Sarhan M. Musa)

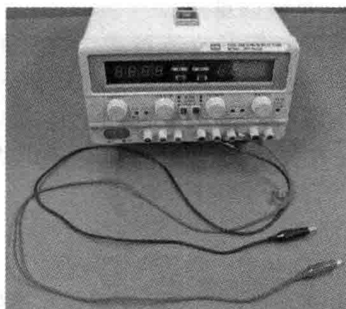


图7-3　带有测试端子的直流稳压电源
(© Sarhan M. Musa)

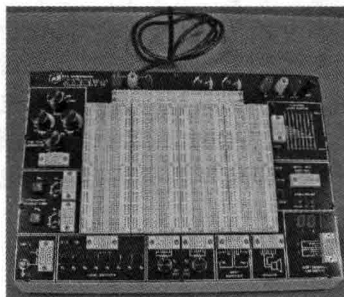


图7-4　面包板电子练习器
(© Sarhan M. Musa)



图 7-5 信号发生器（直流）
（© Sarhan M. Musa）

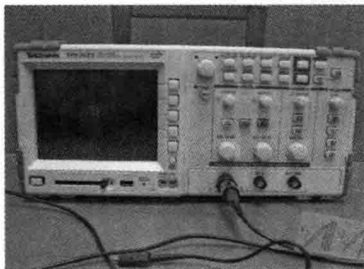


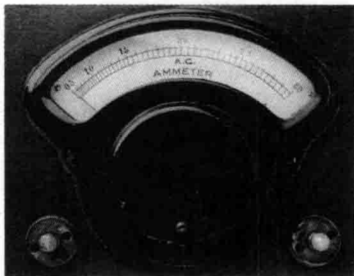
图 7-6 带有测试端子的双通道数字示波器
（© Sarhan M. Musa）



a）欧姆表
（© iStock）



b）伏特表
（© Comstock/Jupiter RF）



c）安培表
（© Sarhan M.Musa）

图 7-7 带有测试端子的双通道数字示波器

除了不断提高操作仪器的技能以外，有些电气工程师还要专门学习电子仪器的设计与制造，他们可以从仪器设计中获得满足感，许多人都有所发明并申请了专利。电子仪器专业的专门人才，在医学院、医院、研究所、航空工业和数以千计的使用电子仪器的工业部门中都能找到合适的工作。

7.1 引言

掌握了电路理论的基本定律（欧姆定律和基尔霍夫定律）之后，本章将应用这些定律推导出两种非常有效的电路分析方法：基于基尔霍夫电压定律（KVL）的**网孔分析法**（mesh analysis）和基于基尔霍夫电流定律（KCL）的**节点分析法**（nodal analysis）。（因此，本章的分析方法只是利用前面章节所学知识的一种规范的分析方法。）这两种电路分析方法非常重要，应该说这一章是本书中最为重要的一章，建议读者予以足够的重视。

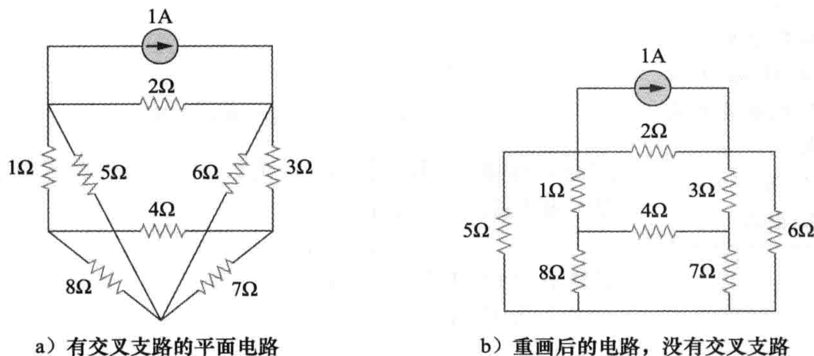
采用本章介绍的两种方法可以分析任意线性电路，得到一组联立方程组，之后通过解方程组得出所需的电流或电压值。求解线性联立方程组的一种方法是克莱姆（Cramer）法则，即利用方程组中系数行列式的商来计算电路变量。本章将通过例题说明上述方法，同时附录 A 也简要地总结了读者应用克莱姆法则求解线性方程组时所需的基本知识点。最后，本章将会利用所学的分析方法对电阻电路进行分析。

7.2 网孔分析法

网孔分析法[⊖]仅适用于**平面**（planar）电路。所谓平面电路是指没有交叉支路相互连接的电

⊖ 网孔分析法也称为**回路分析法**（loop analysis）或者**网孔电流分析法**（mesh-current method）。

路，可以画在一个平面上，否则，即为非平面（nonplanar）电路。例如，图 7-8a 所示电路有两条交叉支路，但它等效于图 7-8b 所示的电路，因此，图 7-8a 所示电路为平面电路。不过，图 7-9所示电路为非平面电路，因为没有任何方法可以把它重画为没有交叉支路的电路，对这类非平面电路可以采用节点分析法进行分析，但这不属于本书的讨论范畴。



a）有交叉支路的平面电路　　b）重画后的电路，没有交叉支路

图 7-8　电路拓扑图

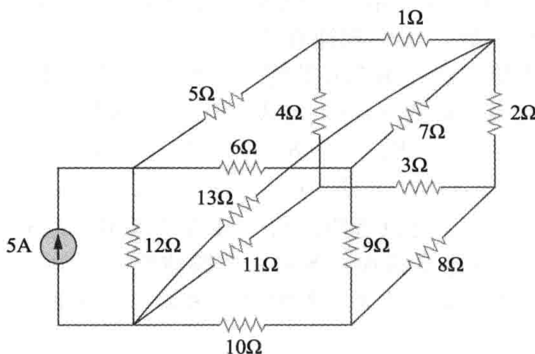


图 7-9　非平面电路

为了更好地理解网孔分析法，首先应该解释何谓网孔。例如，在图 7-10 中，路径 *abefa* 和 *bcdeb* 均为网孔，但路径 *abcdefa* 就不是网孔[⊖]。

网孔是指内部不包含任何其他回路的一条回路。

流经网孔的电流称为网孔电流（mesh current），网孔分析法就是采用 KVL 求出给定电路的网孔电流的方法。网孔电流并不一定对应于任何实际流经电路的可测物理电流。

本节讨论不包含电流源的平面电路网孔分析法，下一节将考虑包含电流源的网孔分析法。对包含 n 个网孔的电路进行网孔分析时，应遵循三个步骤。

下面以图 7-10 所示电路为例来说明上述步骤。第一步，定义网孔 1 和网孔 2 的网孔电流分别为 i_1 和 i_2。虽然各网孔电流可设定为任意方向，但习惯上总是假定各网孔电流方向为顺时针。如果将图 7-10 所示电路的网孔电流方向设定为逆时针，然后进行同样的分析，也可以得到相同的结果。

第二步，对各网孔应用 KVL。对网孔 1 应用 KVL 可得：

$$-V_1 + R_1 i_1 + R_3(i_1 - i_2) = 0$$

⊖ 虽然 *abcdefa* 是回路而不是网孔，但 KVL 仍然适用。从这个意义上讲，回路分析法与网孔分析法是一回事。



求解网孔电流的步骤：

1）分别指定 n 个网孔的网孔电流 i_1，i_2，…，i_n。
2）对 n 个网孔分别应用 KVL，并根据欧姆定律用网孔电流来表示各个电压。
3）求解 n 个联立方程，得到网孔电流。



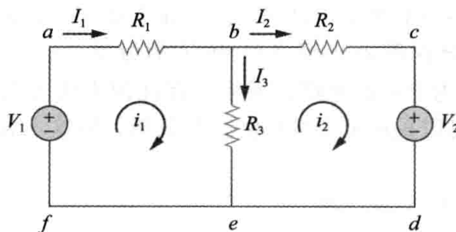


图 7-10 有两个网孔的电路

注意，这里 $-i_2R_3$ 是负的，是因为沿 i_1 的顺时针方向，其贡献是相反的，因而有

$$(R_1+R_3)i_1-R_3i_2=V_1 \tag{7-1}$$

对网孔 2 应用 KVL，得到：

$$R_2i_2+V_2+R_3(i_2-i_1)=0$$

即

$$-R_3i_1+(R_2+R_3)i_2=-V_2 \tag{7-2}$$

注意，在式（7-1）中，i_1 的系数为第一个网孔中的电阻之和，而 i_2 的系数则是网孔 1 和网孔 2 公共电阻阻值的相反数，这一规律在式（7-2）中也是成立的。因此，上述规律可以作为写出网孔方程的快捷方法，第 7.6 节将对此作进一步的讨论。

第三步，求解网孔电流。将式（7-1）与式（7-2）写成矩阵形式，得到：

$$\begin{bmatrix} R_1+R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2+R_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} V_1 \\ -V_2 \end{bmatrix} \tag{7-3}$$

解之即可得到网孔电流 i_1 和 i_2。可以选用任何一种方法求解上述联立方程，根据式（4-1），如果电路中包含 n 个节点，b 条支路和 l 条独立回路或网孔，则 $l=b-n+1$。因此，采用网孔分析法求解电路参数需要 l 个独立方程的联立求解。对于该电路，有 $b=5$，$n=4$，因此，$l=2$。

注意，支路电流与网孔电流是不同的，只有在孤立网孔的情况下，两者才是相同的。为区分这两类电流，下面用 i 表示网孔电流，用 I 表示支路电流，而用 I_1、I_2、I_3 表示网孔电流的代数和。显然，由图 7-10 可知：

$$I_1=i_1,\quad I_2=i_2,\quad I_3=i_1-i_2 \tag{7-4}$$

对节点 b（或者 d）应用 KCL 即可得到式（7-4）的第三部分。

$$i_1=i_2+I_3 \quad\Rightarrow\quad I_3=i_1-i_2$$

例 7-1 试利用网孔分析法求图 7-11 所示电路中的支路电流 I_1、I_2 和 I_3。

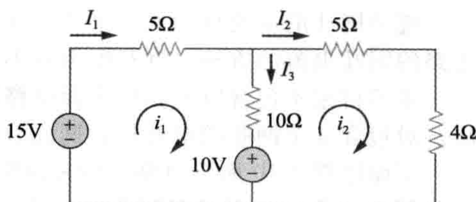


图 7-11 例 7-1 的电路原理图

解：首先利用 KVL 求出网孔电流。对于网孔 1，有：

$$-15+5i_1+10(i_1-i_2)+10=0$$
$$15i_1-10i_2=5$$

两边同除以 5，得

$$3i_1-2i_2=1 \tag{7-1-1}$$

对于网孔 2，有：

$$6i_2+4i_2+10(i_2-i_1)-10=0$$
$$-10i_1+20i_2=10$$

即

$$-i_1 + 2i_2 = 1 \tag{7-1-2}$$

■ **方法 1**：采用代入法，由式（7-1-2），得到 i_1：

$$i_1 = 2i_2 - 1 \tag{7-1-2a}$$

将该式代入式（7-1-1）：

$$6i_2 - 3 - 2i_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad i_2 = 1\text{A}$$

由式（7-1-2a），

$$i_1 = 2i_2 - 1 = 2 - 1 = 1\text{A}$$

因此：

$$I_1 = i_1 = 1\text{A}, \quad I_2 = i_2 = 1\text{A}, \quad I_3 = i_1 - i_2 = 0$$

■ **方法 2**：采用克莱姆法则，将式（7-1-1）与式（7-1-2）写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

可得各行列式为

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2 = 4, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 1 = 4$$

所以：

$$i_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1\text{A}, \quad i_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1\text{A}$$

结果与方法 1 相同。 ◀

练习 7-1 试计算图 7-12 所示电路中的网孔电流 i_1 与 i_2。

答案：$i_1 = 0.667\text{A}$，$i_2 = 0\text{A}$

例 7-2 试利用网孔分析法求图 7-13 所示电路中的电流 I_o。

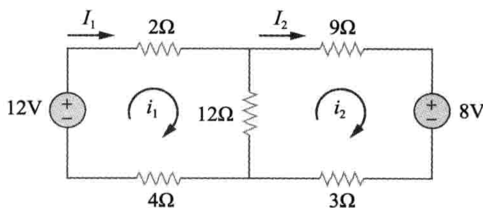


图 7-12 练习 7-1 的电路原理图

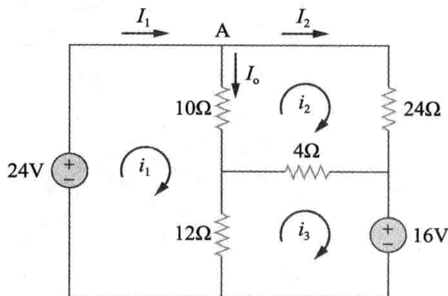


图 7-13 例 7-2 的电路原理图

解：对三个网孔依次应用 KVL。对于网孔 1，有：

$$-24 + 10(i_1 - i_2) + 12(i_1 - i_3) = 0$$

即

$$11i_1 - 5i_2 - 6i_3 = 12 \tag{7-2-1}$$

对于网孔 2，

$$24i_2 + 4(i_2 - i_3) + 10(i_2 - i_1) = 0$$

即

$$-5i_1 + 19i_2 - 2i_3 = 0 \tag{7-2-2}$$

对于网孔 3，

$$+16 + 12(i_3 - i_1) + 4(i_3 - i_2) = 0$$

即

$$-3i_1 - i_2 + 4i_3 = -4 \tag{7-2-3}$$

式（7-2-1）～式（7-2-3）写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} 11 & -5 & -6 \\ -5 & 19 & -2 \\ -3 & -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$$

得到各行列式的值为

$$\Delta = \left|\begin{array}{ccc} 11 & -5 & -6 \\ -5 & 19 & -2 \\ -3 & -1 & 4 \\ 11 & -5 & -6 \\ -5 & 19 & -2 \end{array}\right| = 836 - 30 - 30 - 342 - 22 - 100 = 312$$

$$\Delta_1 = \left|\begin{array}{ccc} 12 & -5 & -6 \\ 0 & 19 & -2 \\ -4 & -1 & 4 \\ 12 & -5 & -6 \\ 0 & 19 & -2 \end{array}\right| = 912 + 0 - 40 - 456 - 24 - 0 = 392$$

$$\Delta_2 = \left|\begin{array}{ccc} 11 & 12 & -6 \\ -5 & 0 & -2 \\ -3 & -4 & 4 \\ 11 & 12 & -6 \\ -5 & 0 & -2 \end{array}\right| = 0 - 120 + 72 - 0 - 88 + 240 = 104$$

$$\Delta_3 = \left|\begin{array}{ccc} 11 & -5 & 12 \\ -5 & 19 & 0 \\ -3 & -1 & -4 \\ 11 & -5 & 12 \\ -5 & 19 & 0 \end{array}\right| = -836 + 60 + 0 + 684 - 0 + 100 = 8$$

利用克莱姆法则计算的各网孔电流为

$$i_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{392}{312} = 1.2564(\text{A})$$

$$i_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{104}{312} = 0.3333(\text{A})$$

$$i_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{8}{312} = 0.0256(\text{A})$$

所以，$I_o = i_1 - i_2 = 0.9231\text{A}$。◀

练习 7-2 试利用网孔分析法计算图 7-14 所示电路中的 I_o。 **答案：** 1.667A

例 7-3 试求图 7-15 所示电路中的网孔电流 i_1 和 i_2。

解： 对网孔 1，有：

$$-10 - 2I_x + 10i_1 - 6i_2 = 0$$

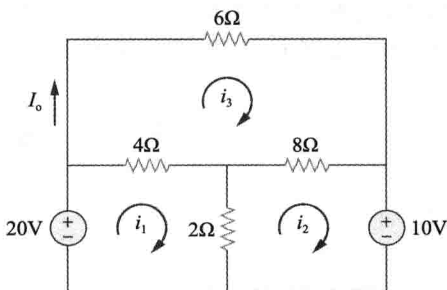


图 7-14　练习 7-2 的电路原理图

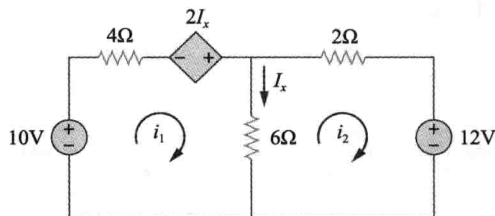


图 7-15　例 7-3 的电路原理图

而 $I_x = i_1 - i_2$。因此

$$10 = -2i_1 + 2i_2 + 10i_1 - 6i_2 \quad \Rightarrow \quad 5 = 4i_1 - 2i_2 \tag{7-3-1}$$

对于网孔 2，有

$$12 + 8i_2 - 6i_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 6 = 3i_1 - 4i_2 \tag{7-3-2}$$

联立式（7-3-1）和式（7-3-2）求解，可得

$$i_1 = 0.8\text{A}, \quad i_2 = -0.9\text{A}$$

i_2 的负号表示其实际电流方向为逆时针方向。◀

练习 7-3　试利用网孔分析法计算图 7-16 所示电路中的 V_o。　**答案：** 2.4V

7.3　含有电流源的网孔分析法

将网孔分析法用于含有电流源的电路时，看起来会比较复杂。但实际上，由于电流源的存在，减少了方程的个数，求解反而会更容易些。现考虑如下两种情况：

■ **情况一：** 电流源仅存在于一个网孔中，如图 7-17 所示。设网孔电流 $i_2 = -5\text{A}$，这里是负号因为 i_2 的方向与 5A 电流源的指向相反。对另一个网孔按照通常方法写出网孔方程为

$$-10 + 4i_1 + 6(i_1 - i_2) = 0$$

即

$$10i_1 = 6i_2 + 10 = -30 + 10 = -20 \quad \Rightarrow \quad i_1 = -2\text{A}$$

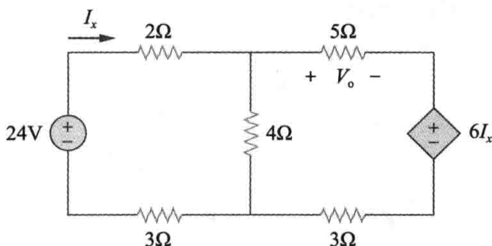


图 7-16　练习 7-3 的电路原理图

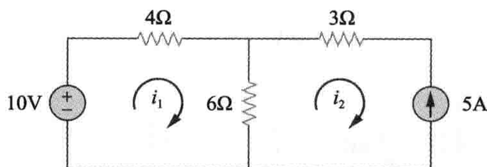


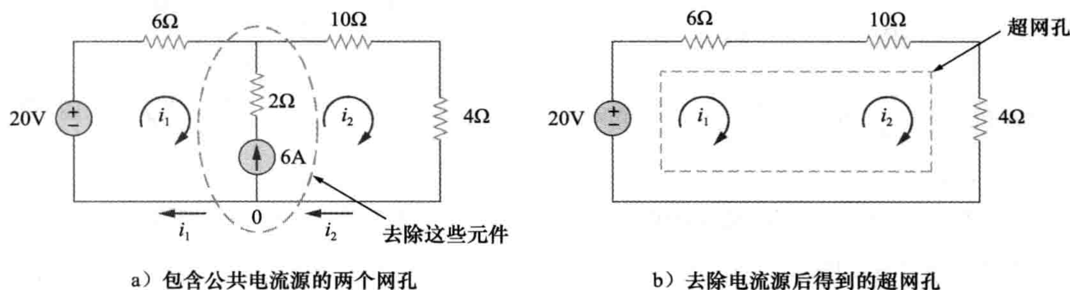
图 7-17　含有电流源的电路

■ **情况二：** 电流源存在于两个网孔之间，如图 7-18a 所示，将电流源和与之相串联的元件去除后，得到一个**超网孔**（supermesh），如图 7-18b 所示。于是

当两个网孔共有一个电流源时，就产生一个超网孔。

当两个网孔之间存在一个电流源（受控源或者独立源）时，就会产生一个超网孔。如图 7-18b 所示，所创建的超网孔由两个网孔的外围元件构成，并应对其进行不同的处理（如果一个电路包括两个或两个以上相交的超网孔，应将其合并为一个更大的超网

孔）。为什么要对超网孔进行不同的处理呢？因为网孔分析法应用 KVL 时须知道各支路的电压，但事先并不知道电流源两端的电压。然而，超网孔必须与其他网孔一样满足 KVL。



a）包含公共电流源的两个网孔　　b）去除电流源后得到的超网孔

图 7-18

处理超网孔时，暂时认为电流源不存在。这样可以得到一个含有两个网孔电流的方程，因此，对图 7-18b 所示的超网孔应用 KVL，有

$$-20+6i_1+10i_2+4i_2=0$$

即

$$6i_1+14i_2=20 \tag{7-5}$$

再对两个网孔公共支路上的节点应用 KCL，对图 7-18a 中的节点 0 应用 KCL 得到：

$$i_2=i_1+6 \tag{7-6}$$

对式（7-5）与式（7-6）求解，得到：

$$i_1=-3.2\text{A},\quad i_2=2.8\text{A} \tag{7-7}$$

超网孔具有如下三个属性：

1）超网孔中的电流源不是完全忽略；它提供了求解网孔电流所需的约束方程。

2）超网孔本身没有电流。

3）对超网孔要同时应用 KVL 和 KCL。

例 7-4 试利用网孔分析法求图 7-19a 所示电路中的 $i_1 \sim i_3$。

解： 可以看出网孔 2 与网孔 3 共有一个电流源，所以它们构成一个超网孔，同时有 $i_1=2\text{A}$。对如图 7-19b 所示电路中的超网孔应用 KVL，可得

$$4(i_2-i_1)+10+5i_2+3i_3=0 \quad \Rightarrow \quad -4i_1+9i_2+3i_3=-10$$

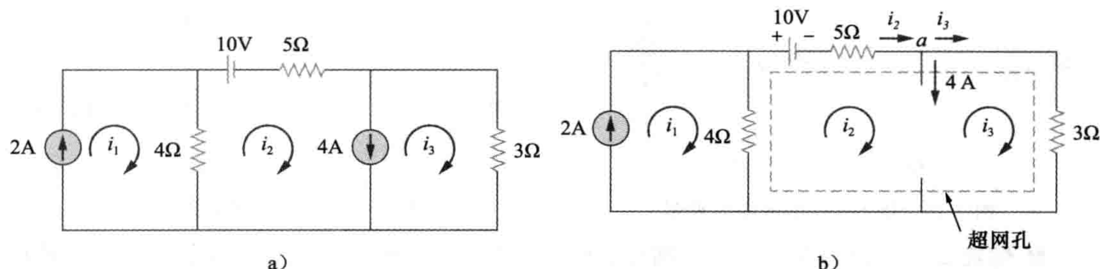


图 7-19　例 7-4 的电路原理图

而 $i_1=2\text{A}$，所以有

$$9i_2+3i_3=-10+8=-2 \tag{7-4-1}$$

对图 7-19b 的节点 a 处，应用 KCL，有：

$$i_2=i_3+4 \tag{7-4-2}$$

代入式（7-4-1），可得

$$9(i_3+4)+3i_3=-2 \quad \Rightarrow \quad 12i_3=-38$$

即

$$i_3=-38/12=-3.167(\text{A})$$

由式（7-4-2）可得

$$i_2=i_3+4=-3.167+4=0.833(\text{A})$$

因此

$$i_1=2\text{A},\quad i_2=0.833\text{A},\quad i_3=-3.167\text{A}$$

◀

练习 7-4 试利用网孔分析法求图 7-20 所示电路中的 i_1、i_2 和 i_3。

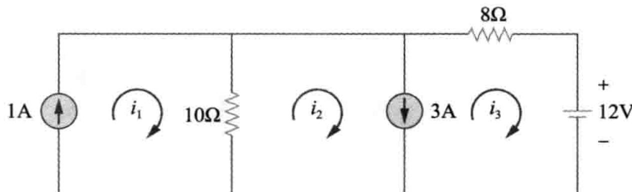


图 7-20 练习 7-4 的电路原理图

答案： $i_1=1\text{A}$；$i_2=1.222\text{A}$；$i_3=-1.778\text{A}$

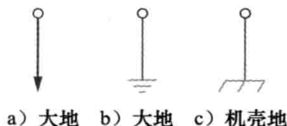
7.4 节点分析法

网孔分析法利用 KVL 求取未知电流，而节点分析法则是利用 KCL 求取未知电压。为简化问题，假定本节中分析的电路不包含电压源。包含电压源的电路将在下一节予以讨论。

采用节点分析法[⊖](nodal analysis) 就是要求出节点电压，假定电路中包含 n 个节点，且不包含电压源，则电路的节点分析可按照右下三个步骤完成。

下面将解释如何应用这三个步骤。

节点分析法的第一步是选取一个节点作为参考节点（reference node）或已知节点（datum node）。（在本书第 4 章已经详细讨论过关于地的内容，为清楚起见，这里重复一下。）由于假定参考节点电位为零，通常称为地（ground）。参考节点可以任意选择，以下将会介绍如何凭经验来选取。参考节点可以用图 7-21 所示的三个符号表示。图 7-21c 所示的接地类型称为机壳地（chassis ground），通常用于将机壳或者底盘作为所有电路参考节点的设备中。当以大地作为参考电位时，则采用图 7-21a 或图 7-21b 的大地（earth ground）符号表示。本书将采用图 7-21b 所示的接地符号。



a）大地 b）大地 c）机壳地

图 7-21 表示参考节点的常用符号

1) 选取一个节点作为参考节点，为其余 $n-1$ 个节点分配电压 V_1、V_2，…，V_{n-1}，这些电压均为相对于参考节点的电位。
2) 对 $n-1$ 个非参考节点分别应用 KCL 列出方程，利用欧姆定律将各支路电流用节点电压来表示。（不要对参考节点应用 KCL）
3) 求解得到的线性方程组从而求得未知的节点电压。

⊖ 节点分析法也称为节点电压法（node-voltage method）。

一旦选定了参考节点，就可以为非参考节点指定节点电压符号，例如在图 7-22a 所示电路中，节点 0 为参考节点（$V=0$），而节点 1 和节点 2 的电压分别指定为 V_1 和 V_2。应谨记，节点电压是相对于参考节点定义的，如图 7-22a所示，各节点电压为从参考节点到相应的非参考节点的电压升，即各节点相对于参考节点的电压。

节点分析法的第二步是对电路中每个非参考节点应用 KCL 定律以列出方程。为了避免在同一电路中符号过多，现将图 7-22a 所示电路重画为图 7-22b，并在图中增加了电流 I_1、I_2 和 I_3，分别表示流过电阻 R_1、R_2 和 R_3 的电流。

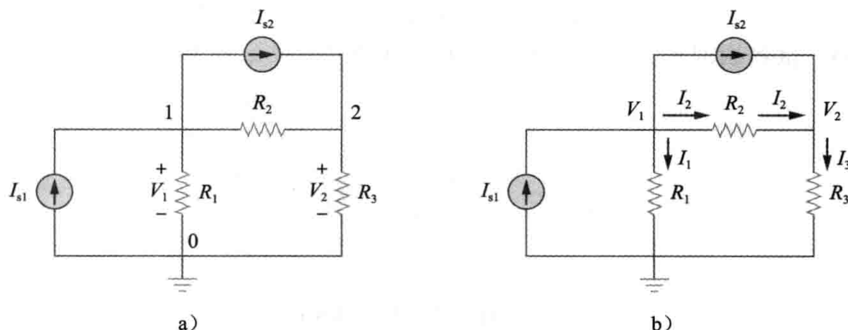


图 7-22 节点分析法的典型电路

电流的方向如何确定呢？例如，如何确定 I_2 的方向是向左还是向右？可首先假定一个方向，如果得到正的值，则与假定的方向相同；如果得到负的值，则与假定的方向相反。

对节点 1 应用 KCL 定律，有

$$I_{s1}=I_{s2}+I_1+I_2 \tag{7-8}$$

而对于节点 2，有

$$I_{s2}+I_2=I_3 \tag{7-9}$$

通过电阻的电流总是由高电位向低电位流动。

接着根据欧姆定律用节点电压表示未知电流 I_1、I_2 和 I_3。必须牢记的一点是，由于电阻是无源元件（按照无源符号规则），电流总是从高电位流向低电位（即：正的电流指向电压降的方向）。上述原理可表达为

$$\boxed{I=\frac{V_{\text{higher}}-V_{\text{lower}}}{R}} \tag{7-10}$$

注意，该原理与第 2 章中对电阻的定义是一致的（参见图 2-6）。

于是，由图 7-22b 可得

$$\begin{aligned}
I_1&=\frac{V_1-0}{R_1} \quad 或 \quad I_1=G_1V_1\\
I_2&=\frac{V_1-V_2}{R_2} \quad 或 \quad I_2=G_2(V_1-V_2)\\
I_3&=\frac{V_2-0}{R_3} \quad 或 \quad I_3=G_3V_2
\end{aligned} \tag{7-11}$$

将式（7-11）分别代入式（7-8）与式（7-9），得到

$$I_{s1}=I_{s2}+\frac{V_1}{R_1}+\frac{V_1-V_2}{R_2} \tag{7-12}$$

$$I_{s2}+\frac{V_1-V_2}{R_2}=\frac{V_2}{R_3} \tag{7-13}$$

当采用电导表示时，式（7-12）与式（7-13）变为

$$I_{s1}=I_{s2}+G_1V_1+G_2(V_1-V_2) \tag{7-14}$$

$$I_{s2}+G_2(V_1-V_2)=G_3V_2 \tag{7-15}$$

节点分析法的第三步是求解节点电压。如果对 $n-1$ 个非参考节点应用 KCL，就可以得到 $n-1$ 个联立方程，如式（7-12）和式（7-13)或者式（7-14）和式（7-15)。对于图 7-22 所示电路，利用代入法、消元法、克莱姆法则[⊖]或矩阵求逆法等标准方法求解式(7-12)和式（7-13)或者式（7-14）和式（7-15）就可以得到节点电压 V_1 与 V_2。采用后两种方法时，必须将联立方程表示成标准矩阵形式，例如，式（7-14）和式（7-15）可以重写为

$$(G_1+G_2)V_1-G_2V_2=I_{s1}-I_{s2}$$

$$-G_2V_1+(G_2+G_3)V_2=I_{s2}$$

该式写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} G_1+G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2+G_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{s1}-I_{s2} \\ I_{s2} \end{bmatrix} \tag{7-16}$$

解之即得到 V_1 与 V_2。

式（7-16）的一般形式将在第 7.6 节中讨论。求解联立方程还可以借助于计算器，如 TI-89 或 HP-48G11；或借助于计算机软件包，如 MATLAB、Mathcad、Quattro Pro 等工具软件计算。

例 7-5 试计算图 7-23a 所示电路中各节点的电压。

解： 考虑图 7-23b，对图 7-23a 中电路进行节点分析做好了准备。应该注意应用 KCL 时电流的选取方法，图中除了电流源支路外，其余电流的流向标记可以任意选取，但必须保持一致（保持一致的意思是指：如若假定 I_2 由左边流入 4Ω 的电阻，则 I_2 必须从该电阻的右边流出）。选定参考节点后，就可以确定节点电压 V_1、V_2。

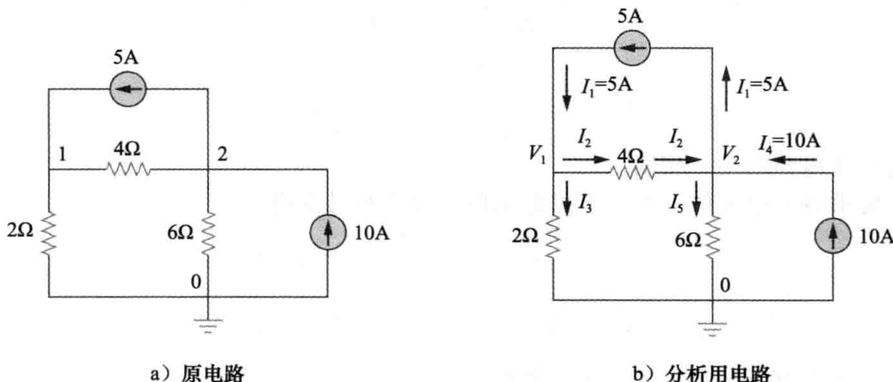


图 7-23 例 7-5 的电路

对节点 1 应用 KCL 和欧姆定律，得到

$$I_1=I_2+I_3 \quad \Rightarrow \quad 5=\frac{V_1-V_2}{4}+\frac{V_1-0}{2}$$

将后一个方程的两边同乘以 4，得

$$20=V_1-V_2+2V_1$$

即

$$3V_1-V_2=20 \tag{7-5-1}$$

⊖ 如何使用克莱姆法则将在附录 A 中加以讨论。

同理，在节点 2 处有

$$I_2 + I_4 = I_1 + I_5 \quad \Rightarrow \quad \frac{V_1 - V_2}{4} + 10 = 5 + \frac{V_2 - 0}{6}$$

两边同乘以 12，得到

$$3V_1 - 3V_2 + 120 = 60 + 2V_2$$

即

$$-3V_1 + 5V_2 = 60 \tag{7-5-2}$$

于是，得到两个联立方程式（7-5-1）与式（7-5-2），采用以下任何一种解法均可求出电压 V_1 与 V_2。

■ 方法 1：采用消元法，将式（7-5-1）与式（7-5-2）相加，得到

$$4V_2 = 80 \quad \Rightarrow \quad V_2 = 20(\text{V})$$

将 $V_2=20$ 代入式（7-5-1），得到

$$3V_1 - 20 = 20 \quad \Rightarrow \quad V_1 = \frac{40}{3} = 13.33(\text{V})$$

■ 方法 2：利用克莱姆法则，将式（7-5-1）与式（7-5-2）写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 60 \end{bmatrix} \tag{7-5-3}$$

系数矩阵行列式的值为

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 3 = 12$$

于是，V_1 与 V_2 分别为

$$V_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 20 & -1 \\ 60 & 5 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{100 + 60}{12} = 13.33(\text{V})$$

$$V_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 20 \\ -3 & 60 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{180 + 60}{12} = 20(\text{V})$$

与采用消元法得到的结果相同。

如果要求各个电流值，则由节点电压值可以很容易地得到

$$I_1 = 5\text{A}, \quad I_2 = \frac{V_1 - V_2}{4} = -1.667\text{A},$$

$$I_3 = \frac{V_1}{2} = 6.667\text{A}, \quad I_4 = 10\text{A}, \quad I_5 = \frac{V_2}{6} = 3.333\text{A}$$

I_2 为负值，表明其流向与假定的方向相反。◀

练习 7-5 试求图 7-24 所示电路的节点电压。

答案： $V_1=-2\text{V}$，$V_2=-14\text{V}$

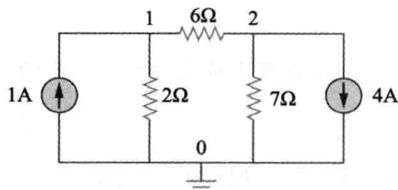


图 7-24 练习 7-5 的电路原理图

例 7-6 试求图 7-25a 所示电路中的节点电压。

解： 与上一例包括两个非参考节点不同，本例电路中有三个非参考节点。三个节点电压以及各支路电流的标记如图 7-25b 所示。

对于节点 1，有

$$3 = I_1 + I_2 \quad \Rightarrow \quad 3 = \frac{V_1 - V_3}{4} + \frac{V_1 - V_2}{2}$$

两边同乘以 4，并移项整理得

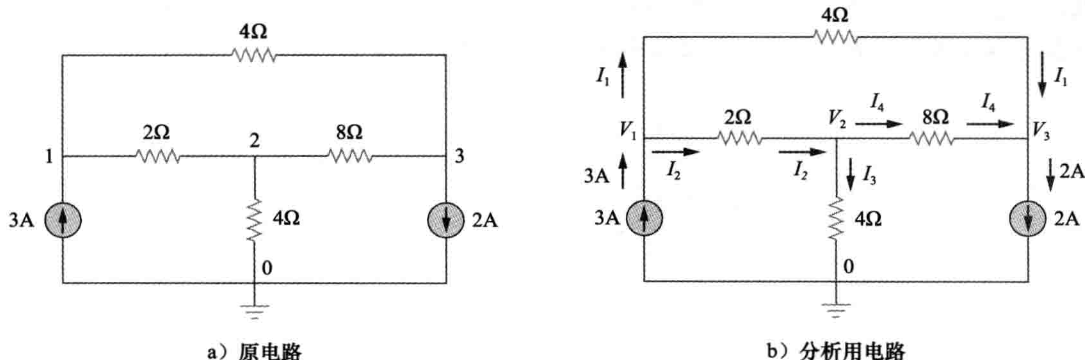


图 7-25　例 7-6 的电路原理图

$$3V_1 - 2V_2 - V_3 = 12 \tag{7-6-1}$$

对于节点 2，有

$$I_2 = I_3 + I_4 \quad \Rightarrow \quad \frac{V_1 - V_2}{2} = \frac{V_2 - 0}{4} + \frac{V_2 - V_3}{8}$$

两边同乘以 8 并移项整理得

$$-4V_1 + 7V_2 - V_3 = 0 \tag{7-6-2}$$

对于节点 3，有

$$I_1 + I_4 = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{V_1 - V_3}{4} + \frac{V_2 - V_3}{8} = 2$$

两边同乘以 8，移项整理后得到

$$2V_1 + V_2 - 3V_3 = 16 \tag{7-6-3}$$

于是，得到三个用于求解节点电压的联立方程。下面将采用三种方法求解方程组。

■ 方法 1：采用消元法，将式（7-6-1）减去式（7-6-2），得到

$$7V_1 - 9V_2 = 12 \tag{7-6-4}$$

将式（7-6-1）乘以 3，再减去式（7-6-3），得到

$$7V_1 - 7V_2 = 20 \tag{7-6-5}$$

将式（7-6-5）减去式（7-6-4），得到

$$2V_2 = 8 \quad \Rightarrow \quad V_2 = 4\text{V}$$

由式（7-6-4），可得

$$7V_1 = 12 + 9V_2 = 12 + 9 \times 4 = 48 \quad \Rightarrow \quad V_1 = \frac{48}{7} = 6.857(\text{V})$$

由式（7-6-1），可得

$$V_3 = -(12 + 2V_2 - 3V_1) = -(12 + 8 - 3 \times 6.857) = 0.571(\text{V})$$

因此，有

$$V_1 = 6.857\text{V}, \quad V_2 = 4\text{V}, \quad V_3 = 0.571\text{V}$$

■ 方法 2：利用克莱姆法则，将式（7-6-1）至式（7-6-3）写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 16 \end{bmatrix} \tag{7-6-6}$$

由此可得

$$V_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad V_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad V_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

其中，Δ、Δ_1、Δ_2 和 Δ_3 为待计算的行列式。由附录 A 可知，计算 3×3 矩阵的行列式时，应重复添加该矩阵的前两行，并交叉相乘，具体过程如下所示：

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \end{vmatrix} = -63 + 4 + 4 + 14 + 3 + 24 = -14$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 12 & -2 & -1 \\ 0 & 7 & -1 \\ 16 & 1 & -3 \\ 12 & -2 & -1 \\ 0 & 7 & -1 \end{vmatrix} = -252 - 0 + 32 + 112 + 12 + 0 = -96$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 & -1 \\ -4 & 0 & -1 \\ 2 & 16 & -3 \\ 3 & 12 & -1 \\ -4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 64 - 24 - 0 + 48 - 144 = -56$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 12 \\ -4 & 7 & 0 \\ 2 & 1 & 16 \\ 3 & -2 & 12 \\ -4 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 336 - 48 + 0 - 168 - 0 - 128 = -8$$

因此，可以得到：

$$V_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-96}{-14} = 6.857(\mathrm{V})$$

$$V_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-56}{-14} = 4(\mathrm{V})$$

$$V_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-8}{-14} = 0.571(\mathrm{V})$$

与采用方法 1 所得的结果相同。

■ 方法 3：利用 MATLAB 求解矩阵，式（7-6-6）可以写为

$$\boldsymbol{A}V = \boldsymbol{B} \quad \Rightarrow \quad V = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$$

其中，$\boldsymbol{A}$ 为 3×3 方阵，$\boldsymbol{B}$ 为列向量，$\boldsymbol{V}$ 为由所要求的 V_1、V_2 和 V_3 组成的列向量。利用 MATLAB 计算 $\boldsymbol{V}$ 的程序如下：

```
»A=[3 -2 -1; -4 7 -1; 2 1 -3];
»B=[12 0 16];
»V=inv(A)*B'

V =
  6.8571
  4.0000
  0.5714
```

于是，$V_1 = 6.857\mathrm{V}$，$V_2 = 4\mathrm{V}$，$V_3 = 0.571\mathrm{V}$。与采用前两种方法得到的结果相同。

■ 方法 4：利用科学计算器如 Titanium TI-89 计算联立方程组。这里计算联立方程组式（7-6-6），即

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 16 \end{bmatrix}$$

要使用 Titanium TI-89 计算器求解联立方程组，

首先按下 [2nd] [MATH]

选择 4：Matrix，然后按下 [ENTER]

然后按

选择 5：simult（且按下 [ENTER]）

在输入行，输入：

```
simult([3,-2,-1;-4,7,-1;2,1,-3],[12;0;16]),
```

（"simult" 将会由计算器自动提示，剩余部分需要自行输入。）

按下 [◆] [ENTER]

结果为：$V_1=6.857\text{V}$，　$V_2=4\text{V}$，　$V_3=0.5714\text{V}$。

与前三种方法得到的结果相同。◀

练习 7-6 试用上述任一方法求图 7-26 所示电路中三个非参考节点的电压。

答案： $V_1=34.67\text{V}$，$V_2=26.67\text{V}$，$V_3=20\text{V}$

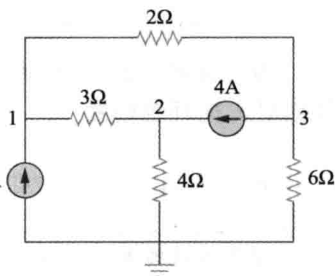


图 7-26 练习 7-6 的电路原理图

7.5 含有电压源的节点分析法

下面讨论电压源对节点分析法的影响。以图 7-27 所示的电路为例，分如下两种情况进行讨论。

■ 情况 1：如果电压源连接在参考节点与非参考节点之间，那么非参考节点的电压就等于电压源的电压。例如，在图 7-27中，

$$V_1 = 10\text{V} \tag{7-17}$$

那么，在这种情况下就可以简化电路的分析。注意，在这类情况中，电压源必须直接与参考节点相连接，中间没有串联任何其他元件。

■ 情况 2：如果电压源连接在两个非参考节点之间，则这两个非参考节点构成一个广义节点（generalized node）或超节点（supernode）[⊖]。此时可以采用 KCL 和 KVL 确定节点电压。

超节点由两个非参考节点和其间的电压源（独立源或受控源）以及与之并联的元件所组成。

超节点是电压源位于两个非参考节点之间。在图 7-27中，节点 2 和节点 3 组成一个超节点（超节点可以由两个以上节点组成，例如，在图 7-27 所示电路中，如果用一个电压源代替 2Ω 电阻，则节点 1、节点 2 和节点 3 组成一个超节点）。上一节介绍的节点分析法的三个步骤对于含有超节点的电路仍然适用，只是对超节点的处理方法不同而已，为什么呢？因为节点分析法的基本要素是应用 KCL，要求知道流过各元件的电流。流过电压源的电流不能事先知道，不过，与普通节点一样，KCL 在超节点处同样适用，因此在

⊖ 超节点可以看作包含电压源的封闭曲面。

图 7-27中的超节点处，有：

$$I_1 + I_4 = I_2 + I_3 \tag{7-18}$$

即

$$\frac{V_1 - V_2}{2} + \frac{V_1 - V_3}{4} = \frac{V_2 - 0}{8} + \frac{V_3 - 0}{6} \tag{7-19}$$

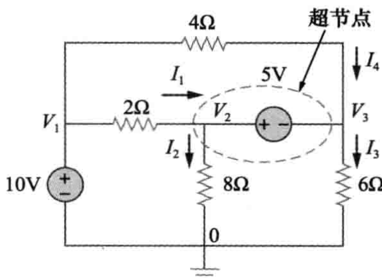


图 7-27 含有超节点的电路

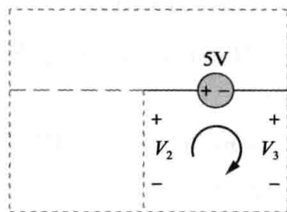


图 7-28 对超节点应用 KVL

为了对图 7-27 中的超节点应用基尔霍夫电压定律，现将该节点重新画于图 7-28 中，顺时针方向环绕回路一周（包含 5V 电压源），得到：

$$-V_2 + 5 + V_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_2 - V_3 = 5 \tag{7-20}$$

由式（7-17）、式（7-19）与式（7-20）就可以得到节点电压。

超节点具有左下侧三个属性。

1）超节点内的电压源提供了一个求解节点电压所需的约束方程。
2）超节点本身没有电压。
3）包含超节点电路的求解要求同时利用 KCL 和 KVL。

例 7-7 试求图 7-29 所示电路中的节点电压 V_o。

解： 如图 7-29 所示电路中包含了两个连接在参考节点的电压源，但是没有超节点。在节点 O 处，由 KCL 可得：

$$I_1 + I_3 = I_2$$

即

$$\frac{15 - V_o}{5k} + \frac{9 - V_o}{10k} = \frac{V_o - 0}{20k}$$

两边同乘以 20k，可得

$$60 - 4V_o + 18 - 2V_o = V_o$$

即

$$78 = 7V_o \quad \Rightarrow \quad V_o = \frac{78}{7} = 11.143(\text{V})$$ ◀

练习 7-7 试求图 7-30 所示电路中的 V_x。 **答案：** 20V

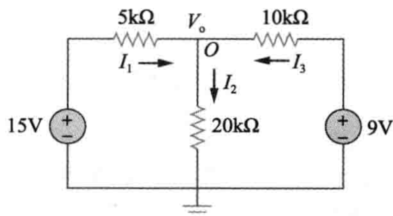


图 7-29 例 7-7 的电路原理图

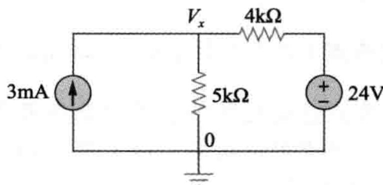


图 7-30 练习 7-7 的电路原理图

例 7-8 试求如图 7-31 所示电路中的各节点电压。

解： 图 7-31 所示电路中超节点包括 2V 电压源、节点 1、节点 2 以及 10Ω 电阻。对图 7-32a所示电路中的超节点应用 KCL，可得：

$$2=I_1+I_2+7$$

用节点电压表示 I_1 与 I_2，有：

$$2=\frac{V_1-0}{2}+\frac{V_2-0}{4}+7\quad\Rightarrow\quad 8=2V_1+V_2+28$$

即

$$V_2=-20-2V_1 \qquad (7\text{-}8\text{-}1)$$

为了得到 V_1 与 V_2 之间的关系，对图 7-32b 所示电路应用 KVL，绕回路一周可得：

$$-V_1-2+V_2=0\quad\Rightarrow\quad V_2=V_1+2 \quad (7\text{-}8\text{-}2)$$

由式（7-8-1）与式（7-8-2）可得：

$$V_2=V_1+2=-20-2V_1$$

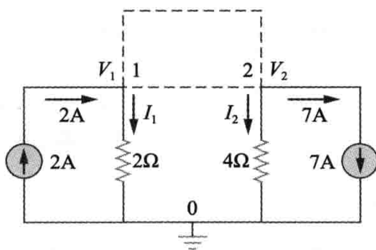
图 7-31　例 7-8 的电路原理图

即

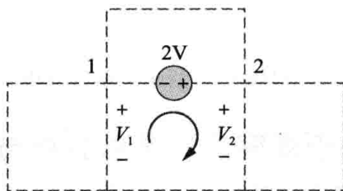
$$3V_1=-22\quad\Rightarrow\quad V_1=-7.333\text{V}$$

且

$$V_2=V_1+2=-5.333\text{V}$$



a）对超节点应用KCL



b）对回路应用KVL

图　7-32

注意，10Ω 电阻对电路中其他支路变量没有任何影响，因为它是连接在超节点两端且归入到超节点中。◀

练习 7-8　试求图 7-33 所示电路中的 V 与 I。　**答案：** −0.2V；1.4A

例 7-9　试利用节点分析法求图 7-34 所示电路的 v_o。

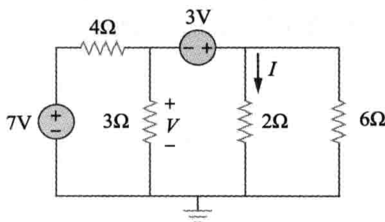


图 7-33　练习 7-8 的电路原理图

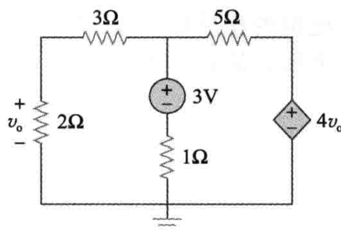


图 7-34　例 7-9 的电路原理图

解： 考虑如图 7-35 所示电路。可得

$$i_1+i_2+i_3=0\quad\Rightarrow\quad \frac{v_1-0}{5}+\frac{v_1-3}{1}+\frac{v_1-4v_o}{5}=0$$

两边同乘以 5，可得

$$v_1+5v_1-15+v_1-4v_o=0$$

而

$$v_o = \frac{2}{5}v_1$$

（利用分压原理）所以有

$$7v_1 - 15 - \frac{8}{5}v_1 = 0$$

即

$$\frac{27}{5}v_1 = 15$$

$$v_1 = 15 \times 5/27 = 2.778(\text{V})$$

因此，$v_o = 2v_1/5 = 1.111\text{V}$。 ◀

练习 7-9 试利用节点分析法求图 7-36 所示电路中的 I_b。 **答案：** 79.34mA

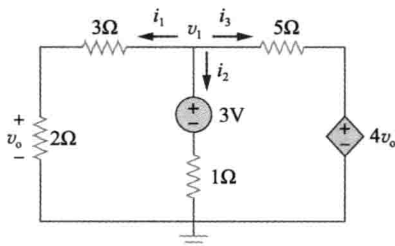


图 7-35 对图 7-34 所示电路的分析

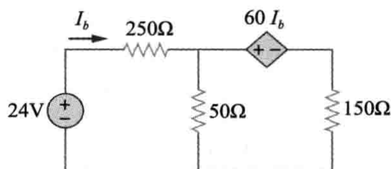


图 7-36 练习 7-9 的电路原理图

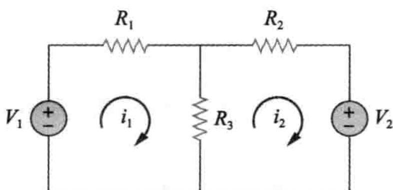
†7.6 基于观察法的节点分析与网孔分析

本节将给出节点分析法与网孔分析法的一般步骤，它是一种基于观察电路的快捷方法。

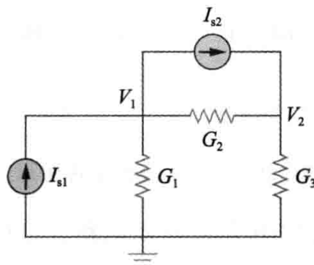
如果线性电阻电路中只含有独立电压源，则网孔电流方程可以由观察得到。例如，考虑如图 7-10 所示电路，为便于分析，在图 7-37a 中给出。该电路有两个非参考节点，且节点方程已经在第 7.2 节（参见式（7-3））中已经给出：

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ -V_2 \end{bmatrix} \tag{7-21}$$

注意，每个对角线元素为相应网孔的电阻值之和，而每个非对角线元素为网孔 1 和网孔 2 公共电阻的相反数。式（7-21）等号右边的每个元素为相应网孔沿顺时针方向所有独立电压源电压升的代数和。



a）图7-10所示电路



b）图7-22所示电路

图 7-37

一般情况下，如果电路包含 N 个网孔，则其网孔电流方程可以用电阻表示为

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1N} \\ R_{21} & R_{22} & \cdots & R_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{N1} & R_{N2} & \cdots & R_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} \tag{7-22}$$

或简化为

$$\boldsymbol{RI} = \boldsymbol{V} \tag{7-23}$$

其中，

R_{kk} = 网孔 k 中各电阻之和；

$R_{kj} = R_{jk}$ = 网孔 k 与网孔 j 的公共电阻之和的相反数，且 $k \neq j$；

I_k = 网孔 k 中顺时针方向的未知网孔电流；

V_k = 网孔 k 中沿顺时针方向的所有独立电压源的代数和，以电压升为正；

$\boldsymbol{R}$ = 电阻矩阵（resistance matrix）；

$\boldsymbol{I}$ = 输出向量；

$\boldsymbol{V}$ = 输入向量。

求解式（7-22）就可以得到未知的网孔电流。注意所有的网孔电流方向都假定为顺时针方向。而且式（7-23）仅对于只包含独立电压源和线性电阻的电路适用。如果电压源的值不依赖于其他支路变量则该电压源是独立的。

同样，如果电路中的所有电源均为独立电流源，则无需像 7.4 节那样对各节点应用 KCL 得到节点电压方程，而可以通过对电路的观察写出方程组。重点考察图 7-22 所示电路，为方便起见，在图 7-37b 中再次给出。该电路包括两个非参考节点，在 7.4 节得到的节点方程（见式（7-16））为

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2 + G_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{s1} - I_{s2} \\ I_{s2} \end{bmatrix} \tag{7-24}$$

观察可知，每个对角线元素等于连接于节点 1 或节点 2 的电导之和，而非对角线元素则等于连接于两节点之间电导的相反数。同样，式（7-24）中等号右边的元素为流入节点的电流的代数和。

一般而言，如果包含独立电流源的电路中具有 N 个非参考节点，则节点电压方程可以用电导表示为如下形式：

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1N} \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{N1} & G_{N2} & \cdots & G_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix} \tag{7-25}$$

或简化为

$$\boldsymbol{GV} = \boldsymbol{I} \tag{7-26}$$

其中，

G_{kk} = 与节点 k 相连接的各电导之和；

$G_{kj} = G_{jk}$ = 直接与节点 k，j 相连接的电导之和的相反数，其中 $k \neq j$；

v_k = 节点 k 处的未知电压；

i_k = 直接与节点 k 相连接的所有独立电流源的代数和，以流入该节点的电流为正；

$\boldsymbol{G}$ = 电导矩阵（conductance matrix）；

$\boldsymbol{V}$ = 输出矢量；

$\boldsymbol{I}$ = 输入矢量。

求解式（7-25）就可以得到未知的节点电压。应该记住，该式仅对含有独立电流源和线性

电阻的电路适用。如果电流源的电流值不依赖于其他支路变量，则认为该电流源为独立的。

例 7-10 试利用观察法写出图 7-38 所示电路的网孔电流方程。

解： 图中所示电路有 3 个网孔，所以电阻矩阵为 3×3，对角线上各元素如下，单位为欧姆：

$$R_{11}=2+3+1+1=7$$
$$R_{22}=4+1+3=8$$
$$R_{33}=3+1=4$$

非对角线元素为

$$R_{12}=-1,\quad R_{13}=-1,$$
$$R_{21}=-1,\quad R_{23}=-3,$$
$$R_{31}=-1,\quad R_{32}=-3,$$

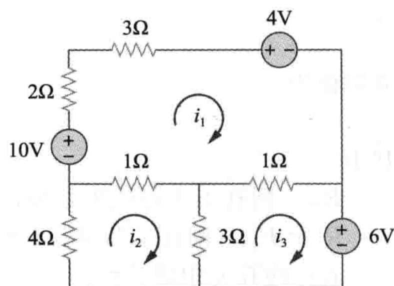


图 7-38 例 7-10 的电路原理图

输入电压向量 **v** 的元素如下，单位为伏特：

$$V_1=10-4=6,\quad V_2=0,\quad V_3=-6$$

所以，网孔电流方程为

$$\begin{bmatrix}7&-1&-1\\-1&8&-3\\-1&-3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_1\\i_2\\i_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\0\\-6\end{bmatrix}$$

由此可以求出网孔电流 i_1、i_2 和 i_3。◀

练习 7-10 试利用观察法写出图 7-39 所示电路的网孔电流方程。

答案： $\begin{bmatrix}170&-40&-80\\-40&80&-10\\-80&-10&150\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_1\\i_2\\i_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}24\\0\\0\end{bmatrix}$

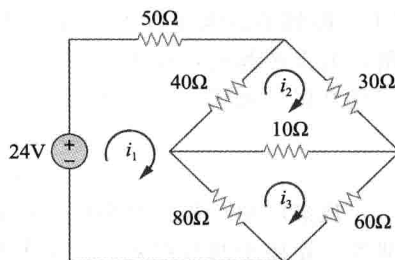


图 7-39 练习 7-10 的电路原理图

例 7-11 试采用观察法写出图 7-40 所示电路的节点电压矩阵方程。

解： 图 7-40 所示电路包含四个非参考节点，所以需要四个节点方程。这就是说，电导矩阵 **G** 应为 4×4 矩阵。以西门子为单位，矩阵 **G** 的对角线元素如下：

$$G_{11}=\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=0.3,\quad G_{22}=\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{1}=1.325,$$

$$G_{33}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=0.5,\quad G_{44}=\frac{1}{8}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}=1.625$$

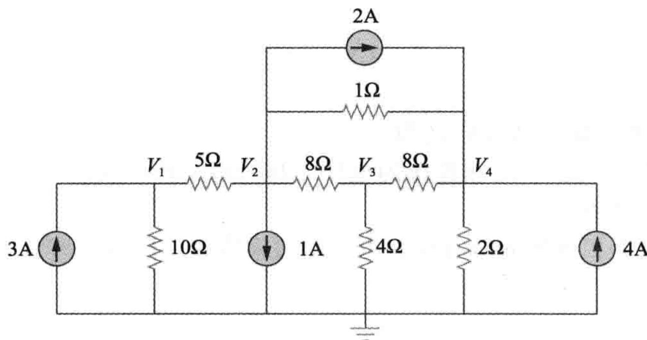


图 7-40 例 7-11 的电路原理图

非对角线元素为

$$G_{12}=-\frac{1}{5}=-0.2,\quad G_{13}=G_{14}=0,$$

$$G_{21}=-0.2,\quad G_{23}=-\frac{1}{8}=-0.125,\quad G_{24}=-\frac{1}{1}=-1,$$

$$G_{31}=0,\quad G_{32}=-0.125,\quad G_{34}=-\frac{1}{8}=-0.125,$$

$$G_{41}=0,\quad G_{42}=-1,\quad G_{43}=-0.125$$

以安培为单位，输入电流向量 $\boldsymbol{I}$ 的各项如下：

$$I_1=3,\quad I_2=-1-2=-3,\quad I_3=0,\quad I_4=2+4=6$$

因此，节点电压方程为

$$\begin{bmatrix} 0.3 & -0.2 & 0 & 0 \\ -0.2 & 1.325 & -0.125 & -1 \\ 0 & -0.125 & 0.5 & -0.125 \\ 0 & -1 & -0.125 & 1.625 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

求解上式可以得到节点电压 V_1、V_2、V_3 和 V_4。◀

练习 7-11　试利用观察法写出图 7-41 所示电路的节点电压方程。

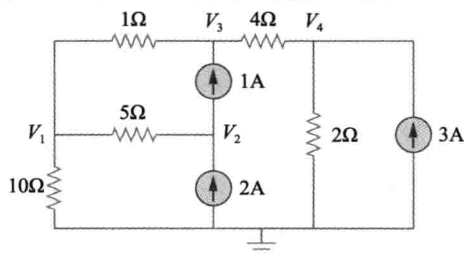


图 7-41　练习 7-11 的电路原理图

答案：

$$\begin{bmatrix} 1.3 & -0.2 & -1 & 0 \\ -0.2 & 0.2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1.25 & -0.25 \\ 0 & 0 & -0.25 & 0.75 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

7.7　节点分析法与网孔分析法的比较

节点分析法和网孔分析法为复杂电路网络的分析提供了系统的解决方法。那么，对给定的网络进行分析时，怎样才能知道采用哪一种方法更好或更有效呢？最佳方法的选取受到两个因素的制约。

第一个因素是特定网络本身的特征。例如，网络中若包含大量串联元件、电压源或超网孔，更适合采用网孔分析法，而若包含较多并联元件、电流源或超节点，则适合采用节点分析法。同样，节点数少于网孔数的电路网络则宜采用节点分析法；而网孔数少于节点数的电路则宜采用网孔分析法。选取哪种分析方法的关键在于采用哪种方法得到的联立方程的个数更少。

第二个因素是所需求的电路参数信息。如果要求节点电压，可能用节点分析法较为有利，如果要求支路电流或网孔电流，则采用网孔分析法更好些。

同时掌握这两种分析方法是很有帮助的，其原因有二：首先，可以用一种方法来验证另一种方法得到的结果正确与否；其次，每种方法都有自身的局限性，对于某些实际问题

的分析可能只适用于其中一种分析方法。例如，对晶体管电路的分析只能采用网孔电流法，参见第 7.10 节。对于非平面网络，节点分析法是唯一的选择，因为网孔分析法只适用于平面电路。同样，节点分析法易于编程，所以更适用于计算机处理，从而适合解决难以通过手算来分析的复杂电路网络问题。PSpice 是一种基于节点分析法的计算机分析软件，将在第 7.9.1 节中介绍。

†7.8 △-Y 转换

电路分析中经常出现多个电阻既不是并联也不是串联的情况。例如图 7-42 所示的桥接电路。怎样才能在电阻既不是串联也不是并联的情况下，将电阻 $R_1 \sim R_6$ 进行合并？很多诸如图 7-42所示类型的电路都可以简化为一个三端等效网络。如图 7-43 所示的 Y 形网络或 T 形网络，以及如图 7-44所示的△形网络或 Π 形网络。这类网络可以是整个网络，也可以是巨大网络中的一部分。可用于三相网络、电子滤波器以及网络匹配。本节中主要讨论如何识别网络中的这类电路以及在分析包含这类电路的网络时如何应用△-Y 转换。

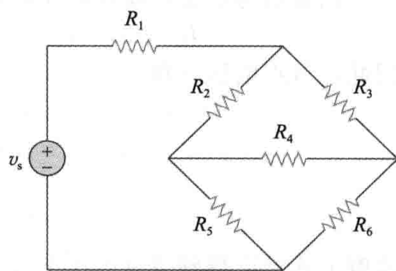


图 7-42 桥接网络

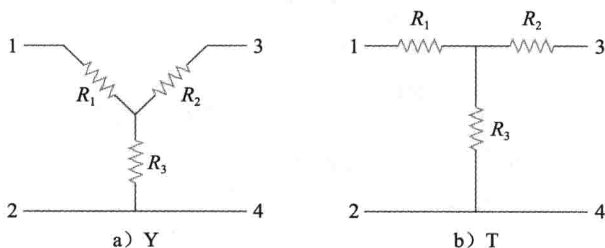


图 7-43 同一网络的两种形式

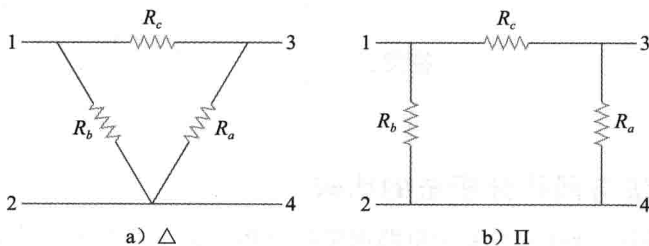


图 7-44 同一网络的两种形式

7.8.1 △形到 Y 形的转换

假定将包含△形结构的电路网络转换为 Y 形网络进行处理更为方便。将一个 Y 形网络叠加在原有的△形网络上，并求出 Y 形网络中的等效电阻。为了求出 Y 形网络中的等效电阻，要对两个网络进行比较，并确保△（或 Π）形网络中的每一对节点之间的电阻值等于 Y（或 T）形网络中对应的每对节点之间的电阻值。以图 7-43 和图 7-44 中的节点 1 和节点 2 为例，有：

$$R_{12}(\mathrm{Y}) = R_1 + R_3 \tag{7-27}$$

$$R_{12}(\triangle) = R_b \mathbin{/\!/} (R_a + R_c) \tag{7-28}$$

令 $R_{12}(\triangle) = R_{12}(\mathrm{Y})$，有：

$$R_{12}=R_1+R_3=\frac{R_b(R_a+R_c)}{R_a+R_b+R_c} \tag{7-29a}$$

同理，

$$R_{13}=R_1+R_2=\frac{R_c(R_a+R_b)}{R_a+R_b+R_c} \tag{7-29b}$$

$$R_{34}=R_2+R_3=\frac{R_a(R_b+R_c)}{R_a+R_b+R_c} \tag{7-29c}$$

式 (7-29a) 减去式 (7-29c)，可得：

$$R_1-R_2=\frac{R_c(R_b-R_a)}{R_a+R_b+R_c} \tag{7-30}$$

式 (7-29b) 与式 (7-30) 相加，可得：

$$\boxed{R_1=\frac{R_bR_c}{R_a+R_b+R_c}} \tag{7-31}$$

式 (7-29b) 减去式 (7-30) 可得：

$$\boxed{R_2=\frac{R_cR_a}{R_a+R_b+R_c}} \tag{7-32}$$

式 (7-29a) 减去式 (7-31) 可得：

$$\boxed{R_3=\frac{R_aR_b}{R_a+R_b+R_c}} \tag{7-33}$$

上述式 (7-31)、式 (7-32) 和式 (7-33) 无需强记。将△形网络转换为 Y 形网络时，可增加一个节点 n，如图 7-45 所示，并按照如下转换规则进行转换：

Y 形网络各电阻值等于△形网络中相邻两条支路电阻的乘积除以 Δ 形网络中三个电阻之和。

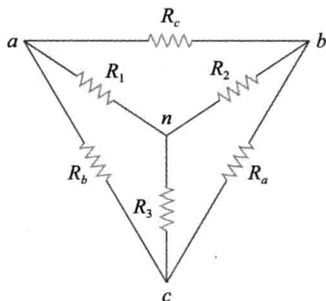


图 7-45 Y 形网络与△形网络叠加为相互转换的辅助电路

7.8.2 Y 形到△形的转换

要求出将 Y 形网络转换为等效△形网络的转换公式，首先由式 (7-31)、式 (7-32) 和式 (7-33) 可以得到：

$$R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1=\frac{R_aR_bR_c(R_a+R_b+R_c)}{(R_a+R_b+R_c)^2}=\frac{R_aR_bR_c}{R_a+R_b+R_c} \tag{7-34}$$

用式 (7-34) 分别除以式 (7-31)、式 (7-32) 和式 (7-33)，得到：

$$\boxed{R_a=\frac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{R_1}} \tag{7-35}$$

$$\boxed{R_b=\frac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{R_2}} \tag{7-36}$$

$$\boxed{R_c=\frac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{R_3}} \tag{7-37}$$

由式 (7-35)、式 (7-36) 和式 (7-37) 以及图 7-45，可以得出如下由 Y 形到△形的转换规则：

△形网络中各电阻值等于 Y 形网络中所有电阻两两相乘之和除以相对的 Y 形网络支路电阻。

称 Y 形网络与△形网络是平衡的，如果满足

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_Y,\quad R_a = R_b = R_c = R_\triangle \tag{7-38}$$

在上述条件下，转换公式变为

$$R_Y = \frac{R_\triangle}{3} \quad 或 \quad R_\triangle = 3R_Y \tag{7-39}$$

注意到在进行转换时，并没有对电路元件做任何增减，只是利用不同的但在数学上等效的三端网络替代原有的三端网络，从而得到一个由电阻串联或并联构成的电路，以便于在需要时计算 R_{eq}。

例 7-12 将图 7-46a 所示的△形网络转换为等效的 Y 形网络。

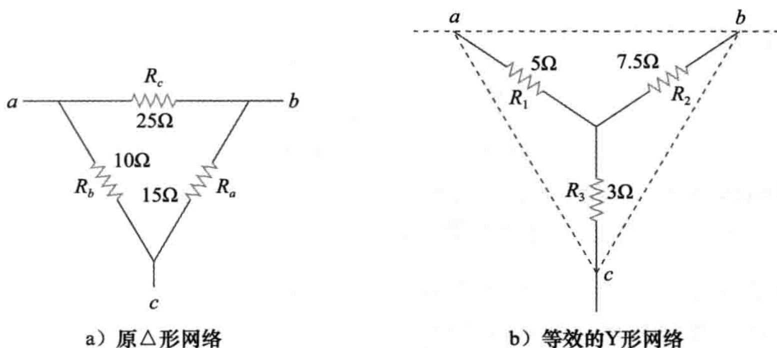
解： 由式（7-31）、式（7-32）和式（7-33），可得：

$$R_1 = \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c} = \frac{25 \times 10}{25 + 10 + 15} = \frac{250}{50} = 5(\Omega)$$

$$R_2 = \frac{R_c R_a}{R_a + R_b + R_c} = \frac{25 \times 15}{50} = 7.5(\Omega)$$

$$R_3 = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b + R_c} = \frac{15 \times 10}{50} = 3(\Omega)$$

等效的 Y 形网络如图 7-46b 所示。



a）原△形网络　　b）等效的Y形网络

图 7-46　例 7-12 的电路原理图 ◀

练习 7-12 将图 7-47 所示的 Y 形网络转换为△形网络。

答案： $R_a = 140\Omega$；$R_b = 70\Omega$；$R_c = 35\Omega$

例 7-13 试求如图 7-48 所示电路的等效电阻 R_{ab}，并由此计算电流 i。

解： 该电路中，有两个 Y 形网络和一个△形网络。将其中之一进行转换就可以简化电路。如果将含有 5Ω、10Ω 和 20Ω 电阻的 Y 形网络转换，则可以选择

$$R_1 = 10\Omega \quad R_2 = 20\Omega \quad R_3 = 5\Omega$$

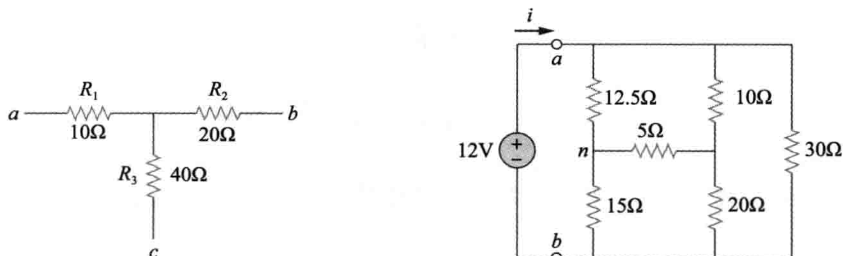


图 7-47　练习 7-12 的电路原理图　　图 7-48　例 7-13 的电路原理图

因此，由式（7-35）、式（7-36）和式（7-37），可得

$$R_a = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_1} = \frac{10 \times 20 + 20 \times 5 + 5 \times 10}{10} = \frac{350}{10} = 35(\Omega)$$

$$R_b = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_2} = \frac{350}{20} = 17.5(\Omega)$$

$$R_c = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_3} = \frac{350}{5} = 70(\Omega)$$

将Y形网络转换为△形网络后的等效电路（暂时去掉电压源）如图7-49a所示。合并图中的三对并联电阻，得到

$$70 \mathbin{/\!/} 30 = \frac{70 \times 30}{70 + 30} = 21(\Omega)$$

$$12.5 \mathbin{/\!/} 17.5 = \frac{12.5 \times 17.5}{12.5 + 17.5} = 7.2917(\Omega)$$

$$15 \mathbin{/\!/} 35 = \frac{15 \times 35}{15 + 35} = 10.5(\Omega)$$

于是得到如图7-49b所示的等效电路。因此

$$R_{ab} = (7.292 + 10.5) \mathbin{/\!/} 21 = \frac{17.792 \times 21}{17.792 + 21} = 9.632(\Omega)$$

则

$$i = \frac{v_s}{R_{ab}} = \frac{12}{9.632} = 1.246(\text{A})$$

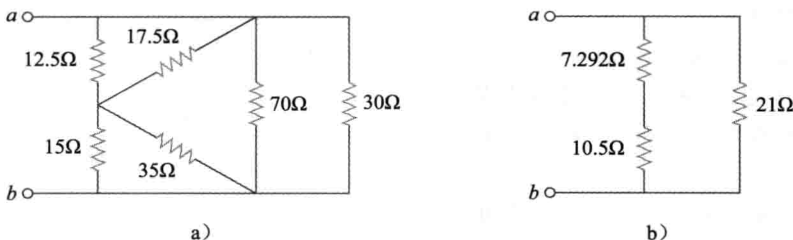


图7-49 图7-48所示电路去掉电压源后的等效电路 ◀

练习7-13 试求图7-50所示桥接电路中的 R_{ab} 和 i。

答案： 40Ω，2.5A

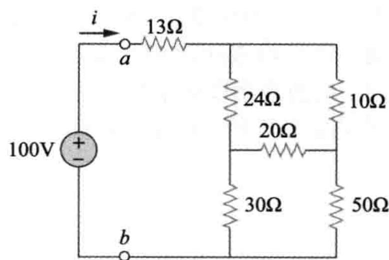


图7-50 练习7-13的电路原理图

7.9 计算机分析

利用PSpice和Multisim都可以分析本章中学到的各种类型电路。本节中将介绍如何使用这两种软件分析电路。

7.9.1 PSpice

实际上，PSpice是基于本章中所探讨的节点分析法。建议读者在学习本节之前先回顾一下C.1节到C.3节。应该注意，只有在所有电路元件值都已知的条件下，PSpice才能够确定支路电压和电流。

例7-14 试利用PSpice求图7-51所示电路中的节点电压。

解： 首先画出给定的电路。按照C.2节和C.3节所介绍的指令，就可以画出如图7-52所示的电路原理图。因为是直流分析，所以应采用电压源VDC和电流源IDC。画完

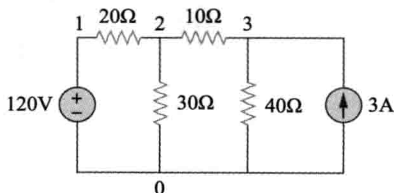


图7-51 例7-14的电路原理图

电路之后将文件保存为 exam714. dsn，然后选择 PSpice/New Simulation Profile，就会打开 New Simulation 对话框。输入文件名"exam714"并单击 Create，打开 Simulation Setting 对话框，单击 OK 按钮。接着选择 **PSpice/Run**，将会对电路进行模拟且结果显示在电路图上，如图 7-52 所示。由图 7-52，可得：

$$V_1 = 120\text{V}, \quad V_2 = 81.29\text{V}, \quad V_3 = 89.03\text{V}$$

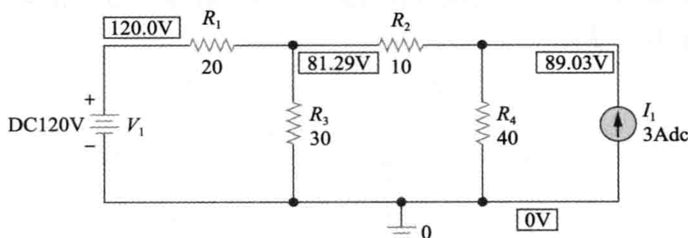


图 7-52 例 7-12：图 7-51 所示电路的 PSpice 原理图

练习 7-14 试利用 PSpice 求图 7-53 所示电路的节点电压。

答案： $V_1 = -54.54\text{V}$，$V_2 = 57.13\text{V}$，$V_3 = 200\text{V}$

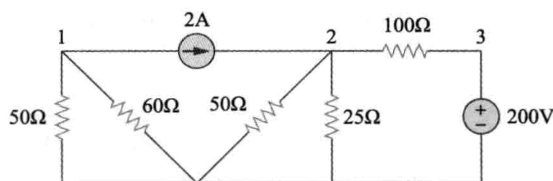


图 7-53 练习 7-14 的电路原理图

7.9.2 Multisim

使用 Multisim 创建电路的所有步骤在附录 D 中已经讲述，这里不再赘述。建议读者在学习本节之前先阅读 D.1 节和 D.2 节。

例 7-15 试利用 Multisim 确定图 7-54所示电路中的电流 V_o、I_1 和 I_2。

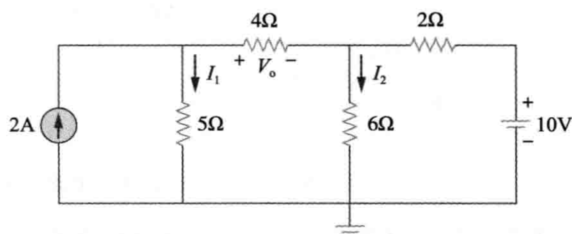


图 7-54 例 7-15 的电路原理图

解： 首先利用 Multisim 创建如图 7-55所示的电路。然后，在 4Ω 电阻两端并联伏特表用以测量 V_o。接着再连接两个电流表用以测量电流 I_1 和 I_2。之后保存电路并打开电源开关进行仿真。仿真完毕后，将得到如图 7-55 所示的结果，即

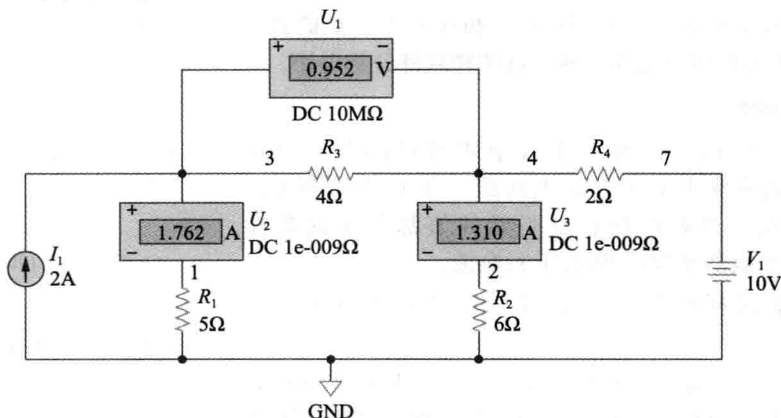


图 7-55 图 7-54 所示电路的仿真结果

$$V_o = 0.952\text{V},\quad I_1 = 1.762\text{A},\quad I_2 = 1.310\text{A}$$ ◀

练习 7-15 试利用 Multisim 确定图 7-56 所示电路中的电流 V_x 和 I_x。

答案： 4.421A；2.211A

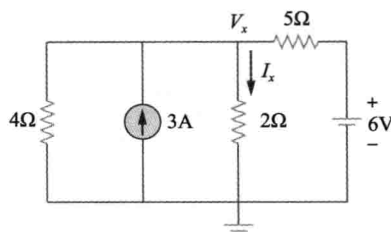


图 7-56 练习 7-15 的电路原理图

†7.10 应用：直流晶体管电路

许多人在日常生活中都使用过电子产品，且有使用个人计算机的经验。这些电子产品以及计算机中集成电路的基本元件是大家熟知的有源三端器件——晶体管（transistor）。晶体管是一种半导体设备，在放大器、开关、稳压器、信号调制器、微处理器以及振荡器等器件中有广泛的实际应用。晶体管在 1947 年发明于贝尔实验室，被誉为二十世纪最重要的发明[⊖]。在开始电子电路的设计之前，了解一下晶体管是十分重要的。

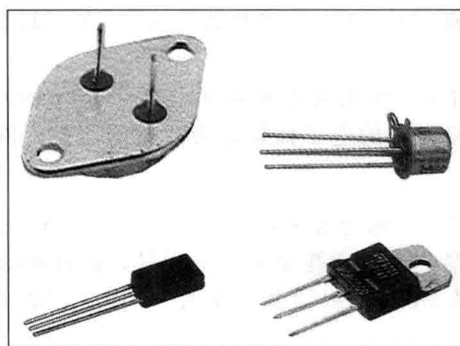


图 7-57 几种不同类型的晶体管
（图片由 Tech America 提供）

图 7-57 给出了几种不同的商用晶体管。晶体管的基本类型有两种：*双极结型晶体管*（bipolar junction transistor，BJT）和*场效应晶体管*（field-effect transistor，FET）。本节仅讨论第一种类型的晶体管，即沿用至今且早于场效应晶体管发明的双极结型晶体管，目的在于对 BJT 有足够的了解，从而能够应用本章介绍的方法分析直流晶体管电路。

双极型晶体管分为两种类型：npn 型与 pnp 型，电路符号如图 7-58 所示。每种器件类型都有三个极，分别命名为发射极（E）、基极（B）和集电极（C）。对于 npn 型晶体管，图 7-59 给出了其电流流向和电压极性。对图 7-59a 应用 KCL，得到：

$$\boxed{I_E = I_B + I_C} \tag{7-40}$$

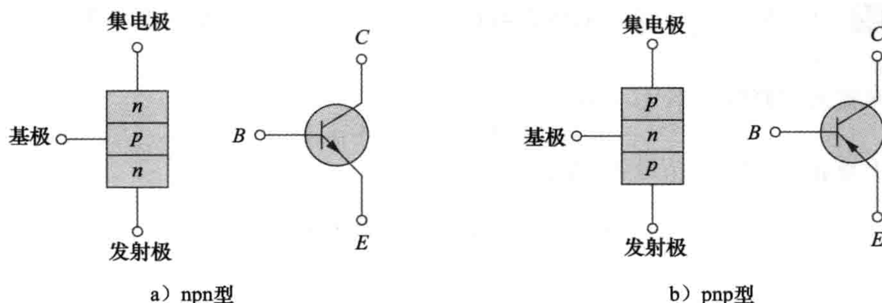


图 7-58 两类双极型晶体管及其电路符号

其中，I_E、I_C 和 I_B 分别为晶体管的发射极电流、集电极电流和基极电流。类似地，对图 7-59b应用 KVL，可得：

$$V_{CE} + V_{EB} + V_{BC} = 0 \tag{7-41}$$

其中，V_{CE}、V_{EB} 和 V_{BC} 分别为晶体管的集电极-发射极电压、发射极-基极电压和基极-集电

⊖ John Bardeen、Walter Brattain 和 William Shockley 等科学家在 1947 年发明了晶体管。

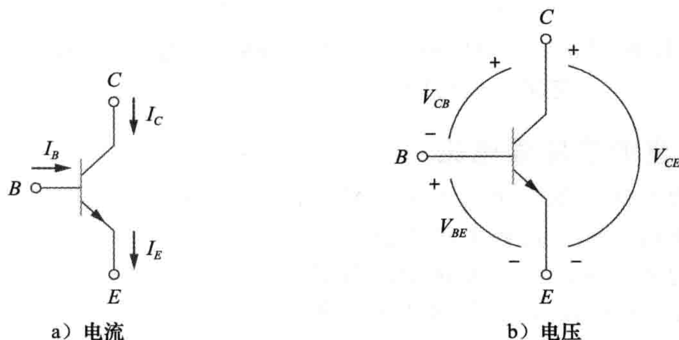


图 7-59 npn 型晶体管的电极参量

极电压。双极型晶体管有三种工作模式：放大、截止和饱和。当 npn 型晶体管处于放大工作模式时，V_{BE} 的典型值约为 0.7V，且有：

$$I_C = \alpha I_E \tag{7-42}$$

其中，α 称为共基极电流增益（common-base current gain）。在式（7-42）中，α 表示由发射极注入的电子被集电极收集的比例。同样，有：

$$\boxed{I_C = \beta I_B} \tag{7-43}$$

其中，β 称为共发射极电流增益（common-emiter current gain）。α 与 β 是给定晶体管的特性参数，通常假定为一个常量，α 的典型取值范围在 0.98～0.999 之间，β 的典型取值范围在 50～1000 之间。由式（7-40）、式（7-42）和式（7-43）可以证明：

$$I_E = (1+\beta)I_B \tag{7-44}$$

且

$$\beta = \frac{\alpha}{1-\alpha} \tag{7-45}$$

即

$$\alpha = \frac{\beta}{\beta+1} \tag{7-46}$$

例 7-16 试求如图 7-60 所示晶体管电路中的 I_B、I_C 和 V_o。假定晶体管工作在放大模式，并且 $\beta=50$。

解：对输入回路应用 KVL，得到：

$$-4 + I_B(20\times10^3) + V_{BE} = 0$$

由于在放大模式下，$V_{BE}=0.7$V，所以：

$$I_B = \frac{4-0.7}{20\times10^3} = 165(\mu\text{A})$$

而

$$I_C = \beta I_B = 50\times165\mu\text{A} = 8.25(\text{mA})$$

对输出回路应用 KVL，得到：

$$-V_o - 100I_C + 6 = 0$$

即

$$V_o = 6 - 100I_C = 6 - 0.825 = 5.175(\text{V})$$

注意，本题中 $V_o=V_{CE}$。◀

练习 7-16 在如图 7-61 所示的晶体管电路中，设 $\beta=100$，$V_{BE}=0.7$V，试求 V_o 与 V_{CE}。

答案：2.876V，2.004V

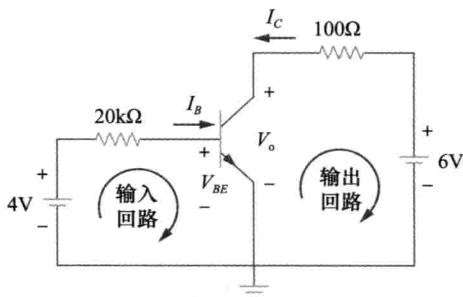


图 7-60 例 7-16 的电路原理图

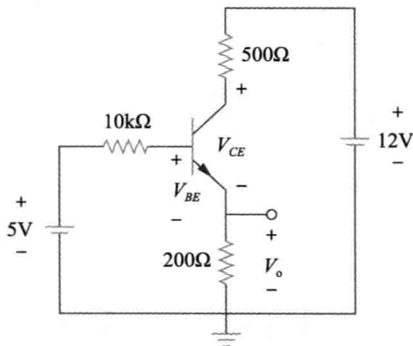


图 7-61 练习 7-16 的电路原理图

7.11 本章小结

1）网孔分析法是对平面电路的网孔应用基尔霍夫电压定律，且用网孔电流表示分析结果，通过求解联立方程组得到各网孔电流。

2）超网孔由具有公共电流源的两个网孔所组成。

3）节点分析法是对非参考节点应用基尔霍夫电流定律（该分析方法既适用于平面电路又适用于非平面电路），且用节点电压表示分析结果，通过求解联立方程组得到各节点的电压。

4）超节点由与电压源连接的两个非参考节点组成。

5）当电路中网孔方程数少于节点方程数时，通常采用网孔分析法；反之，当电路中节点方程数少于网孔方程数时，通常采用节点分析法。

6）△形网络转换为 Y 形网络的公式为

$$R_1 = \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c}$$

$$R_2 = \frac{R_c R_a}{R_a + R_b + R_c}$$

$$R_3 = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b + R_c}$$

7）Y 形网络转换为△形网络的公式为

$$R_a = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1}$$

$$R_b = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2}$$

$$R_c = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3}$$

8）可以利用 PSpice 或者 Multisim 软件对电路进行分析。

9）可以利用本章所介绍的分析方法对直流晶体管电路进行分析。

复习题

1 图 7-62 所示电路的回路方程为：

(a) $-10+4I+6+2I=0$

(b) $10+4I+6+2I=0$

(c) $10+4I-6+2I=0$

(d) $-10+4I-6+2I=0$

2 图 7-62 所示电路的电流 I 为：

(a) −2.667A (b) −0.667A
(c) 0.667A (d) 2.667A

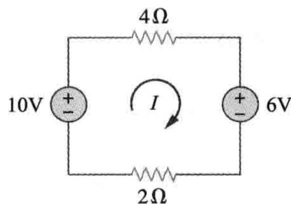


图 7-62 复习题 1 和 2 的电路原理图

3 在图 7-63 所示电路中，电流 I_1 为：
(a) 4A (b) 3A
(c) 2A (d) 1A

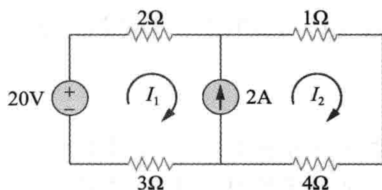


图 7-63 复习题 3 和 4 的电路原理图

4 在图 7-63 所示电路中，电流源两端的电压 V 为：
(a) 20V (b) 15V
(c) 10V (d) 5V

5 网孔分析法主要使用：
(a) 欧姆定律和基尔霍夫电流定律
(b) 基尔霍夫电压定律和欧姆定律
(c) 基尔霍夫电压定律和基尔霍夫电流定律
(d) 欧姆定律、基尔霍夫电压定律和基尔霍夫电流定律

6 对图 7-64 所示电路的节点 1，应用 KCL 可得：
(a) $2+\frac{12-V_1}{3}=\frac{V_1}{6}+\frac{V_1-V_2}{4}$
(b) $2+\frac{V_1-12}{3}=\frac{V_1}{6}+\frac{V_2-V_1}{4}$
(c) $2+\frac{12-V_1}{3}=\frac{0-V_1}{6}+\frac{V_1-V_2}{4}$
(d) $2+\frac{V_1-12}{3}=\frac{0-V_1}{6}+\frac{V_2-V_1}{4}$

7 在图 7-64 所示电路中，对节点 2 应用 KCL 可得：
(a) $\frac{V_2-V_1}{4}+\frac{V_2}{8}=\frac{V_2}{6}$
(b) $\frac{V_1-V_2}{4}+\frac{V_2}{8}=\frac{V_2}{6}$
(c) $\frac{V_1-V_2}{4}+\frac{12-V_2}{8}=\frac{V_2}{6}$
(d) $\frac{V_2-V_1}{4}+\frac{V_2-12}{8}=\frac{V_2}{6}$

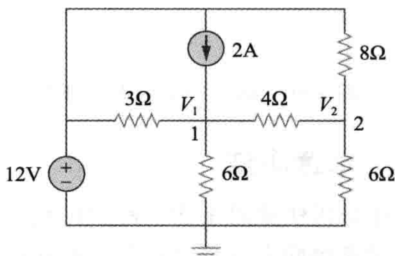


图 7-64 复习题 6 和 7 的电路原理图

8 参考如图 7-65 所示电路，电压 V_1 和 V_2 之间的关系为：
(a) $V_1=6I+8+V_2$
(b) $V_1=6I-8+V_2$
(c) $V_1=-6I+8+V_2$
(d) $V_1=-6I-8+V_2$

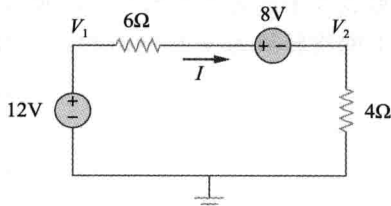


图 7-65 复习题 7 和 8 的电路原理图

9 参考如图 7-65 所示电路，电压 V_2 为：
(a) −8V (b) −1.6V
(c) 1.6V (d) 8V

10 PSpice 软件中，电流控制电压源的名称为：
(a) EX (b) FX
(c) HX (d) GX

答案： 1 (a)，2 (c)，3 (d)，4 (b)，5 (b)，6 (a)，7 (c)，8 (a)，9 (c)，10 (c)

习题

7.2 和 7.3 节

1 计算以下行列式的值：

(a) $\begin{vmatrix} 50 & -2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \\ 6 & 8 & 10 \end{vmatrix}$

2 求以下行列式的值：

(a) $\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 8 \end{vmatrix}$

3 确定以下一组方程中的 I_1 和 I_2。

$$2I_1 - I_2 = 4$$
$$8I_1 + 3I_2 = 5$$

4 求解以下一组方程中的 V_1、V_2 和 V_3。

$$3V_1 - V_2 + 2V_3 = 4$$
$$2V_1 + 3V_2 - V_3 = 14$$
$$7V_1 - 4V_2 + 3V_3 = -4$$

5 试利用网孔分析法求解如图 7-66 所示电路中的 I。

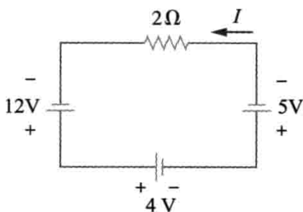


图 7-66 习题 5 的电路原理图

6 试利用网孔分析法求解如图 7-67 所示电路中的 V_o。

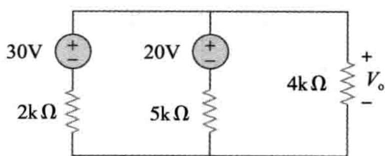


图 7-67 习题 6 和习题 27 的电路原理图

7 试利用网孔分析法求解图 7-68 所示电路中的 i_1 与 i_2。

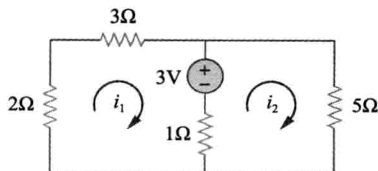


图 7-68 习题 7 和 60 的电路原理图

8 试利用网孔分析法计算图 7-69 所示桥接网络中的网孔电流。

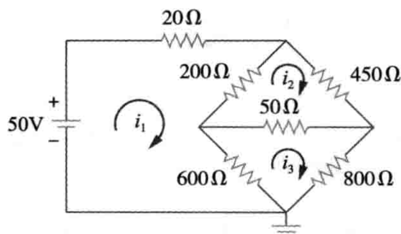


图 7-69 习题 8 和 61 的电路原理图

9 试利用网孔分析法计算图 7-70 所示电路中的电流 I_x。

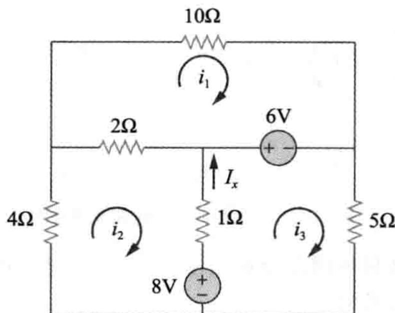


图 7-70 习题 9 的电路原理图

10 试利用网孔分析法求解如图 7-71 所示电路中的 V_o。

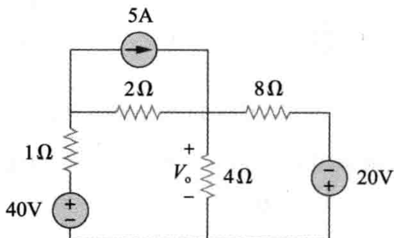


图 7-71 习题 10 和习题 65 的电路原理图

11 试利用网孔分析法求解图 7-72 所示电路中的网孔电流 i_1、i_2 与 i_3。

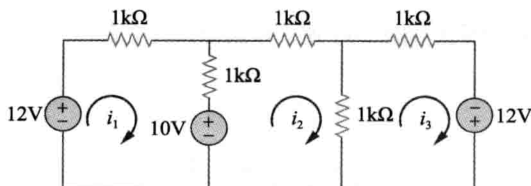


图 7-72 习题 11 的电路原理图

12 试利用网孔分析法计算图 7-73 所示电路中的 I_x。

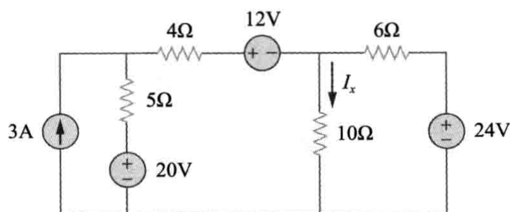


图 7-73 习题 12 的电路原理图

13 试利用网孔分析法计算图 7-74 所示电路中的 I_a、I_b 和 I_c。设所有的电阻为 20Ω。

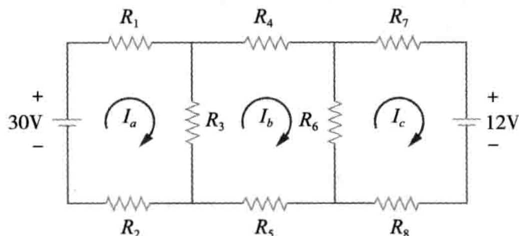


图 7-74 习题 13 的电路原理图

14 试利用网孔分析法求解图 7-75 所示电路中的电流 I_o。

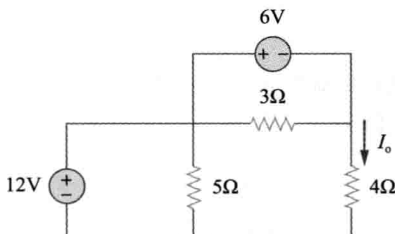


图 7-75 习题 14 的电路原理图

15 试求解图 7-76 所示电路中的网孔电流。

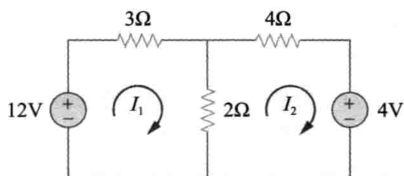


图 7-76 习题 15 的电路原理图

16 写出如图 7-77 所示电路的网孔方程。

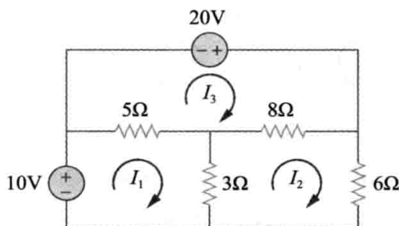


图 7-77 习题 16 的电路原理图

17 写出如图 7-78 所示电路的网孔方程。

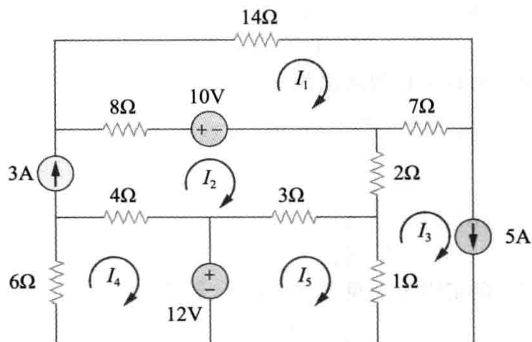


图 7-78 习题 17 的电路原理图

18 试利用网孔分析法求解图 7-79 所示电路中的 I 和 V。

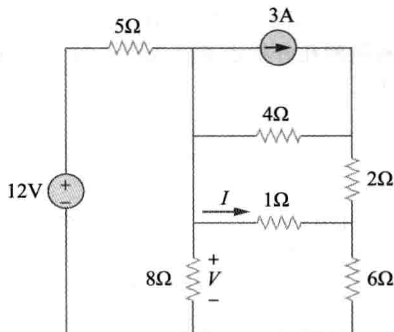


图 7-79 习题 18 的电路原理图

19 试求解图 7-80 所示电路中的 V_o 和 I_o。

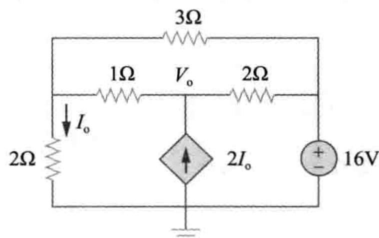


图 7-80 习题 19 的电路原理图

20 试利用网孔分析法计算图 7-81 所示电路中的 I_o。

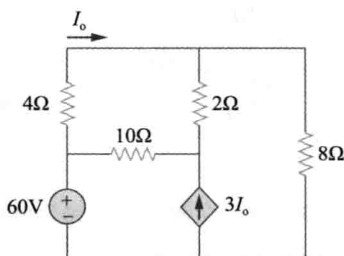


图 7-81 习题 20 的电路原理图

21 试利用网孔分析法求解图 7-82 所示电路中的 i_1、i_2 与 i_3。

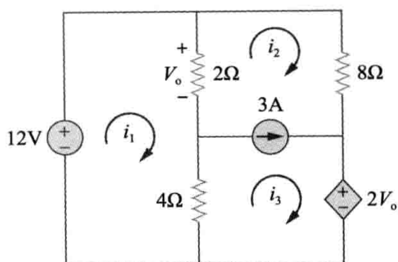


图 7-82 习题 21 的电路原理图

7.4 节和 7.5 节

22 试求解如图 7-83 所示电路中的 V_1 与 V_2。

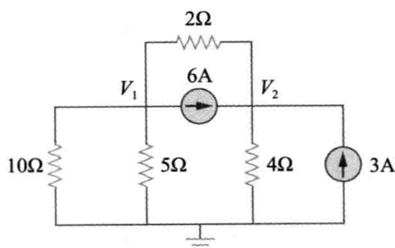


图 7-83 习题 22 的电路原理图

23 试求图 7-84 所示电路中的 V_o。

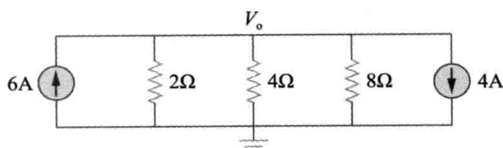


图 7-84 习题 23 的电路原理图

24 试利用节点分析法求图 7-85 所示电路中的 V_x。

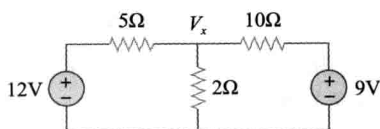


图 7-85 习题 24 的电路原理图

25 试求解图 7-86 所示电路中的电流 V_1、V_2 与 V_3。

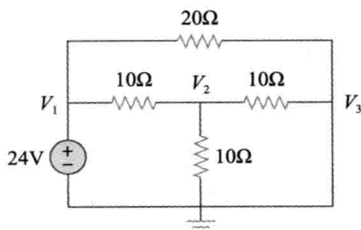


图 7-86 习题 25 和习题 62 的电路原理图

26 给定如图 7-87 所示电路，试计算 V_1 与 V_2。

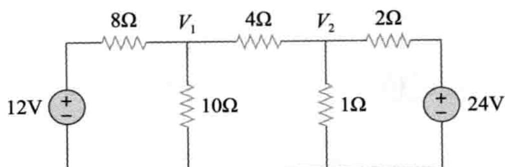


图 7-87 习题 26 的电路原理图

27 试求解如图 7-67 所示电路中的 V_o。

28 试计算图 7-88 所示电路中的 V_1 与 V_2。

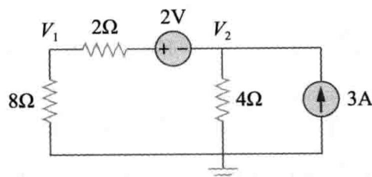


图 7-88 习题 28 的电路原理图

29 试利用节点分析法求解图 7-89 所示电路中的电流 I_o。

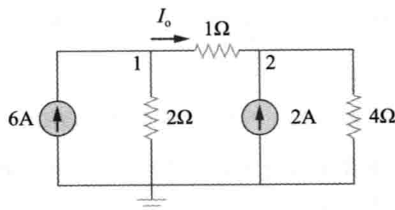


图 7-89 习题 29 的电路原理图

30 试利用节点分析法确定图 7-90 所示电路中的节点电压。

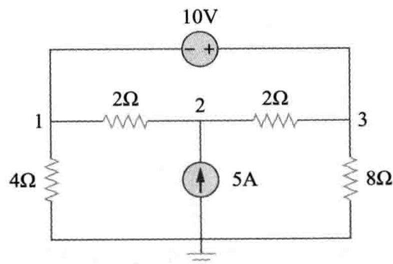


图 7-90 习题 30 的电路原理图

31 试求图 7-91 所示电路的 V_1 与 V_2。

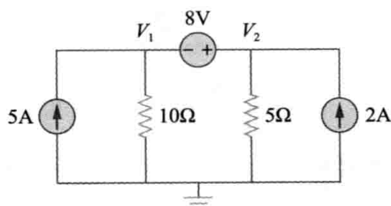


图 7-91 习题 31 和习题 64 的电路原理图

32　试求图 7-92 所示电路中的 i_s。

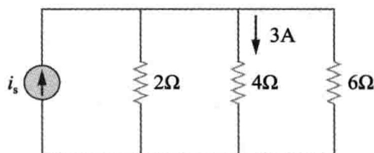


图 7-92　习题 32 的电路原理图

33　试计算图 7-93 所示电路中的 v_s。

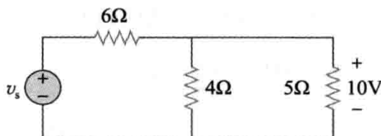


图 7-93　习题 33 的电路原理图

34　试利用节点分析法求解图 7-94 所示电路中的 V_1 与 V_2。

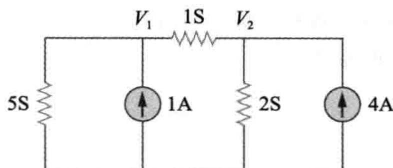


图 7-94　习题 34 的电路原理图

35　试利用节点分析法求解图 7-95 所示电路中的 V_1 与 V_2。

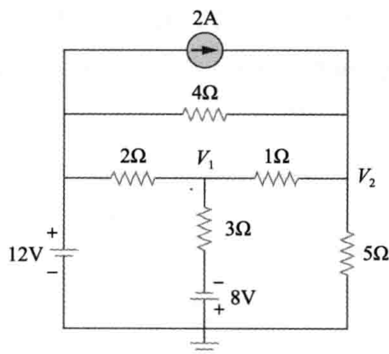


图 7-95　习题 35 的电路原理图

36　试利用节点分析法求解图 7-96 所示电路中的 V_o。

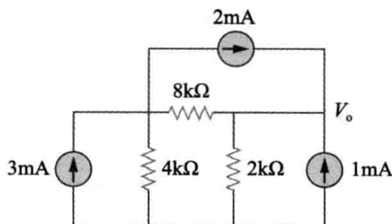


图 7-96　习题 36 的电路原理图

37　试确定图 7-97 所示电路中的节点电压。

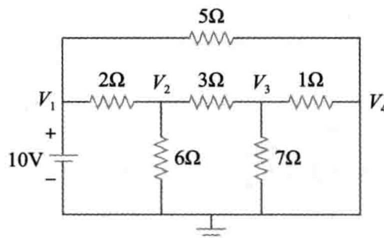


图 7-97　习题 37 的电路原理图

38　试利用节点分析法求解图 7-98 所示电路中的 V 和 I。

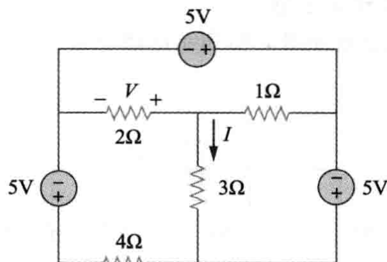


图 7-98　习题 38 的电路原理图

*39　考虑如图 7-99 所示电路，试利用节点分析法求解 V 和 I。⊖

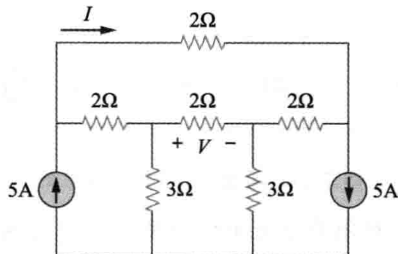


图 7-99　习题 39 的电路原理图

40　考虑如图 7-100 所示电路，试利用节点分析法求解 V 和 I。

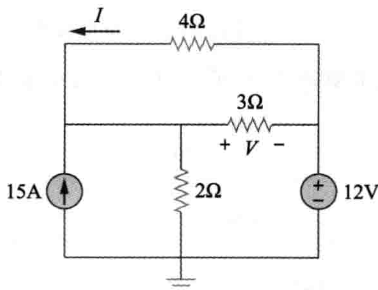


图 7-100　习题 40 的电路原理图

⊖　星号表示该题为具有挑战性的问题。

41 试确定图 7-101 所示电路中的 V_1 和 V_2 以及各个电阻消耗的功率。

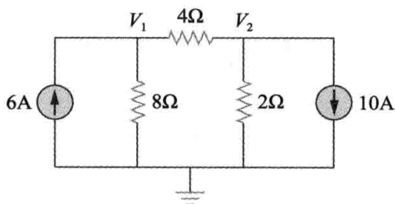


图 7-101 习题 41 的电路原理图

42 试利用节点分析法求解图 7-102 所示电路中的 V_x。

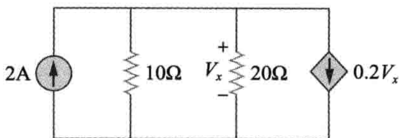


图 7-102 习题 42 的电路原理图

43 试利用节点分析法确定图 7-103 所示电路中的 I_b。

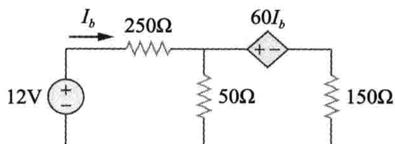


图 7-103 习题 43 的电路原理图

44 试求解图 7-104 所示电路中的 I_o。

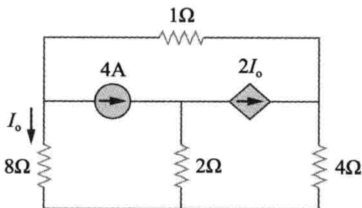


图 7-104 习题 44 的电路原理图

7.6 节

45 试通过观察法写出图 7-105 所示电路的网孔电流方程，并计算 8Ω 电阻吸收的功率。

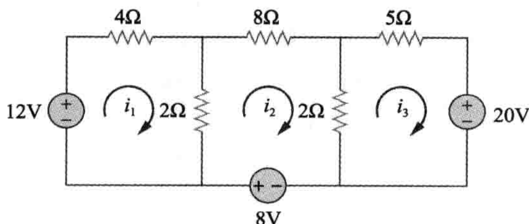


图 7-105 习题 45 的电路原理图

46 试通过观察法写出图 7-106 所示电路的网孔电流方程。

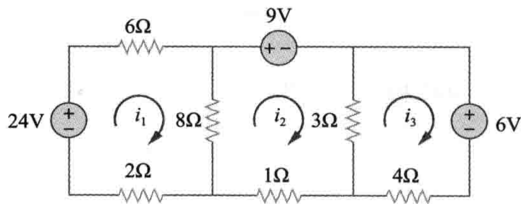


图 7-106 习题 46 的电路原理图

47 试通过观察法写出图 7-107 所示电路的网孔电流方程。

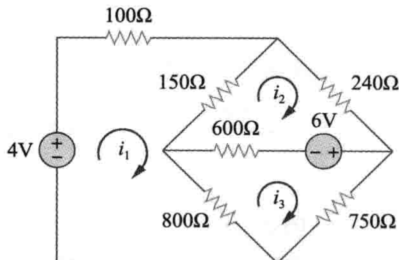


图 7-107 习题 47 的电路原理图

48 试通过观察法写出图 7-108 所示电路的节点电压方程，并确定节点电压 V_1 与 V_2 的值。

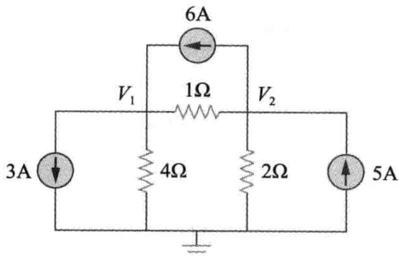


图 7-108 习题 48 的电路原理图

49 试通过观察法写出图 7-109 所示电路的节点电压方程。

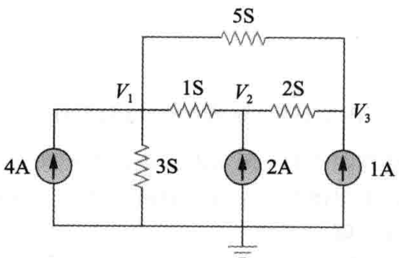


图 7-109 习题 49 的电路原理图

50 试通过观察法写出图 7-110 所示电路的节点电压方程。

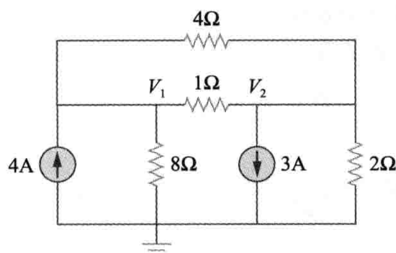


图 7-110 习题 50 的电路原理图

51 试通过观察法写出图 7-111 所示电路的节点电压方程。

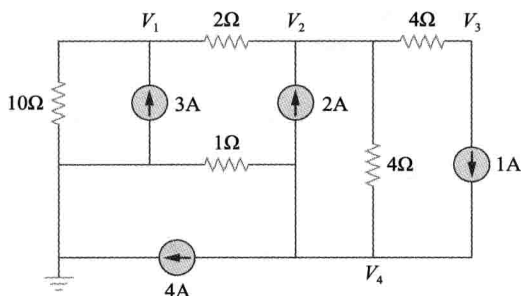


图 7-111 习题 51 和习题 63 的电路原理图

7.8 节

52 试将图 7-112 所示电路由 Y 形转换为△形。

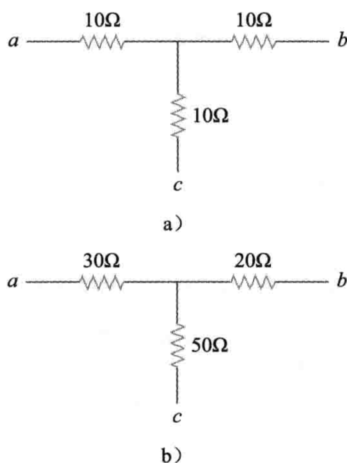


图 7-112 习题 52 的电路原理图

53 试将图 7-113 所示电路由△形转换为 Y 形。

54 试求出图 7-114 所示电路中端口 a-b 间的等效电阻。

*55 试求出图 7-115 所示各个电路的等效电阻 R_{ab}。在 (b) 中，各个电阻阻值均为 30Ω。

56 考虑图 7-116 所示电路，试求各端口间的等效电阻：(a) 端口 a-b；(b) 端口 c-d。

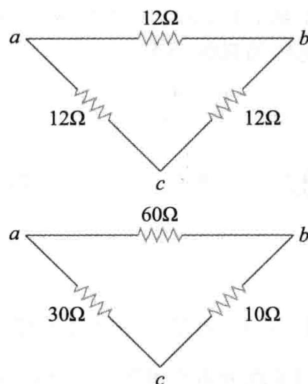


图 7-113 习题 53 的电路原理图

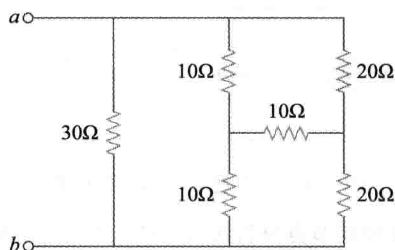


图 7-114 习题 54 的电路原理图

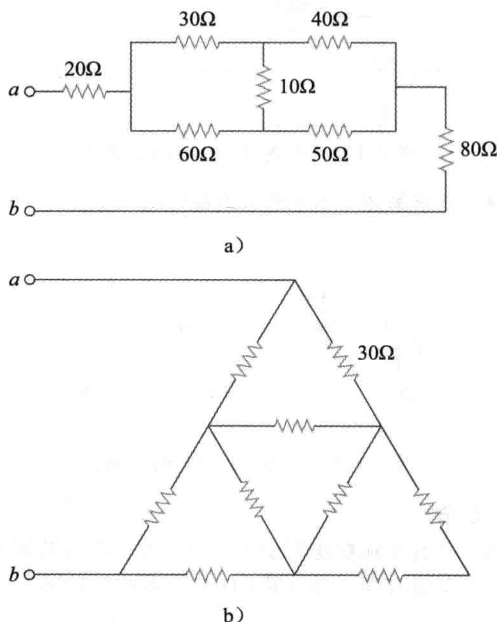


图 7-115 习题 55 的电路原理图

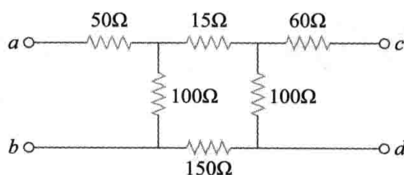


图 7-116 习题 56 的电路原理图

57 试计算图 7-117 所示电路中的 I_o。

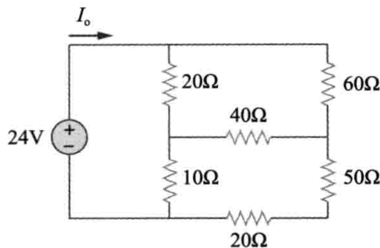


图 7-117 习题 57 的电路原理图

58 试计算图 7-118 所示电路中的 V。

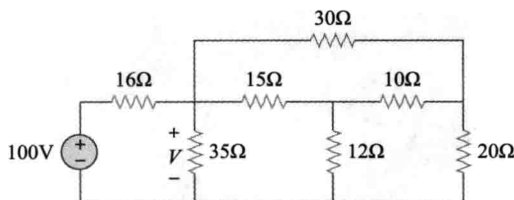


图 7-118 习题 58 的电路原理图

59 试计算图 7-119 所示电路中的 I_x。

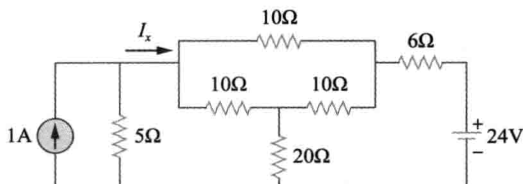


图 7-119 习题 59 的电路原理图

7.9 节

60 试利用 PSpice 求解习题 7。

61 试利用 PSpice 重做习题 8。

62 试利用 PSpice 求解习题 25。

63 试利用 PSpice 求解图 7-111 的节点电压。

64 试利用 Multisim 重做习题 31。

65 试利用 Multisim 求解习题 10。

66 试利用 Multisim 求解习题 59。

67 试利用 PSpice 求解图 7-120 所示电路的 V_o。

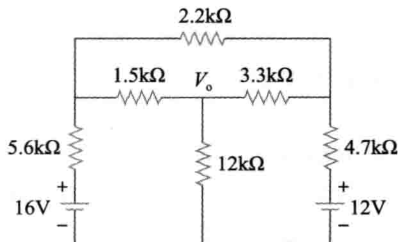


图 7-120 习题 67 的电路原理图

7.10 节

68 求解图 7-121 所示电路中的 I_C 与 V_{CE}，设 $\beta \approx 0$，$V_{BE}=0.7\text{V}$。

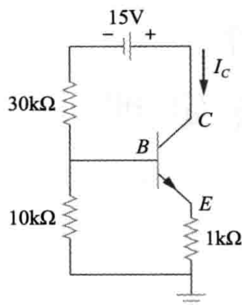


图 7-121 习题 68 的电路原理图

69 在图 7-122 所示的晶体管电路中，令 $\beta=75$，$V_{BE}=0.7\text{V}$。要给集电极－发射极提供 2V 电压，V_i 的取值为多少？

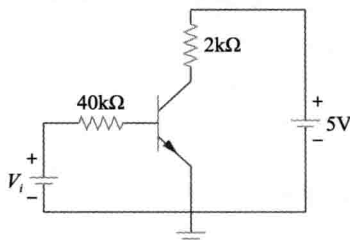


图 7-122 习题 69 的电路原理图

70 计算如图 7-123 所示晶体管电路中的 V_s，给定 $V_o=4\text{V}$，$\beta=150$，$V_{BE}=0.7\text{V}$。

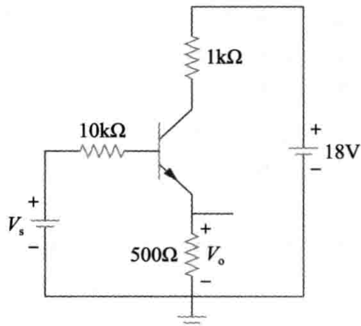


图 7-123 习题 70 的电路原理图

71 在图 7-124 所示的晶体管电路中，试求 I_B、V_{CE} 与 V_o，假定 $\beta=200$，$V_{BE}=0.7\text{V}$。

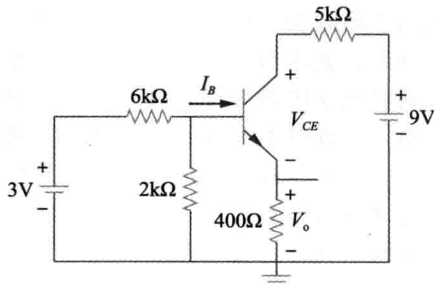


图 7-124 习题 71 的电路原理图

第 8 章

电 路 定 理

不犯错的人，一事无成。

——Paul Winkler

拓展职业生涯

计算机工程技术相关职业



警察利用计算机工作

(© The McGraw-Hill Companies, Inc. /Kefover/Opatrany)

计算机工程技术的教育在近十年来发生了巨大的变化。在现代社会和教育中计算机占据了显著位置。它们促进了研究、开发、生产、商贸和娱乐面貌的改变。科学家、工程师、医生、律师、教师、飞行员、商人——几乎每个人都受益于计算机的大规模信息存储能力和实时信息处理能力。计算机的使用范围正飞速地扩大，互联网作为计算机通信网络已经成为工业、医学、商业、教育和图书管理学中不可缺少的部分。

研究计算机系统的三个主要学科是计算机科学、计算机工程技术和信息管理科学。其中，计算机工程技术由于其快速发展和广泛应用而从电子工程技术中脱颖而出。但是在许多工程技术院校，计算机工程技术依然是电子工程技术专业的必要部分。

计算机工程技术教育能够为软件设计、硬件设计和基础建模技术提供广阔的基础知识。它应该包含数据结构、数字系统、计算机结构、微处理、接口设计、编程、软件工程和操作系统等课程。专门从事计算机工程的电子工程技术人员可以在计算机工业以及大多数计算应用领域找到合适的工作岗位。软件设计公司正在数量上和规模上迅速发展，也为具有编程技术的人员提供了大量的就业机会。IEEE 计算机协会主办了多种多样的杂志、期刊和会议，加入它是增长计算机知识的一个极佳方式。

8.1 引言

第 7 章中已经指出利用基尔霍夫定律分析电路的一个突出优势在于，无需对原电路结构做出任何改变，即可实现对电路的分析。而这种方法的主要缺陷体现在分析大规模、复杂电路时，其求解计算过程也会变得相当繁琐。

随着电子电路应用领域的不断扩展，它已经从简单电路演化到复杂电路。为了处理复杂电路，工程技术专家经过多年努力研究出一些定理以简化电路分析过程，其中包括戴维南定理、诺顿定理、弥尔曼定理、替换定理和互易定理[⊖]，这些定理可以看作前面章节讨论过的网孔和节点分析法的特殊应用。由于这些定理适用于线性电路，因此本章首先讨论线性电路的概念，在此基础之上进一步讨论叠加定理，电源变换以及最大功率传输等基本

⊖ 戴维南定理众多应用其中之一可用于分析非平衡的惠斯通电桥（参见图 6-41）。

原理。随后会将本章中涉及的概念应用于电源建模的问题中。

8.2　线性特性

线性是一种描述具有固定比例增量的因果关系的元件属性，它是齐次性和叠加性的组合。虽然这种属性适用于多种电路元件，本章仅讨论电阻元件的线性特性。

线性关系是一个参量与另一个参量成正比例关系的一种状态。

齐次性是指，如果输入（也称为激励）乘以一个常数，那么输出（也称为响应）也相应地乘以同一个常数。以电阻为例，根据欧姆定律可知，输入电流 I 与输出电压 V 之间的关系为

$$V = IR \tag{8-1}$$

如果电流乘以常量 k，那么电压也相应地增加了 k 倍，即

$$\boxed{kIR = kV} \tag{8-2}$$

可加性是指，各个输入之和的响应等于每个输入单独作用于系统产生的响应之和，仍以上述电阻的电压和电流关系为例，如果

$$V_1 = I_1 R \tag{8-3a}$$

且

$$V_2 = I_2 R \tag{8-3b}$$

那么当输入为 $(I_1 + I_2)$ 时，有

$$\boxed{V = (I_1 + I_2)R = I_1 R + I_2 R = V_1 + V_2} \tag{8-4}$$

线性电路就是由线性元件构成的电路。

由于电阻的电压-电流关系既满足齐次性又满足可加性，因此称其为线性元件。一般而言，线性电路仅由线性元件和线性电源组成。线性元件的输入-输出关系是线性的。例如，电阻、电容和电感属于线性元件，而二极管、晶体管和运算放大器则属于非线性元件。

本书只讨论线性电路。注意，由于功率 $P = I^2 R = V^2/R$（是一个二次函数而不是线性函数），因此功率与电压（或电流）之间的关系是非线性的。所以，本章介绍的定理不适用于功率计算。

为了更好地理解线性原理，考虑图 8-1 所示的线性电路。该线性电路内部没有独立源，且由电压源 V_s 激励，即该电路的输入为 V_s，在电路输出端接一负载电阻 R（CD 播放机可以作为激励源，而喇叭可以看作负载），并以流经负载电阻 R 的电流作为输出。假设 $V_s = 10\text{V}$ 时，$I = 2\text{A}$，那么依据线性原理，当 $V_s = 1\text{V}$ 时，应有 $I = 0.2\text{A}$。同理，如果 $I = 1\text{mA}$，则其输入必须为 $V_s = 5\text{mV}$。

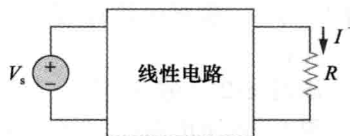


图 8-1　输入为 V_s，输出为 I 的线性电路

例 8-1　当 $V_s = 12\text{V}$ 和 $V_s = 24\text{V}$ 时，计算图 8-2 所示电路中的 I_o。

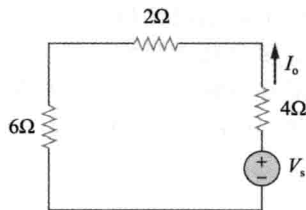


图 8-2　例 8-1 的电路原理图

解：对回路应用 KVL，得到

$$(6 + 2 + 4)I_o - V_s = 0$$

可得

$$I_o = \frac{V_s}{12}$$

当 $V_s = 12$V 时，

$$I_o = \frac{12}{12} = 1(\text{A})$$

当 $V_s = 24$V 时，

$$I_o = \frac{24}{12} = 2(\text{A})$$

这表明，当电源电压为原来的 2 倍时，I_o 也变为原来的 2 倍。◀

练习 8-1 当 $I_s = 15$A 和 $I_s = 30$A 时，试计算图 8-3所示电路中的 V_o。 **答案：** 10V；20V

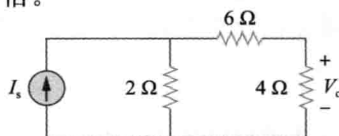


图 8-3 练习 8-1 的电路原理图

例 8-2 假定 $I_o = 1$A 利用线性原理试计算图 8-4 所示电路中 I_o 的实际值。

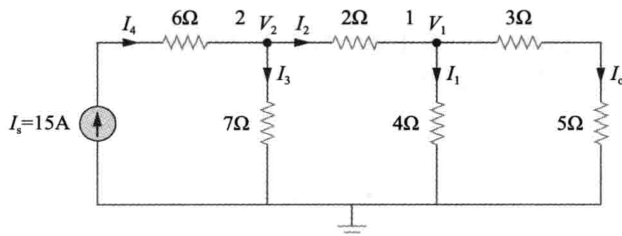


图 8-4 例 8-2 的电路原理图

解： 如果 $I_o = 1$A，那么 $V_1 =$ (3+5) $I_o = 8$V，且 $I_1 = V_1/4 = 2$A。

对节点 1 应用 KCL，得到

$$I_2 = I_1 + I_o = 3(\text{A})$$

注意到，

$$V_2 = V_1 + 2I_2 = 8 + 2 \times 3 = 14(\text{V})$$
$$I_3 = V_2/7 = 14/7 = 2(\text{A})$$

对节点 2 应用 KCL，得到

$$I_4 = I_3 + I_2 = 5(\text{A})$$

因此得到的 $I_s = 5$A。这表明当假定 $I_o = 1$A 时得到 $I_s = 5$A，实际电流源值为 15A 时得到 I_o 的实际值 $I_o = 3$A。◀

练习 8-2 假定 $V_o = 1$V 利用线性原理试计算图 8-5所示电路中 V_o 的实际值。 **答案：** 4V

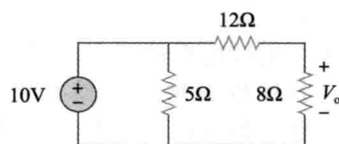


图 8-5 练习 8-2 的电路原理图

8.3 叠加定理

由电路的线性特性可以引出**叠加定理**[㊀](superposition)。叠加定理可以帮助我们分析包含有多个独立源的线性电路，即分别计算每个独立源单独作用下产生的响应，然后相加得到最终的响应。然而，应用叠加定理必须牢记一条原则，即每次只考虑一个独立源，同时关闭（turn off）其他独立源或者将其他独立源**置零**[㊁](reduced to zero)。这意味着每个

㊀ 叠加定理不仅仅局限于电路分析，对具有线性因果关系的其他许多领域同样适用。

㊁ 与关闭意思相同的常见术语包括：切断、无效化、失效、抑制或置零等。

电压源用0V或者短路代替，每个电流源用0A或者开路代替（这是理论上得到的结果并不能应用于具体实验）。通过这种方式就可以得到一个更简单、更容易处理的电路。

叠加定理是指线性电路中元件两端的电压（或者流经元件的电流）是在每个独立源单独作用下得到的该元件两端的电压（或流经该元件的电流）的代数和。

牢记叠加定理内容，按照右下侧三个步骤应用叠加定理。

采用叠加定理分析电路的一个主要缺点是它所涉及的计算比较多。例如，如果待分析电路包含三个独立电源，则必须分别分析计算由三个独立源单独作用时所产生的响应。然而，叠加定理的优点在于，将电压源用短路代替，或电流源用开路代替，可以有效降低电路的复杂程度，从而将复杂电路简化成简单电路。

必须牢记叠加定理的基础是线性关系，正如之前所指出的，叠加定理不适用于通过每个独立源来计算功率，这是因为电阻吸收的功率与电压或者电流成平方关系，而不满足线性关系。如果要求计算功率，必须利用叠加定理先计算流经元件的电流（或者元件两端的电压），然后再计算功率。另一方面，关闭或启用独立源会使得电路结构发生变化，导致之前的分析计算不再适用，需要重新进行分析。

应用叠加定理的步骤：
1) 将一个独立电源之外的其他所有独立电源关闭，利用基尔霍夫定律计算出有效独立源作用于电路时的输出（电压或电流）。
2) 对其他各个独立源重复步骤1。
3) 将各个独立源单独作用于电路时产生的响应进行代数求和，从而得到电路的总响应。

例 8-3 试利用叠加定理计算图8-6所示电路中的V。

解： 电路中包含2个独立源，根据叠加定理，令，

$$V = V_1 + V_2$$

其中，V_1和V_2分别为6V电压源和3A电流源单独作用时产生的响应。为得到V_1，应当置电流源为零值，如图8-7a所示，对图8-7a中的回路应用KVL，可以得到，

$$12i_1 - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad i_1 = 0.5\text{A}$$

因此，

$$V_1 = 4i_1 = 2\text{V}$$

另外，还可以采用分压原理来计算V_1，即，

$$V_1 = \frac{4}{4+8} \times 6 = 2(\text{V})$$

为求出V_2，应将独立电压源置零值，如图8-7b所示，利用分流原理可得，

$$I_3 = \frac{8}{4+8} \times 3 = 2(\text{A})$$

由此，

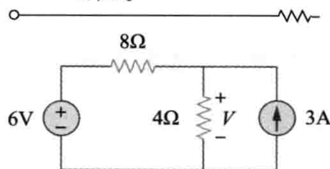


图8-6 例8-3的电路原理图

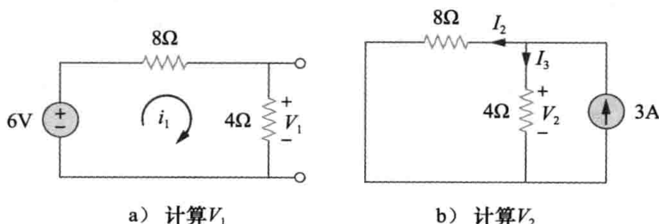


图8-7 例8-3的电路原理图

$$V_2 = 4I_3 = 8\text{V}$$

因此，

$$V = V_1 + V_2 = 2 + 8 = 10(\text{V})$$

◀

练习 8-3 试利用叠加定理计算图 8-8 所示电路中的 V_o。 **答：** 12V

例 8-4 试利用叠加定理计算图 8-9 所示电路中的 I。

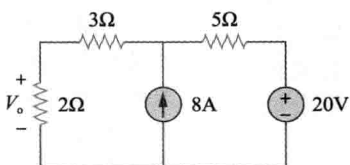


图 8-8 练习 8-3 的电路原理图

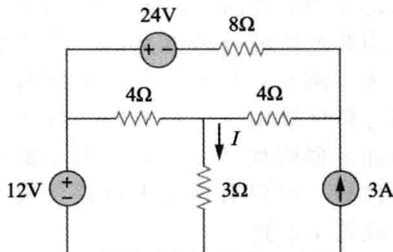


图 8-9 例 8-4 的电路原理图

解： 本例电路中包含三个独立源，因此令

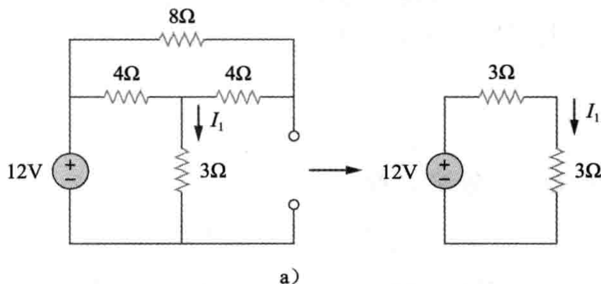
$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

其中，I_1、I_2、I_3 分别对应于 12V、24V 和 3A 独立源单独作用时产生的电流。为计算得到 I_1，考虑如图 8-10a 所示的电路，位于右侧的 4Ω 电阻和 8Ω 电阻串联得到 12Ω 电阻，该 12Ω 电阻又与 4Ω 电阻并联，合并后得到 12×4/16=3Ω。因此

$$I_1 = \frac{12}{6} = 2(\text{A})$$

为得到 I_2，考虑如图 8-10b 所示的电路，采用网孔分析法得到

$$16i_a - 4i_b + 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4i_a - i_b = -6 \tag{8-4-1}$$



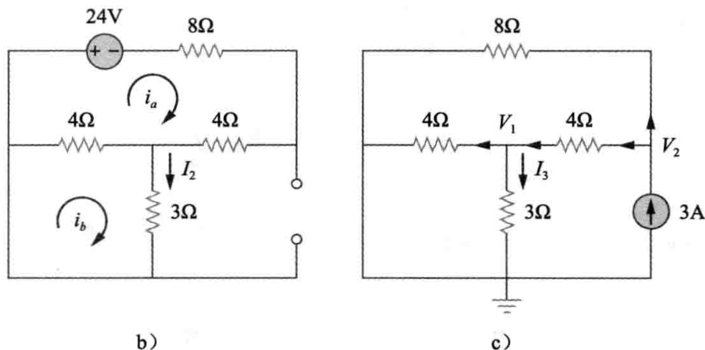


图 8-10 例 8-4 的电路原理图

$$7i_b - 4i_a = 0 \quad \Rightarrow \quad i_a = \frac{7}{4}i_b \tag{8-4-2}$$

将式（8-4-2）代入式（8-4-1）得到

$$I_2 = i_b = -1(\text{A})$$

为得到 I_3，考虑如图 8-10c 所示的电路，采用节点分析法得到

$$3 = \frac{V_2}{8} + \frac{V_2 - V_1}{4} \quad \Rightarrow \quad 24 = 3V_2 - 2V_1 \tag{8-4-3}$$

$$\frac{V_2 - V_1}{4} = \frac{V_1}{4} + \frac{V_1}{3} \quad \Rightarrow \quad V_2 = \frac{10}{3}V_1 \tag{8-4-4}$$

将式（8-4-4）代入式（8-4-3）得到 $V_1=3\text{V}$，且

$$I_3 = \frac{V_1}{3} = 1(\text{A})$$

因此，

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 2 - 1 + 1 = 2(\text{A})$$ ◀

练习 8-4 试利用叠加定理计算图 8-11 所示电路中的 I。 **答案：** 0.75A

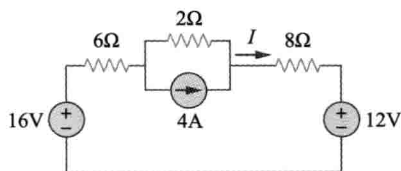


图 8-11 练习 8-4 的电路原理图

8.4 电源变换

由 7.6 节可知，当电路中的电源均为独立电流源（或独立电压源）时，仅通过观察电路的方法就可以写出电路的节点电压（或网孔电流）方程。因此，在电路分析时，如图 8-12所示，将与电阻串联的电压源转换为与电阻并联的电流源，反之亦然，这样在某些情况下会使电路分析变得非常方便，这种转换称为电源变换。

电源变换是指用与电阻并联的电流源 I_s 代替与电阻串联的电压源 V_s（或者反之）的转换过程。

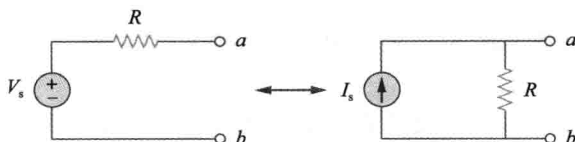


图 8-12 独立电源的变换

只要如图 8-12 所示的两个电路在端口 a-b 呈现相同的电压-电流关系，则二者就是等效的。可以很容易地证明这两个电路的等效关系。如果将两个电源关闭，则两个电路在端口 a-b 之间的等效电阻均为 R。另一方面，当端口 a-b 短路时，则左侧电路中从 a 到 b 的短路电流 $I_{sc}=V_s/R$，右侧电路中从 a 到 b 的短路电流 $I_{sc}=I_s$。因此，为了确保两个电路等效，就必须要求 $V_s/R=I_s$。所以，电源变换必须满足：

$$V_s = I_sR \quad \text{或} \quad I_s = \frac{V_s}{R} \tag{8-5}$$

电源变换同样适用于受控源，前提条件是对受控源变量做相应的处理。如图 8-13 所示，与电阻串联的受控电压源可以转换为与电阻并联的受控电流源，反之亦然，但必须确保满足式（8-5）。

同第 7 章中所学的 Y-△变换一样，电源变换不会对电路的其他部分产生任何影响。电源变换是一种通过变换电路形式而简化电路分析过程的有效分析方法。但是，在使用电源变换时，必须注意以下两点：

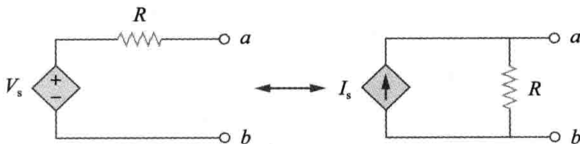


图 8-13 受控源的变换

1）由图 8-12 可见，电流源的电流方向应该指向电压源的正极。

2）由式（8-5）可知，当电阻 $R=0$ 时，即理想电压源的情况，电源变换是不可行的。然而，实际电路中均为非理想电压源，即 $R\neq 0$。同理，对于 $R=\infty$ 的理想电流源也不能用有限电压源来代替。8.12 节将会对理想电源和非理想电源进一步展开讨论。

例 8-5 试分别计算如图 8-14a 所示电路中电流 I 在电源变换前后的数值。

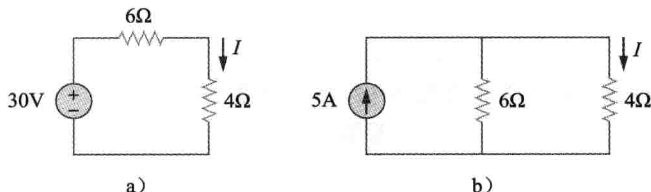


图 8-14 例 8-5 的电路原理图

解： 电源变换前

$$I=\frac{30}{6+4}=3(\mathrm{A})$$

如图 8-14b 所示，将与 6Ω 电阻串联的 30V 电压源转换为与 6Ω 电阻并联的 5A（即 30/6）电流源。利用分流原理得到

$$I=\frac{6}{6+4}\times 5=3(\mathrm{A})$$

可以看出两种方法的结果一样。 ◀

练习 8-5 试分别计算如图 8-15 所示电路中电源 V_o 在电源变换前后的数值。

答案： 40V；40V

例 8-6 试利用电源变换的方法计算如图 8-16 所示电路中的 V_o。

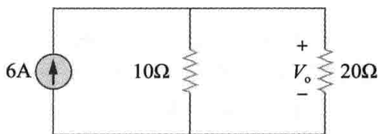


图 8-15 练习 8-5 的电路原理图

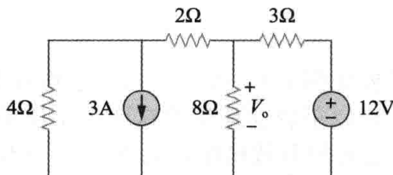


图 8-16 例 8-6 的电路原理图

解： 首先分别对图 8-16 中的电流源和电压源进行电源变换，得到如图 8-17a 所示的电路。然后将相互串联的 4Ω 和 2Ω 电阻合并，同时对 12V 电压源进行电源变换，得到如图 8-17b所示的电路。接着将相互并联的 3Ω 和 6Ω 电阻合并为一个 2Ω 电阻，并将 2A 电流源和 4A 电流源合并为一个 2A 电流源。这样，重复几次电源变换，就可以得到如图 8-17c所示电路。（注意，由于此例中要求计算 8Ω 电阻两端的电压，因此 8Ω 电阻依然处于原位置，而没有参与电源变换。）

对图 8-17c 所示电路应用分流原理，可得

$$I = \frac{2}{2+8} \times 2 = 0.4(\mathrm{A})$$

$$V_o = 8I = 8 \times 0.4 = 3.2(\mathrm{V})$$

另外，由于图 8-17c 中的 8Ω 和 2Ω 电阻是并联的，其两端电压应该相同，因此

$$V_o = (8 \mathbin{/\!/} 2) \times 2 = \frac{8 \times 2}{10} \times 2 = 3.2(\mathrm{V})$$

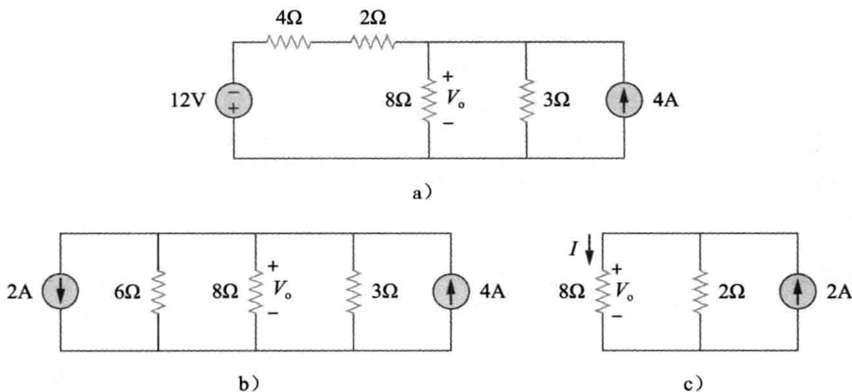


图 8-17 例 8-6 的电路原理图 ◀

练习 8-6 试利用电源变换的方法计算如图 8-18 所示电路中的 I_o。

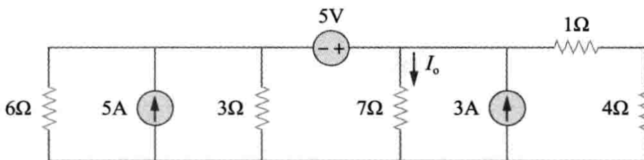


图 8-18 练习 8-6 的电路原理图

答案：1.78A

例 8-7 试利用电源变换的方法计算如图 8-19 所示电路中的电压 V_x。

解：首先将两个与电阻并联的电流源（既可以为独立源也可以是受控源）转换为与其等效的电压源，得到如图 8-20 所示的电路。对图 8-20 所示电路的网孔应用 KVL，可得

$$I(8+10+10) - 40 - 30 + 20V_x = 0$$

即

$$28I + 20V_x = 70$$

而且 $V_x = 8I$，可以得到

$$28I + 160I = 70 \quad 或 \quad I = 70/188 = 0.3723(\mathrm{A})$$

$$V_x = 8I = 2.978(\mathrm{V})$$

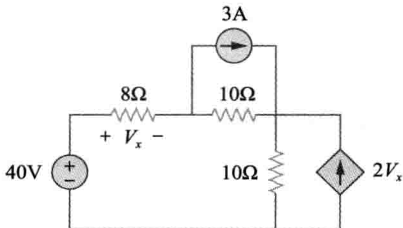


图 8-19 例 8-7 的电路原理图

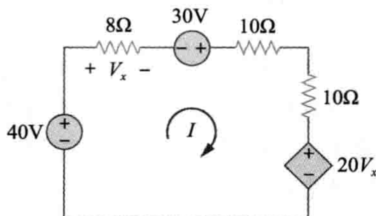


图 8-20 分析图 8-19 所示电路 ◀

练习 8-7 试利用电源变换计算如图 8-21 所示电路中的 I。

答案： 2A

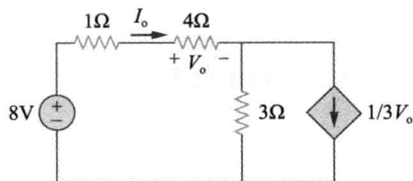


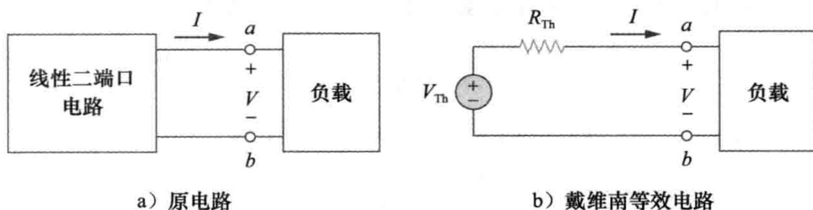
图 8-21 练习 8-7 的电路原理图

8.5 戴维南定理

实际电路中经常会出现这样的情况：电路中某个特定的元件（有时称为负载）是可变的，而电路中其他元件则是固定不变的。一个典型的例子就是家庭中的电源插座可以连接不同的家用电器，因此负载随着使用的电器不同而变化。而可变元件每改变一次，整个电路就要重新分析一遍。为了避免这个问题，戴维南定理提供了一种将电路中固定部分用等效电路来代替的方法。戴维南定理表明任何线性电路，不管电路本身多么复杂，都可能简化为一个只含有单一电压源和串联电阻的等效电路。

戴维南定理： 线性二端口电路可以用一个由电压源 V_{Th} 和与之串联的电阻 R_{Th} 组成的等效电路来代替，其中 V_{Th} 为端口的开路电压，R_{Th} 为独立源关闭或置零时端口的输入或等效电阻。

根据戴维南定理，图 8-22a 所示的线性电路可以用图 8-22b 所示的电路来取代。（图 8-22中的负载可以是单个电阻也可以另一个电路）图 8-22b 中端口 a-b 左侧的电路称为戴维南等效电路（Thevenin equivalent circuit）。[⊖]



a）原电路　　b）戴维南等效电路

图 8-22 用戴维南等效电路代替线性二端电路

现在关注的主要问题是如何计算出戴维南等效电压 V_{Th} 和电阻 R_{Th}。为此，假设图 8-22所示的两个电路等效。如果两个电路具有相同的端口电压/电流关系，则称这两个电路是等效的。因此需要找出图 8-22 所示两个电路等效的条件。如果使端口 a-b 开路（去掉负载），即无电流流过，那么由于两电路等效，从而图 8-22a 中 a-b 两端的开路电压必定等于图 8-22b 中的电压 V_{Th}，因此，如图 8-23a 所示，V_{Th} 就是端口的开路电压，即，

$$V_{Th} = V_{oc} \tag{8-6}$$

另外，在断开负载，使端口 a-b 开路的同时，将电路中所有的独立源置零。既然两个电路是等效的，那么图 8-22a 中 a-b 两端的输入电阻（或等效电阻）应该等于图 8-22b 中的电阻 R_{Th}。因此，如图 8-23b 所示，R_{Th} 就是当独立源置零时端口的输入电阻，即，

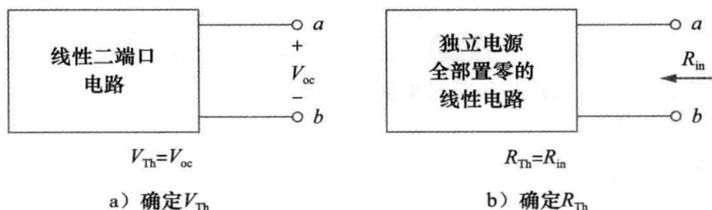
$$R_{Th} = R_{in} \tag{8-7}$$

由此可知，R_{Th} 就是从网络 a、b 两端看进去的输入电阻，如图 8-23b 所示。

利用上述思想计算戴维南等效电阻 R_{Th} 时，需考虑如下两种情况：

情况 1： 当网络中不含有受控源的时，将所有独立源置零。此时 R_{Th} 就是从 a、b 两端向网络看进去的输入电阻，如图 8-23b 所示。

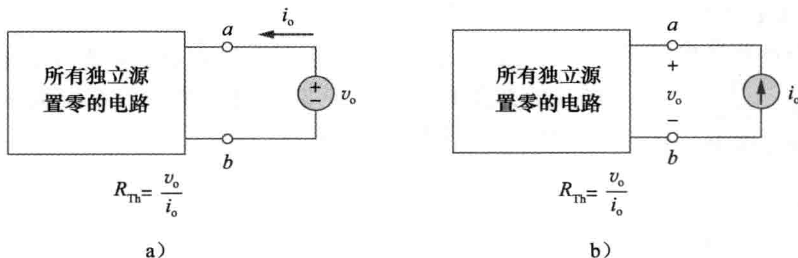
⊖ 此定理是由德国科学家赫尔曼·冯·亥姆霍兹（Hermann von Helmholtz）在 1853 年首次提出的，然而在 1883 年由戴维南再次提出。因此，此定理也被称为亥姆霍兹定理。



a）确定V_{Th}　　b）确定R_{Th}

图 8-23　确定 V_{Th}和 R_{Th}

情况 2：当网络中包含受控源时，关闭所有独立源。受控源由于受电路变量的控制，因而不能关闭。此时可以在 a、b 两端外加一个电压源 v_o，并计算出相应的电流 i_o，即可得到 $R_{Th}=v_o/i_o$，如图 8-24a 所示。或者，可以在 a、b 两端外加一个电流源 i_o，如图 8-24b所示，并计算出端口电压 v_o，同样可以得到 $R_{Th}=v_o/i_o$。两种方法得到的结果是相同的，任何一种方法都可以假设 v_o 与 i_o 取任意值，例如假定 $v_o=1V$ 或 $i_o=1A$，甚至可以对 v_o 与 i_o 取值不作任何假设。



a）　　b）

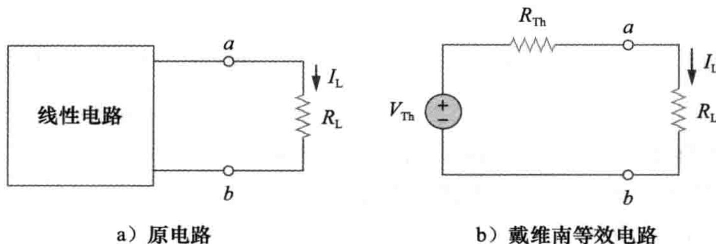
图 8-24　电路中含有受控源时，计算等效电阻 R_{Th}的方法

戴维南定理在电路分析中起着非常重要的作用。首先，利用该定理可以简化电路；其次该定理有利于简化电路设计，可以将大规模电路用一个独立电压源和一个串联电阻来代替，这种等效替换技术是电路设计中的一个强有力工具。

如前所述，带有可变负载的线性电路可以用戴维南等效电路代替除负载以外的其余电路。该等效电路的外部特性与原电路完全相同。例如图 8-25a 所示的线性电路，其终端接有负载 R_L，一旦得到该电路负载端的戴维南等效电路，如图 8-25b 所示，则流过负载的电流 I_L 和负载两端的电压 V_L 就可以很容易地确定。由图 8-25b，可得

$$I_L=\frac{V_{Th}}{R_{Th}+R_L} \tag{8-8a}$$

$$V_L=R_LI_L=\frac{R_L}{R_{Th}+R_L}V_{Th} \tag{8-8b}$$



a）原电路　　b）戴维南等效电路

图 8-25　带有负载的电路

从图 8-25b 可以看出，戴维南等效电路就是一个简单的分压器，通过观察就可以方便地得到负载电压 V_L。

应用戴维南定理应包括左下侧 4 个步骤。

1) 暂时断开电路中不需要用戴维南等效电路替代的部分，并标记出剩余部分的端口。
2) 将所有独立源均置零（电压源用短路代替，电流源用开路代替），无源网络端口处的等效电阻即是戴维南等效电阻 R_{Th}。
3) 端口处的开路电压（断开负载）即是戴维南等效电压 V_{Th}。
4) 将戴维南等效电压 V_{Th} 和等效电阻 R_{Th} 串联即可形成戴维南等效电路，注意 V_{Th} 的电压极性。将第 1 步断开的部分重新连接到电路中。

例 8-8 试计算图 8-26 所示电路端口 a-b 两端左侧电路的戴维南等效电路。

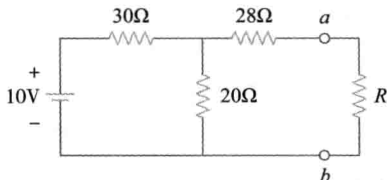


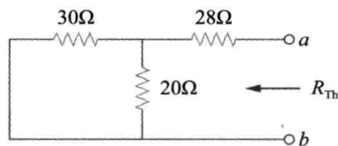
图 8-26 例 8-8 的电路原理图

解： 将负载电阻 R 断开，需要计算端口 a-b 处的 R_{Th} 和 V_{Th}。计算 R_{Th} 时，将电压源置零即用短路代替，从而得到如图 8-27a 所示电路。

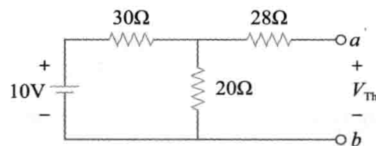
$$R_{Th} = 28 + 30 \mathbin{/\!/} 20 = 28 + \frac{30 \times 20}{30 + 20} = 28 + 12 = 40(\Omega)$$

计算 V_{Th} 时，在如图 8-27b 所示的电路中，求出端口 a-b 两端的开路电压。由于 28Ω 电阻两端没有电流流过，因此可以用分压原理得到 V_{Th}，

$$V_{Th} = \frac{20}{20 + 30} \times 10 = 4(\text{V})$$



a）计算 R_{Th}



b）计算 V_{Th}

图 8-27 例 8-8 的电路原理图

因此可以得到如图 8-28 所示的由戴维南等效电路和负载电阻 R 构成的电路。 ◀

练习 8-8 试计算图 8-29 所示电路端口 a-b 两端左侧电路的戴维南等效电路。

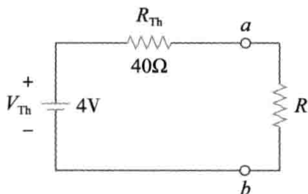


图 8-28 例 8-8 的戴维南等效电路

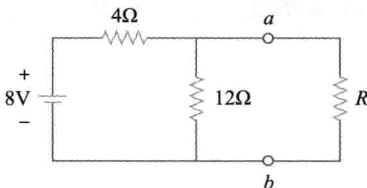


图 8-29 练习 8-8 的电路原理图

答案： $R_{Th}=3\Omega$；$V_{Th}=6\text{V}$

例 8-9 试计算图 8-30 所示电路中端口 a-b 两端左侧电路的戴维南等效电路。然后分别求出当 $R_L=6$、16 和 36Ω 时，流经 R_L 的电流。

解： 计算 R_{Th} 时，关闭 32V 电压源（将其短路）和 2A 电流源（将其开路），可以得到如图 8-31a 所示的电路，因此，

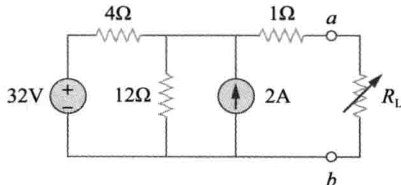


图 8-30 例 8-9 的电路原理图

$$R_{Th} = 4 \mathbin{/\!/} 12 + 1 = \frac{4 \times 12}{16} + 1 = 4(\Omega)$$

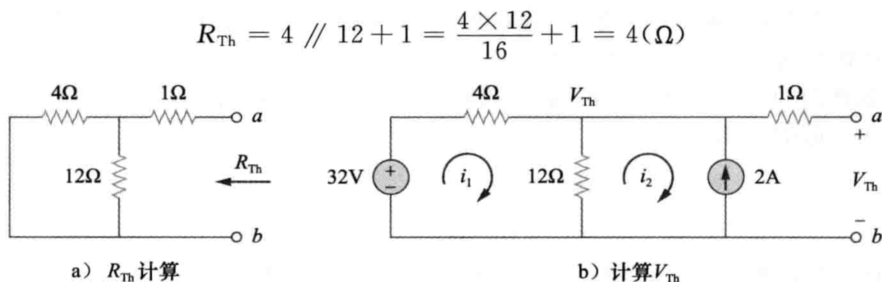


图 8-31 例 8-9 的电路原理图

在图 8-31b 所示的电路中计算 V_{Th}，对电路中的两个回路应用网孔分析法，得到

$$-32 + 4i_1 + 12(i_1 - i_2) = 0, \quad i_2 = -2\text{A}$$

求解 i_1，得到 $i_1 = 0.5$A，于是

$$V_{Th} = 12(i_1 - i_2) = 12 \times (0.5 + 2.0) = 30(\text{V})$$

另外，若采用节点分析法求解过程更加容易，由于没有电流流过 1Ω 电阻，因而可以忽略该电阻。对上方的节点应用 KCL 可以得到

$$\frac{32 - V_{Th}}{4} + 2 = \frac{V_{Th}}{12}$$

即

$$96 - 3V_{Th} + 24 = V_{Th} \quad \Rightarrow \quad V_{Th} = 30(\text{V})$$

与上述结果相同。还可以采用电源变换的方法求解 V_{Th}。

戴维南等效电路如图 8-32 所示，由此可以得到流经 R_L 的电流为

$$I_L = \frac{30}{4 + R_L}$$

当 $R_L = 6\Omega$ 时，

$$I_L = \frac{30}{4 + 6} = 3(\text{A})$$

当 $R_L = 16\Omega$ 时，

$$I_L = \frac{30}{4 + 16} = 1.5(\text{A})$$

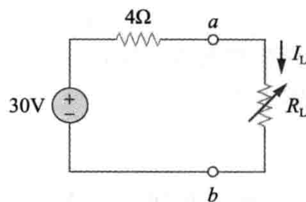


图 8-32 例 8-9 的戴维南等效电路

当 $R_L = 36\Omega$ 时，

$$I_L = \frac{30}{4 + 36} = 0.75(\text{A})$$

◀

练习 8-9 试利用戴维南定理求解图 8-33 所示电路中端口 a-b 左侧电路的等效电路，之后计算电流 I。 **答案**：$V_{Th} = 6$V；$R_{Th} = 3\Omega$；$I = 1.5$A

例 8-10 试求解图 8-34 所示电路中端口 a-b 两端的戴维南等效电路，并利用等效电路计算流经 30Ω 电阻的电流。

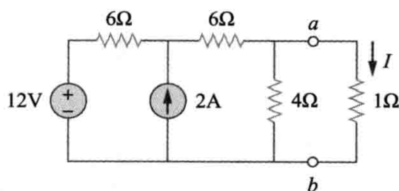


图 8-33 练习 8-9 的电路原理图

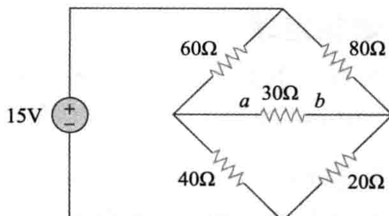


图 8-34 例 8-10 的电路原理图

解： 由于需要求解端口 a-b 两端的等效电路，因此断开 30Ω 电阻。计算 R_{Th}时，如图 8-35a 所示，关闭电压源即将其用短路代替。

可以观察到 40Ω 和 60Ω 电阻并联，同样 20Ω 和 80Ω 电阻并联，并联得到的两个电阻又是串联在一起的。因此，

$$R_{\text{Th}} = 40 \mathbin{/\!/} 60 + 20 \mathbin{/\!/} 80 = \frac{40 \times 60}{100} + \frac{20 \times 80}{100}$$
$$= 24 + 16 = 40(\Omega)$$

计算 V_{Th}时，电路图如图 8-35b 所示，利用分压原理分别计算 V_1 和 V_2

$$V_1 = \frac{40}{40+60} \times 15 = 6(\text{V})$$

$$V_2 = \frac{20}{20+80} \times 15 = 3(\text{V})$$

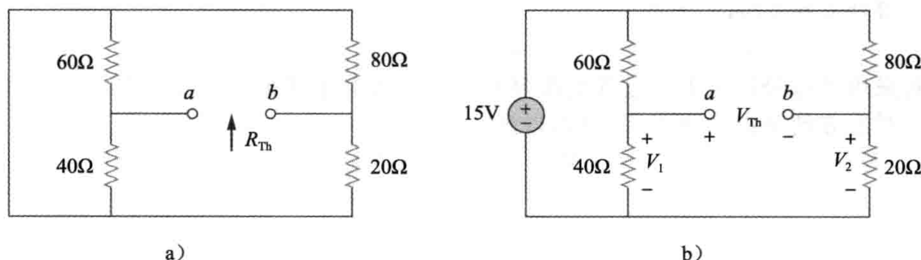


图 8-35 例 8-10 的电路原理图

对回路 $aboa$ 应用 KVL 得到

$$-V_1 + V_{\text{Th}} + V_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{\text{Th}} = V_1 - V_2 = 6 - 3 = 3(\text{V})$$

只要得到 R_{Th}和 V_{Th}，就可以得到如图 8-36 所示的戴维南等效电路。那么，流经 30Ω 电阻的电流为

$$\frac{V_{\text{Th}}}{R_{\text{Th}} + 30} = \frac{3}{40+30} = 42.86(\text{mA})$$ ◀

练习 8-10 试计算图 8-37 所示电路中端口 a-b 左侧电路的戴维南等效电路。并利用等效电路求解电流 I_x。 **答案：** $V_{\text{Th}}=12\text{V}$；$R_{\text{Th}}=40\Omega$；$I_x=0.2\text{A}$

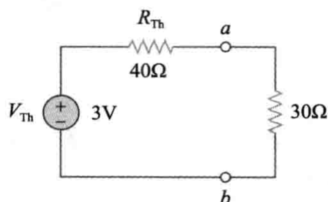


图 8-36 图 8-34 所示电路的戴维南等效电路

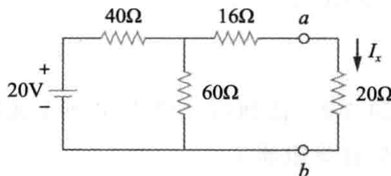


图 8-37 练习 8-10 和例 8-19 的电路原理图

8.6 诺顿定理

1926 年，也就是戴维南公布他的定理 43 年后，贝尔电话实验室的美国工程师诺顿（E. L. Norton）也提出了一个类似戴维南定理的诺顿定理。

诺顿定理： 线性二端电路可以用由电流源 I_{N} 和与之并联的电阻 R_{N} 构成的等效电路来代替，其中 I_{N} 为流经端口处的短路电流，R_{N} 为独立源关闭时，端口处的输入电阻或等效电阻。

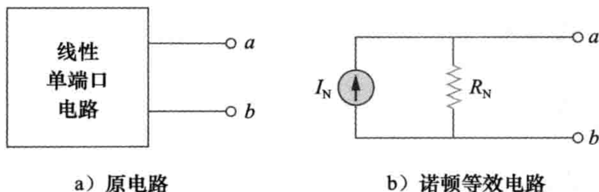
因此，图 8-38a 所示电路可以用图 8-38b 所示的等效电路来代替。

现在重点讨论如何确定 R_N 与 I_N。R_N 的计算方法与上一节中 R_{Th}的计算方法相同。事实上，由电源变换的关系可知，戴维南等效电阻与诺顿等效电阻是相等的，即，

$$\boxed{R_N = R_{Th}} \tag{8-9}$$

计算诺顿等效电流 I_N 就是要求出图 8-38 所示两个电路中从端点 a 流向 b 的短路电流。显然地，图 8-38b 中的短路电流就是 I_N，该电流必然与图 8-38a 所示电路中从端点 a 流向 b 的短路电流相同，因为这个两个电路是等效的。所以，如图 8-39 所示，可以得到，

$$I_N = I_{sc} \tag{8-10}$$



a）原电路　　b）诺顿等效电路

图 8-38 电路及其诺顿等效电路

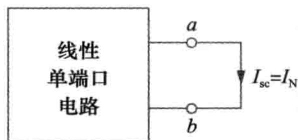


图 8-39 计算诺顿等效电流 I_N

可以看出诺顿定理与戴维南定理的基本关系为：$R_N = R_{Th}$，即式（8-9）以及

$$\boxed{I_N = \frac{V_{Th}}{R_{Th}}} \tag{8-11}$$

很显然，这就是电源变换的基本公式。正因为如此，电源变换通常也称为戴维南-诺顿转换。

应用诺顿定理包括左下侧 4 个步骤。



1）暂时断开电路中不需要用诺顿等效电路替换的部分，并标记出剩余部分的端口 a-b。
2）将所有独立源均置零（电压源用短路代替，电流源用开路代替），无源网络端口 a-b 处的等效电阻即是诺顿等效电阻 R_N。
3）流经端口 a-b 的短路电流即是诺顿等效电流 I_N。
4）将诺顿等效电流 I_N 和等效电阻 R_N 并联即可构成诺顿等效电路，注意诺顿等效电流的方向。将第 1 步断开的部分重新连接到电路中。



由于式（8-11）将 V_{Th}、I_N 与 R_{Th}三者关联在一起，所以要确定戴维南等效电路或诺顿等效电路时，就需要计算出：

- 端口 a-b 两端的开路电压 V_{oc}。
- 流过端口 a-b 两端的短路电流 I_{sc}。
- 将所有独立源关闭时，端口 a-b 两端的等效电阻或输入电阻 R_{in}。

只需利用最简便的方法计算出上述三个参数中的任意两个，就可以根据欧姆定律求得第三个参数。例 8-11 举例说明了这个问题。另外，因为

$$V_{Th} = V_{oc} \tag{8-12a}$$

$$I_N = I_{sc} \tag{8-12b}$$

$$R_{Th} = \frac{V_{oc}}{I_{sc}} = R_N \tag{8-12c}$$

所以，通过开路测试和短路测试就足以求出戴维南等效电路或者诺顿等效电路。

例 8-11 试计算如图 8-40 所示电路的诺顿等效电路。

解： 采用与计算戴维南等效电路中电阻 R_{Th}一样的方法就可以得到 R_N。将所有独立源置零，从而得到如图 8-41a 所示的电路，由该电路可以求出 R_N，即

$$R_N = 5 \,/\!/\, (8+4+8) = 5 \,/\!/\, 20 = \frac{5 \times 20}{25} = 4(\Omega)$$

计算 I_N 时，将端口 a、b 两端短路，得到如图 8-41b所示的电路。由于5Ω 电阻被短路，因而将其忽略，利用网孔分析法，可以得到

$$i_1 = 2\text{A}, \quad 20i_2 - 4i_1 - 12 = 0$$

由上述方程可以得到

$$i_2 = 1\text{A} = I_{sc} = I_N$$

另外，也可以由 V_{Th}/R_{Th} 求出 I_N，其中 V_{Th} 为图 8-41c 所示电路中端口 a-b 两端的开路电压。利用网孔分析法，可得

图 8-40 例 8-11 的电路原理图

$$i_3 = 2\text{A}$$

$$25i_4 - 4i_3 - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad i_4 = 0.8\text{A}$$

而且

$$V_{oc} = V_{Th} = 5i_4 = 4\text{V}$$

因此，

$$I_N = \frac{V_{Th}}{R_{Th}} = \frac{4}{4} = 1(\text{A})$$

结果与前面一样，这同时也验证了式（8-12c)，即

$$R_{Th} = \frac{V_{oc}}{I_{sc}} = \frac{4}{1} = 4(\Omega)$$

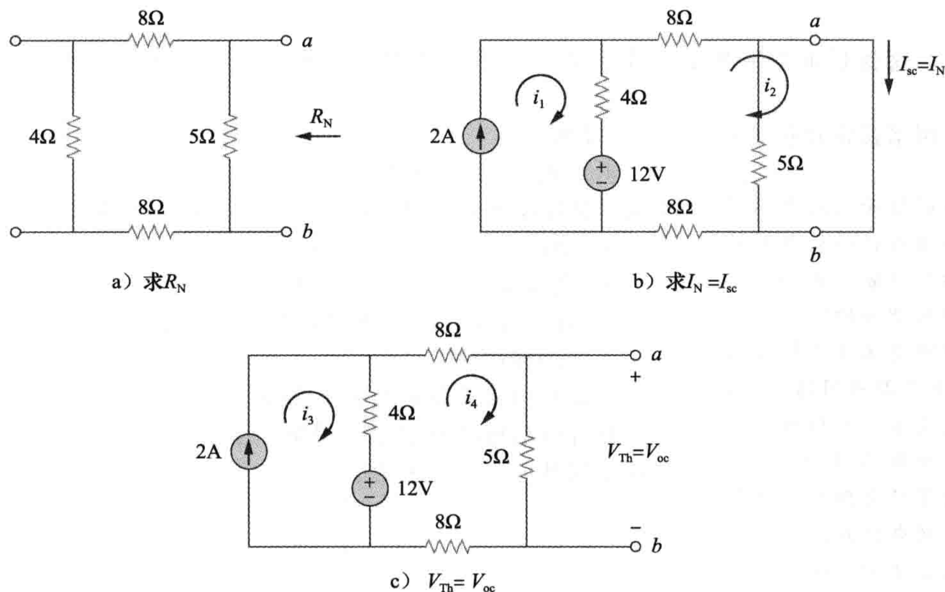


图 8-41 例 8-11 的电路原理图

所以，诺顿等效电路如图 8-42 所示。◀

练习 8-11 试计算如图 8-43 所示电路的诺顿等效电路。 **答案**：$R_N=3\Omega$；$I_N=4.5\text{A}$

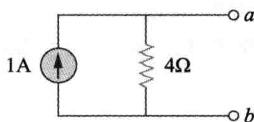


图 8-42 例 8-11 图 8-40 所示电路的诺顿等效电路

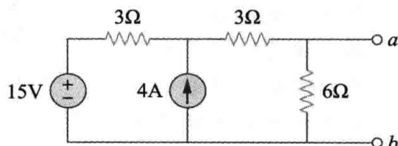


图 8-43 练习 8-11 的电路原理图

例 8-12 试计算图 8-44 所示电路中端口 a-b 左侧电路的诺顿等效电路，并利用等效电路计算流经负载电阻 $R_L=10\Omega$ 的电流。

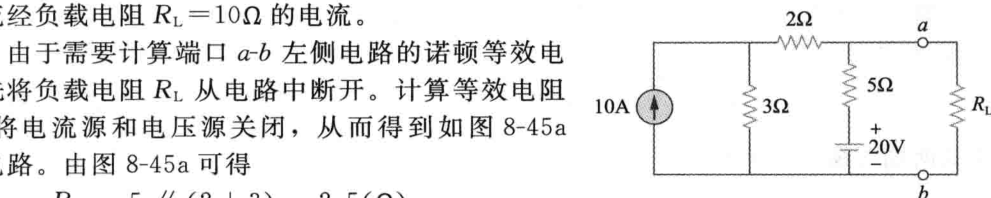


图 8-44　例 8-12 的电路原理图

解：由于需要计算端口 a-b 左侧电路的诺顿等效电路，首先将负载电阻 R_L 从电路中断开。计算等效电阻 R_N 时，将电流源和电压源关闭，从而得到如图 8-45a 所示的电路。由图 8-45a 可得

$$R_N = 5 /\!/ (2+3) = 2.5(\Omega)$$

计算短路电流 I_N 时，如图 8-45b 所示将 a、b 两端短路，然后可以通过几种不同的方法求解 I_N。此处，利用叠加定理的方法，令

$$I_N = I_1 + I_2$$

其中 I_1 和 I_2 分别对应于电压源和电流源单独作用时的电流。参见图 8-45c，其中电流源已经被关闭。由于串联的 2Ω 和 3Ω 电阻被短路，从而有

$$I_1 = \frac{20}{5} = 4(\text{A})$$

参见图 8-45d 可以得到电流 I_2。5Ω 电阻被短路，所以将其忽略，利用分流原理，可得

$$I_2 = \frac{3}{3+2} \times 10 = 6(\text{A})$$

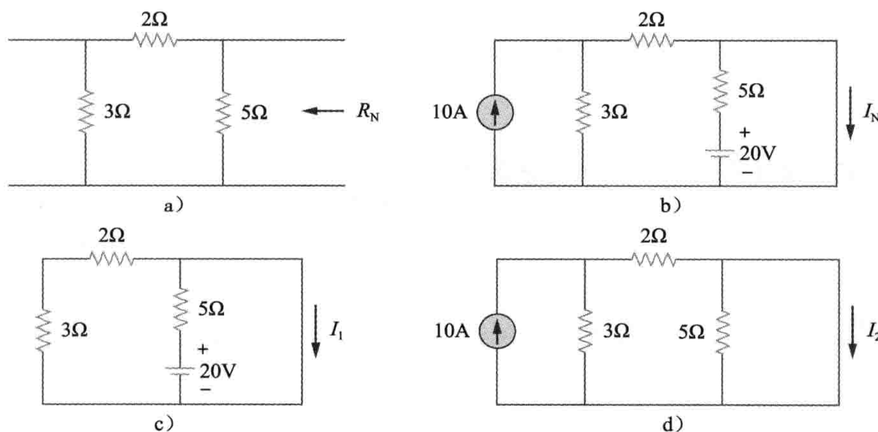


图 8-45　例 8-12 的电路原理图

因此

$$I_N = I_1 + I_2 = 4 + 6 = 10(\text{A})$$

如图 8-46 所示即为诺顿等效电路。利用分流原理可以求出流过负载电阻 $R_L=10\Omega$ 的电流，

$$I_L = \frac{2.5}{2.5+10} \times 10 = 2(\text{A})$$ ◀

练习 8-12　试计算图 8-47 所示电路中端口 a-b 左侧电路的诺顿等效电路，并利用等效电路计算流经 2Ω 负载电阻的电流。　**答案**：$R_N=0.8\Omega$；$I_N=5\text{A}$；1.429A

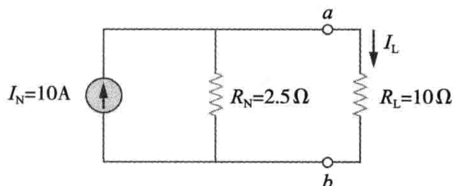


图 8-46　例 8-12 的电路原理图

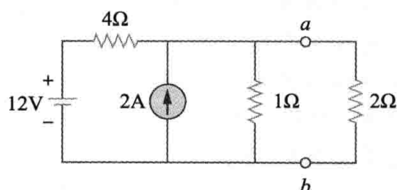


图 8-47　练习 8-12 的电路原理图

例 8-13 试计算图 8-48 所示电路端口 a-b 两端的戴维南和诺顿等效电路。

解： 由于 $V_{Th}=V_{ab}=V_x$，因此在节点 a 处应用 KCL 可得

$$\frac{30-V_{Th}}{12}=\frac{V_{Th}}{60}+2V_{Th}$$

上式两端同乘 60，可得，

$$150-5V_{Th}=V_{Th}+120V_{Th}$$

图 8-48 例 8-13 的电路原理图

也就是

$$126V_{Th}=150 \quad \Rightarrow \quad V_{Th}=150/126=1.19(\text{V})$$

求解 R_{Th}时参见图 8-49 所示电路，注意将独立源置零，但是左侧的受控源保持不变。并且，在 a、b 两端外加 1A 的电流源，对于节点 a 应用 KCL 得到，

$$1=2V_x+\frac{V_x}{60}+\frac{V_x}{12}$$

上式两端同乘 60，可得，

$$60=120V_x+V_x+5V_x$$

也就是

$$126V_x=60 \quad \Rightarrow \quad V_x=60/126=0.4762(\text{V})$$

$$R_{Th}=\frac{V_x}{1}=0.4762(\Omega), \quad I_N=\frac{V_{Th}}{R_{Th}}=1.19/0.4762=2.5(\text{A})$$

因此，

$$V_{Th}=1.19\text{V}, \quad R_{Th}=R_N=0.4762\Omega, \quad I_N=2.5\text{A}$$ ◀

练习 8-13 试计算图 8-50 所示电路端口 a-b 两端的戴维南和诺顿等效电路。

答案： $V_{Th}=3\text{V}$；$R_{Th}=R_N=3\Omega$；$I_N=1\text{A}$

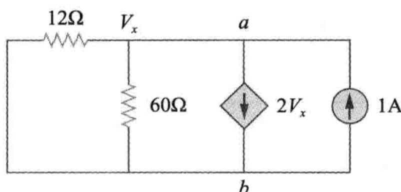


图 8-49 计算图 8-48 所示电路的 R_{Th}

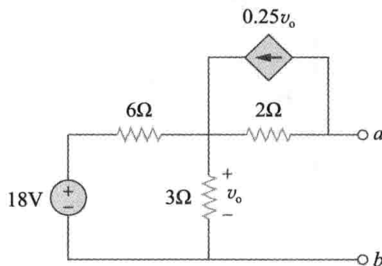


图 8-50 练习 8-13 的电路原理图

8.7 最大功率传输定理

在电力系统中，如微波炉、音响系统、发电厂、太阳能电池和混合电力汽车等，使负载与电源匹配以便实现最大功率传输是非常重要的。在许多实际应用场合，所设计的电路用于为负载提供功率（例如马达、加热器、音频放大器）。电力公司就是其中一个典型的案例，它重点关注电力的产生、传输并将其分配给不同的用户。因而，考虑效率和经济因素，在传输和分配过程中减少功率损失是具有关键性意义的。

在计算线性电路传递给负载的最大功率时，戴维南等效电路是非常有用的。假定电路的负载 R_L 可调，如果除负载以外的整个电路用其戴维南等效电路取代，如图 8-51 所示，则传递给负载的功率为

$$p=I^2R=\left(\frac{V_{Th}}{R_{Th}+R_L}\right)^2R_L \tag{8-13}$$

对于给定电路，V_{Th} 和 R_{Th} 是固定的。改变负载电阻 R_L 时，传递给负载的功率变化曲线如图 8-52 所示。由图 8-52可以看出，当 R_L 很大或很小时，传递给负载的功率都很小，但当 R_L 取 0～∞之间的某个数值时，传递给负载的功率存在最大值。下面证明当 R_L 等于 R_{Th} 时[⊖]，功率的最大值出现，即，

$$\boxed{R_L = R_{Th}} \tag{8-14}$$

这即是最大功率传输定理。

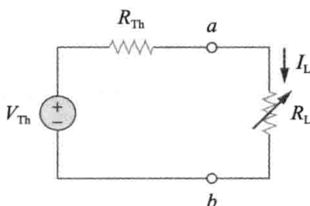


图 8-51 最大功率传输电路

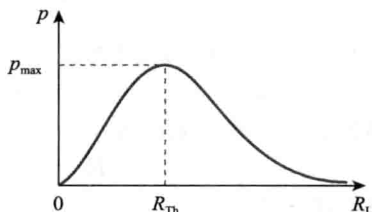


图 8-52 传递给负载的功率与电阻 R_L 之间的函数关系曲线

最大功率传输定理不是真正意义上的分析方法，而是一种辅助系统设计的方法。由于最大功率传输定理最早是由俄罗斯工程师和物理学家，莫瑞兹·冯·雅可比（Moritz von Jacobi，1801—1874）发现的，因此，也称为雅可比定律。

当负载电阻等于从负载端看进去的戴维南等效电阻（$R_L = R_{Th}$）时，传递给负载的功率最大。

将式（8-14）代入式（8-13），得到所传递的最大功率为

$$P_{max} = \frac{V_{Th}^2}{4R_{Th}} \tag{8-15}$$

仅当 $R_L = R_{Th}$ 时，式（8-15）成立。（R_L 取任何或大或小的值时，都会减少传递给负载的功率。）当 $R_L \neq R_{Th}$ 时，需利用式（8-13）计算传递给负载的功率。

功率传输效率 η 为

$$\eta = \frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{I^2 R_L}{I^2 R_L + I^2 R_{Th}} = \frac{R_L}{R_L + R_{Th}} \tag{8-16}$$

值得注意的是，当实现最大功率传输时，即 $R_L = R_{Th}$ 时，传输效率只有 0.5 或 50%。当负载电阻 R_L 增大至无穷时，传输效率提高到 100%。

例 8-14 试计算图 8-53 所示电路中，实现最大功率传输时的负载电阻值 R_L，并计算相应的最大功率。

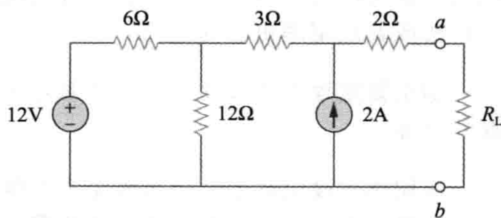


图 8-53 习题 14 的电路原理图

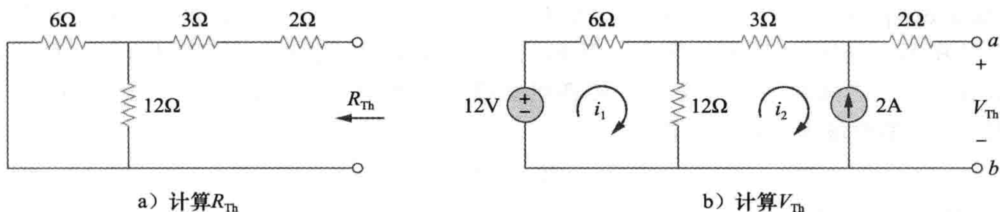
解： 需求出从端口 a-b 两端看进去的戴维南等效电阻 R_{Th} 以及端口 a-b 两端的戴维南电压 V_{Th}。为求出 R_{Th}，利用图 8-54a 所示电路可以得到

$$R_{Th} = 2 + 3 + 6 \mathbin{/\!/} 12 = 5 + \frac{6 \times 12}{18} = 9(\Omega)$$

为求出 V_{Th}，利用图 8-54b 所示的电路，由网孔分析法，可得

$$-12 + 18i_1 - 12i_2 = 0, \quad i_2 = -2\text{A}$$

⊖ 当 $R_L = R_{Th}$ 时，称电源与负载相匹配。



a）计算R_{Th}　　b）计算V_{Th}

图 8-54　例 8-14 的电路原理图

解之得 $i_1=-2/3\mathrm{A}$。对外回路应用 KVL 计算端口 a-b 的电压 V_{Th}，得到

$$-12+6i_1+3i_2+2(0)+V_{\mathrm{Th}}=0 \quad \Rightarrow \quad V_{\mathrm{Th}}=12+-6(-2/3)-3(-2)=22(\mathrm{V})$$

为实现最大功率传输，负载电阻应为

$$R_{\mathrm{L}}=R_{\mathrm{Th}}=9\Omega$$

此时，负载获得的最大功率为

$$P_{\max}=\frac{V_{\mathrm{Th}}^2}{4R_{\mathrm{L}}}=\frac{22^2}{4\times 9}=13.44(\mathrm{W})$$ ◀

练习 8-14　试计算图 8-55 所示电路实现最大功率传输时的负载电阻值 R_{L}，并计算相应的最大功率。

答案： 12Ω；33.33W

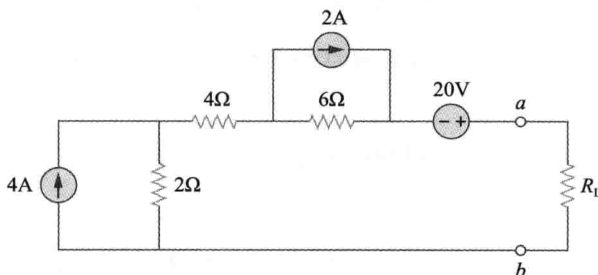


图 8-55　练习 8-14 的电路原理图

†8.8　弥尔曼定理

弥尔曼定理是以哥伦比亚大学电子工程系教授雅各布·弥尔曼（Jacob Milman，1911—1991）命名的。它是电源变换、戴维南定理和诺顿定理的组合，利用它可以将多个并联的电压源化简为只包含一个电源的等效电路。弥尔曼定理的优势在于比节点分析法、网孔分析法或叠加定理更容易应用。

弥尔曼定理是指任意数目的并联电压源（与电阻串联）可以用单一电压源（与电阻串联）代替。

应用弥尔曼定理的三个步骤见右下侧。

一般而言，可以按照下式计算步骤 2 中的等效电流

$$I_{\mathrm{eq}}=I_1+I_2+I_3+\cdots+I_n=\frac{V_1}{R_1}+\frac{V_2}{R_2}+\frac{V_3}{R_3}+\cdots+\frac{V_n}{R_n} \tag{8-17}$$

等效电阻则为

$$R_{\mathrm{eq}}=\frac{1}{\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_3}+\cdots+\dfrac{1}{R_n}} \tag{8-18}$$

需要注意的是，式（8-17）应依据电压源的极性计算代数和。

1）将所有电压源转换为电流源，如图 8-56 所示。
2）将所有并联电流源进行代数求和，并计算并联电阻的等效电阻。
3）将得到的电流源转换为电压源，就可获得期望的等效电路。

利用欧姆定律可得，

$$\boxed{V_{eq}=I_{eq}R_{eq}=\frac{\dfrac{V_1}{R_1}+\dfrac{V_2}{R_2}+\dfrac{V_3}{R_3}+\cdots+\dfrac{V_n}{R_n}}{\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_3}+\cdots+\dfrac{1}{R_n}}} \tag{8-19}$$

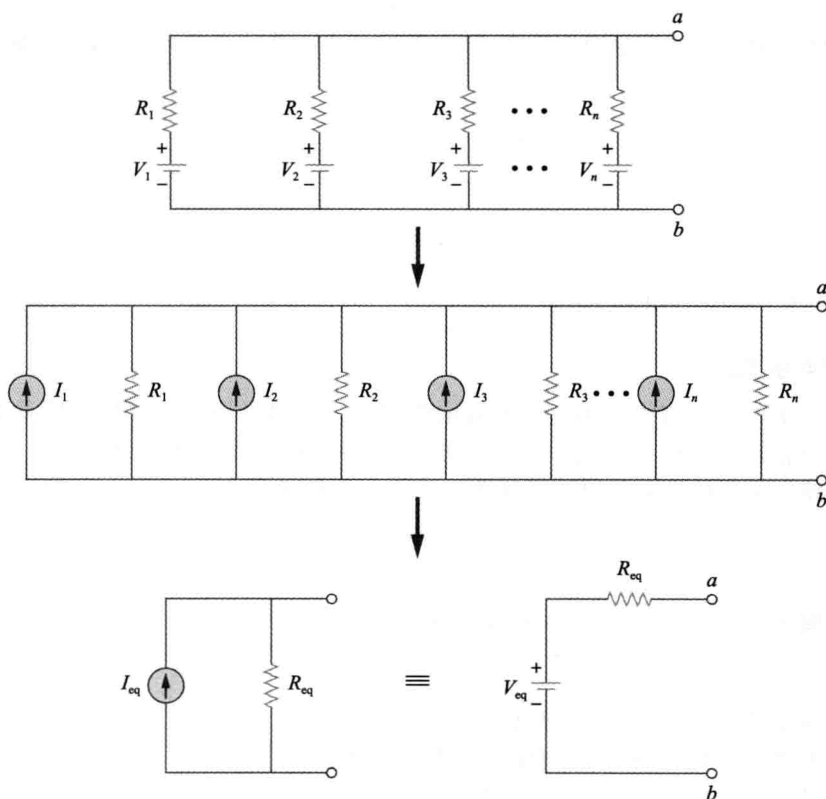


图 8-56　弥尔曼定理的证明

例 8-15 利用弥尔曼定理计算图 8-57 所示电路端口 a-b 左端的等效电路，并利用等效电路计算负载电流 I_L。

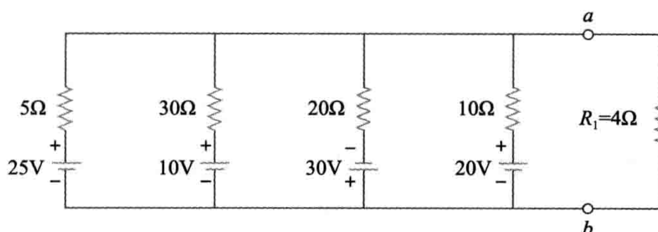


图 8-57　例 8-15 的电路原理图

解： 等效电阻为

$$R_{eq}=\frac{1}{\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{30}+\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{10}}=2.6087(\Omega)$$

等效电流为

$$I_{eq}=\frac{25}{5}+\frac{10}{30}-\frac{30}{20}+\frac{20}{10}=5.833(\text{A})$$

$$V_{eq}=I_{eq}R_{eq}=2.6087\times 5.833=15.216(\text{V})$$

等效电路如图 8-58 所示，利用等效电路，可得

$$I_L=\frac{V_{eq}}{R_{eq}+R_L}=\frac{15.216}{2.6087+4}=2.303(\text{A})$$ ◀

练习 8-15　利用弥尔曼定理化简图 8-59 所示电路，并计算负载电压。　**答案：** 6.67V

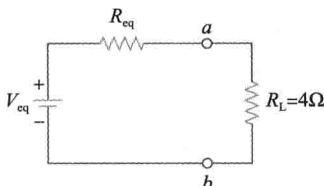


图 8-58　例 8-15 的电路原理图

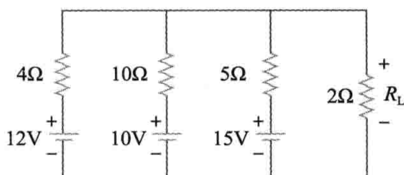


图 8-59　练习 8-15 的电路原理图

†8.9　置换定理

到目前为止，电阻网络可用它的等效电阻代替，电路可用它的等效电路代替，这种分析思路已经很普遍了，可以更进一步地将这种替代原则扩展成为置换定理。以图 8-60 所示电路的支路 a-b 来对置换定理进行说明，支路两端的电压 V 和流过支路的电流 I 为

$$V=\frac{2}{8+2}\times 20=4\text{V},\quad I=\frac{20}{8+2}=2(\text{A})\tag{8-20}$$

置换定理是指线性网络中任意支路都可以用两端电压相同和流过相同电流的电路元件的任意组合替换。

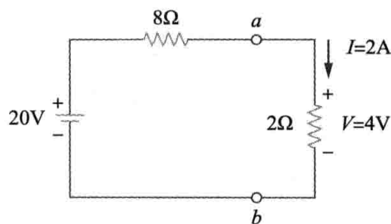


图 8-60　置换定理的说明

根据置换定理，2Ω 电阻可以用电路元件的任意组合来替换，只要替换支路的两端保持相同的电压和流经相同的电流即可，图 8-61 所示的每条支路都可以实现上述目的。

由于替换定理要求预先知道被选择支路两端的电压和流过的电流，因此该定理并不适用于求解电路分析问题，而是由通常电路设计者用来优化电路设计。

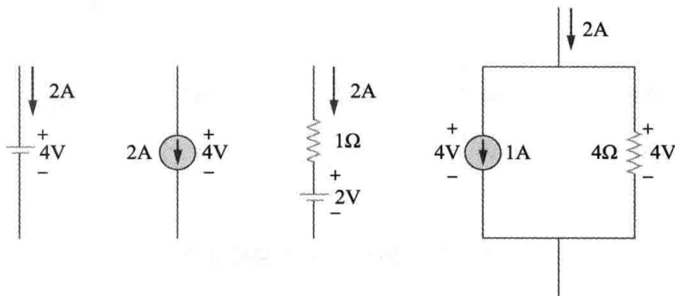


图 8-61　图 8-60 支路 a-b 的等效支路

例 8-16　电路如图 8-62a 所示，若支路 a-b 用图 8-62b 所示的电流源和 20Ω 电阻来替换，试计算电流源的幅度和方向。

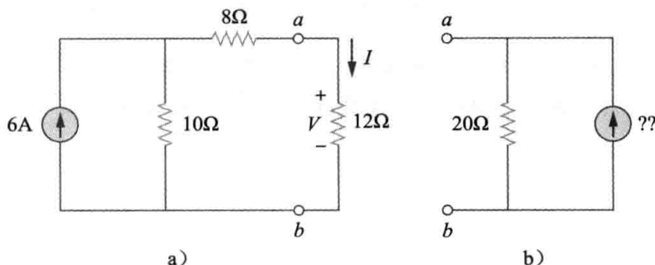


图 8-62　例 8-16 的电路原理图

解：利用分流原理计算支路 a-b 流过的电流，可得

$$I=\frac{10}{10+8+12}\times 6=2(\mathrm{A})$$

支路两端的电压为

$$V=12I=24(\mathrm{V})$$

图 8-62b 中的 20Ω 电阻两端必须有相同的电压，因此流过该电阻的电流为

$$I_{20}=\frac{24}{20}=1.2(\mathrm{A})$$

图 8-63 所示电路的节点 a 需要满足基尔霍夫电流定律，因而电流源的幅度必为 2－1.2＝0.8A，且方向向下，如图 8-63 所示。◀

练习 8-16　电路如图 8-64 所示，若支路 a-b 用电压源和 10Ω 电阻的串联来替换，试计算电压源的幅度和极性。　**答案**：6V，正极指向 a

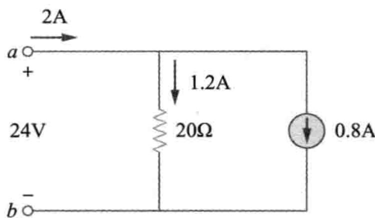


图 8-63　例 8-16 的电路原理图

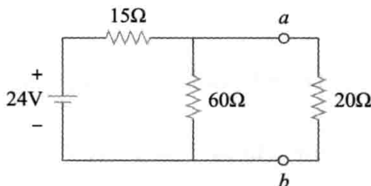


图 8-64　练习 8-16 的电路原理图

†8.10　互易定理

互易定理只适用于单电源电路，若电路含有多个电源，则不能应用互易定理。由于电源可以是电压源或电流源，因此该定理有两种情况。

■ 情况 1　电压源

互易定理是指在只含有一个电压源的线性电路中，若位于支路 A 的电压源在支路 B 产生电流 I，那么将电压源连接到支路 B 则会在支路 A 产生电流 I。

当电压源接至支路 B 时，它必须与支路 B 中的元件（如果有）串联，并将它的原有位置用短路替换，也就是在支路 A 中。另外，支路 B 中电压源的极性需使得支路 B 中电流的方向保持不变。尽管互易定理只适用于含有一个电压源或电流源的电路，但如图 8-65 所示的复杂电路显示了它的作用。

■ 情况 2　电流源

互易定理是指在只含有一个电流源的线性电路中，若位于支路 A 的电流源在支路 B

产生电压V，那么将电流源连接到支路B则会在支路A产生电压V。

情况2与情况1相同。当电流源连接到支路B时，应将它原来所在支路开路，且必须与支路B中的任一元件并联。支路B中电流源的方向需使得支路B中电压极性保持不变。

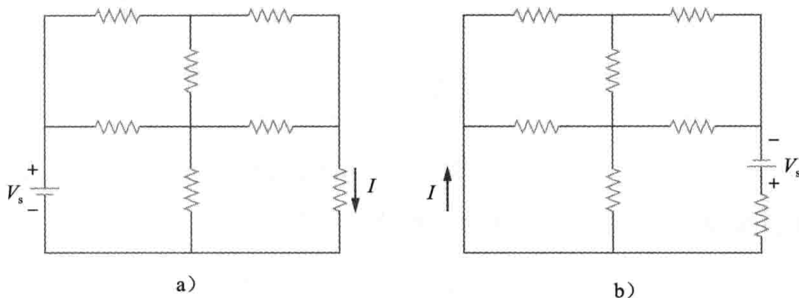


图 8-65 互易定理的说明

例 8-17 （a）计算图8-66a所示电路中的I。（b）将电压源移开，然后将其连接到包含1Ω电阻的支路上，如图8-66b所示，并重新计算电流I。

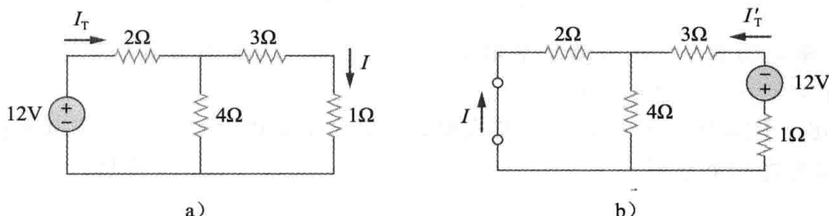


图 8-66 习题17的电路原理图

解：（a）从电压源两端看进去的总的等效电阻是

$$R_T = 2 + 4 \mathbin{/\!/} (3+1) = 2 + 2 = 4(\Omega)$$

则图8-66a所示电路中的I_T为$I_T=12/4=3A$。因此，可以得到期望的电流I

$$I = \frac{1}{2} I_T = 1.5(A)$$

（b）如图8-66b所示，将电压源用短路代替，并将其连接到1Ω电阻所在支路。注意到，电压源需与1Ω电阻串联，且其极性与图8-66a中I的方向一致。再次从电压源两端看进去，总的等效电阻为，

$$R'_T = 1 + 3 + 2 \mathbin{/\!/} 4 = 16/3(\Omega)$$

则电流I'_T为，

$$I'_T = \frac{-12}{16/3} = -9/4(A)$$

利用分流原理可得，

$$I = -\frac{4}{4+2} I'_T = -\frac{4}{6} \times \left(-\frac{9}{4}\right) = 1.5(A)$$

结果同之前的一样，这同时也验证了互易定理。◀

练习 8-17 （a）试计算图8-67所示电路的电流I。（b）将电压源连接到5Ω电阻所在支路，计算电压源原有位置处的I。

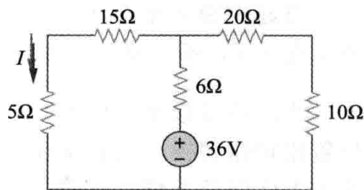


图 8-67 练习8-17的电路原理图

答案：（a）1.2A；（b）1.2A

例 8-18　(a) 计算图 8-68a 所示电路中的 V_o。(b) 将电流源移开，并将其与 1Ω 电阻并联。证明电流源原来所在支路两端的电压与 V_o 相同。

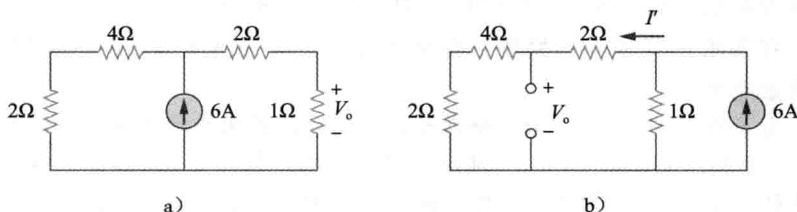


图 8-68　例 8-18 的电路原理图

解：(a) 利用分流原理计算流过 1Ω 电阻两端的电流，可得

$$I = \frac{2+4}{2+4+1+2} \times 6 = 4(\text{A})$$

因此

$$V_o = 1I = 4(\text{V})$$

(b) 然后将电流移除，并将其并联在 1Ω 电阻两端，如图 8-68b 所示。利用分流原理，可得

$$I' = \frac{1}{1+2+4+2} \times 6 = \frac{2}{3}(\text{A})$$

因此

$$V_o = I'(4+2) = \frac{2}{3} \times 6 = 4(\text{V})$$

练习 8-18　(a) 计算图 8-69 所示电路中的 V_x。(b) 将电流源移开，并将其与 3Ω 电阻并联。计算电流源原来所在支路两端的电压。　**答案：**(a) 15V；(b) 15V

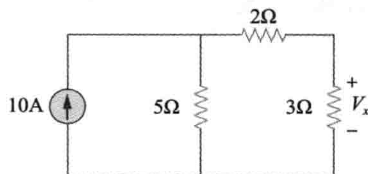


图 8-69　练习 8-18 的电路原理图

8.11　计算机软件验证电路定理

8.11.1　PSpice 软件

本小节学习如何利用 PSpice 软件验证本章介绍的电路定理。特别是利用该软件的直流扫描（DC Sweep）分析求解电路中任一对节点处的戴维南等效电路和诺顿等效电路及传递给负载的最大功率。建议读者先阅读 C.3 以为本节的学习做准备。

为了利用 PSpice 确定电路在某开路端口处的戴维南等效电路，首先利用该软件的电路原理图编辑器画出电路原理图，并在端口处连接一个用于探测的独立电流源 I_p。该探测电流源的部件名称必须为 ISRC。按照 C.3 的说明对 I_p 进行直流扫描。流过 I_p 的电流的典型变化范围通常在 0～1A 之间，增量步长为 0.1A。对电路执行仿真操作后，可利用 PSpice 的 A/D Demo 显示 I_p 两端的电压与流经 I_p 的电流之间的关系曲线。该曲线中零点的截距就是戴维南等效电压，而其斜率即为戴维南等效电阻。

确定诺顿等效电路的步骤也是类似的，不同点只是在端口处连接用于探测的独立电压源 V_p（部件名称为 VSRC），之后对 V_p 运行直流扫描程序，并设置 V_p 以增量步长 0.1V 在 0～1V 之间变化。仿真结束后，利用 PSpice A/D Demo 显示流经 V_p 的电流与 V_p 两端电压之间的关系曲线。该曲线中零点的截距即为诺顿等效电流，而其斜率则为诺顿等效电导。

利用 PSpice 确定传递给负载的最大功率时，需对图 8-51 所示电路中 R_L 的元件值执行直流参数扫描（DC parametric Sweep），并画出传递给负载的功率与 R_L 之间的关系曲线。

由图 8-52 可知，当 $R_L = R_{Th}$时，传递给负载的功率最大。例 8-19 将通过一个具体实例予以详细地说明。

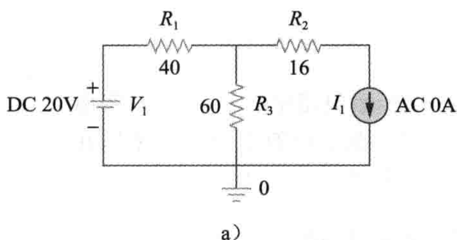
独立电压源和独立电流源的部件名称分别为 VSRC 和 ISRC。

例 8-19 在如图 8-37 所示电路中（参见练习 8-10），试利用 PSpice 确定其戴维南等效电路和诺顿等效电路。

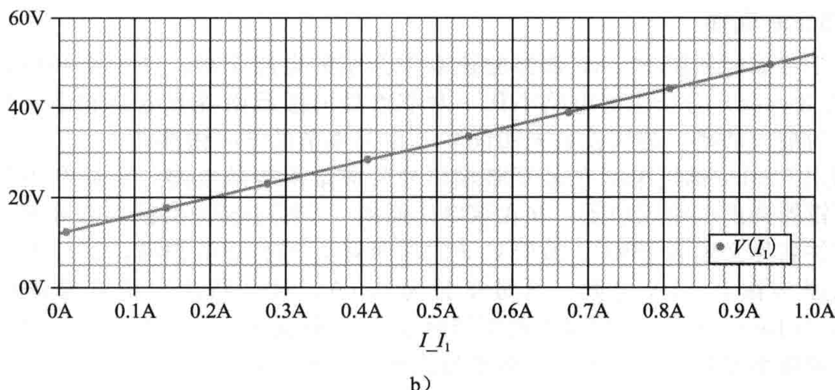
解：(a) 为了确定图 8-37 所示电路在端口 a-b 处的戴维南等效电阻 R_{Th} 和戴维南等效电压 V_{Th}。首先要利用 Orcad Capture 画出电路原理图，如图 8-70a 所示，注意，在该电路端口处已经连接一个用于探测的独立电流源 $I1$。选择 PSpcie/New Simulation Profile。在 New Simulation 对话框中，输入文件名称（例如 exam819）并单击 Create。在 Simulation Settings 对话框中，参照以下进行选择：分析类型（Analysis Type）选择直流扫描（DC Sweep），扫描变量（Sweep Variable）选择电流源（Current Source），扫描类型（Sweep Type）选择线性（Linear），并设置起始值（Start Value）为 0，终值（End Value）为 1，增量步长（Increment）为 0.1，名称（Name）编辑框输入 I1，单击应用（Apply），然后单击确定（OK）。运行仿真程序，即选择 PSpice/Run。弹出探测窗口。选择 Trace/Add Trace 画出轨迹曲线 V（I1：-），即可得到如图 8-70b 所示的电压与 $I1$ 之间的关系曲线。从该曲线可知：

$$V_{Th} = \text{零点截距} = 12(\text{V}), \quad R_{Th} = \text{斜率} = \frac{52-12}{1} = 40(\Omega)$$

该结果与练习 8-10 的理论分析一致。



a)



b)

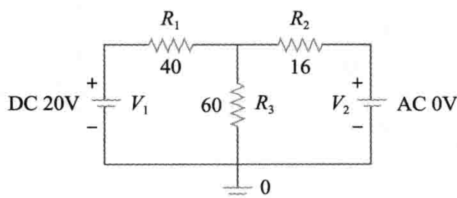
图 8-70 例 8-19 的电路原理图和仿真曲线图

(b) 为了确定诺顿等效电路，需利用探测电压源 V2 取代图 8-70a 所示电路示意图中的探测电流源，得到如图 8-71a 所示的电路示意图。同样，选择 PSpcie/New Simulation。在 New Simulation 对话框中，输入文件名称并单击 Create。在 Simulation Settings 对话框中，扫描类型（Sweep Type）选择线性（Linear），扫描变量类型（Sweep Var. Type）选择电压源（Voltage Source），名称（Name）编辑框输入 V2，起始值（Start Value）为 0，

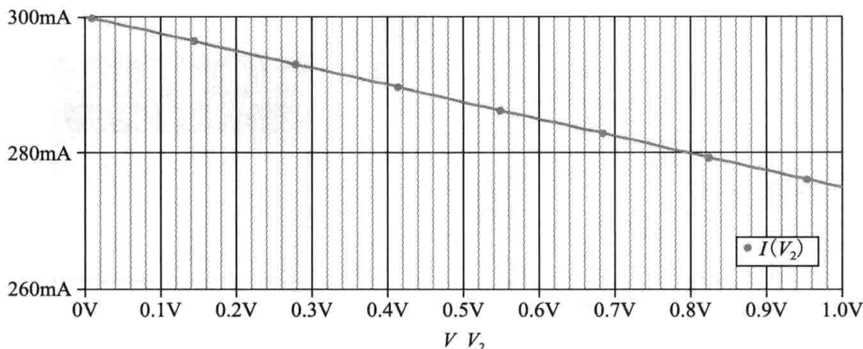
终值（End Value）为 1，增量步长（Increment）为 0.1。单击应用（Apply），然后单击确定（OK）。运行仿真程序，即选择 PSpice/Run，弹出 Probe 窗口。选择 Trace/Add Trace 画出轨迹曲线 I（V2），即可得到如图 8-71b 所示的关系曲线。从该曲线可知：

$$I_N = 零点截距 = 300(\text{mA})$$

$$G_N = 斜率 = \frac{(300-275)\times 10^{-3}}{1} = 25(\text{mS})$$



a）电路示意图



b）$I(V_2)$ 曲线图

图 8-71 例 8-19 的电路原理图

练习 8-19 试利用 PSpice 重新做练习 8-11。 **答案：** $R_N=3\Omega$；$I_N=4.5\text{A}$

8.11.2 Multisim 软件

Multisim 软件可以用来验证本章介绍的电路定理。将通过具体实例指出如何利用该软件确定电路的戴维南和诺顿等效电路。

例 8-20 利用 Multisim 软件确定如图 8-40 所示电路（参见例 8-11）的戴维南等效电路和诺顿等效电路。

解： 为了确定戴维南等效电阻，首先将电流源和电压源移除。在端口 a、b 两端连接万用表。双击（DCLICKL）万用表，选择欧姆档，得到如图 8-72 所示的 Multisim 电路。在保存电路文件后，通过选择仿真/运行（Simulate/Run）开始程序仿真，并双击万用表来显示结果。因此可得，

$$R_{Th} = R_N = 4\Omega$$

为了确定戴维南等效电压，首先要建立如图 8-73 所示的电路。在端子 a 和 b 之间连接万用表，双击万用表，设置电压档测量电压，并选择电压函数。在保存和运行仿真程序后，双击万用表来显示结果，因此，

$$V_{Th} = 4\text{V}$$

为了确定诺顿等效电路，在端子 a 和 b 间连接万用表，双击选择电流档，并设置电流函数。除万用表设置为电流档外，电路同图 8-73 所示的电路一样。经过保存和电路仿真

后，双击万用表来显示结果。

$$I_N = 1\text{A}$$

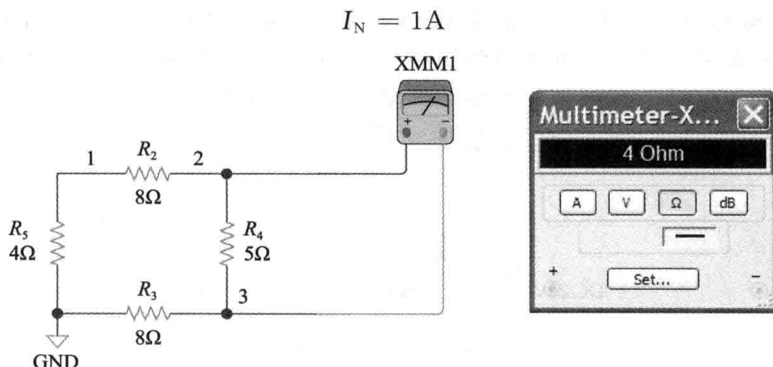


图 8-72 例 8-20 的电路图：确定戴维南等效电阻

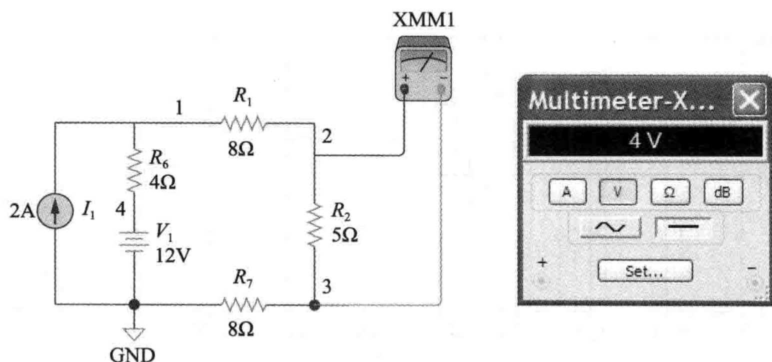


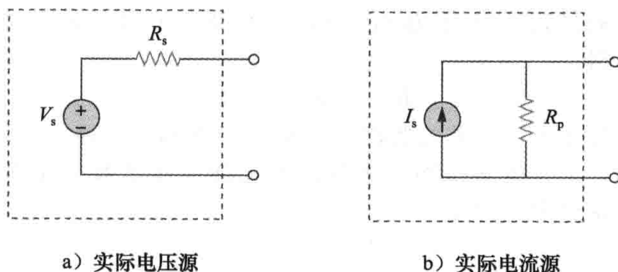
图 8-73 例 8-20 的电路图：确定戴维南等效电压

注意，诺顿等效电阻和诺顿等效电流的值与例 8-11 的计算结果一致。 ◀

练习 8-20 电路如图 8-43（参见练习 8-11）所示，试利用 Multisim 确定电路的戴维南等效电路和诺顿等效电路。 **答案：**$R_{Th}=R_N=3\Omega$；$V_{Th}=13.5\text{V}$；$I_N=4.5\text{A}$

†8.12 应用：电源建模

电源建模是说明戴维南等效电路或诺顿等效电路有用性的一个实例。诸如电池等有源电源经常用其戴维南等效电路或诺顿等效电路来描绘其特征。对于理想电压源，不管负载从它获取多大的电流，电压源总是提供恒定的电压，而对于理想电流源，不管负载电压为多大，电流源总是提供恒定的电流。如图 8-74 所示，实际电压源和电流源由于包含内部电阻（internal resistances）或源电阻（source resistances）R_s 和 R_p，因此它们均为非理想



a）实际电压源　　b）实际电流源

图 8-74 实际电压源和电流源

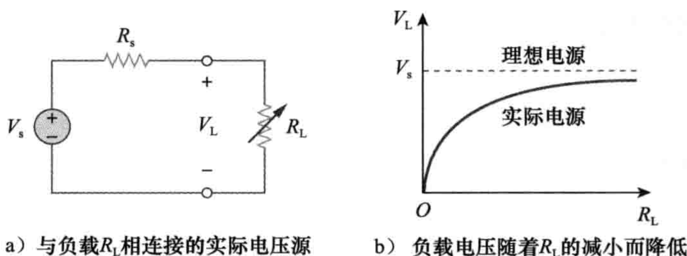
电源。当 $R_s \to 0$，$R_p \to \infty$ 时，实际电源就会变为理想电源。为了证明该论断的正确性，下面考虑负载对电压源的影响，如图 8-75a 所示，根据分压原理，负载电压为

$$V_L = \frac{R_L}{R_s + R_L} V_s \tag{8-21}$$

随着 R_L 的增大，负载电压趋向于电源电压 V_s，如图 8-75b 所示。由式（8-21）应该注意到：

1. 如果电源的内部电阻 R_s 为零，或至少 $R_s \ll R_L$，则负载电压将为常量，换言之，相对于 R_L，R_s 越小，电压源越接近理想状态。

2. 不连接负载（即电源开路，从而 $R_L \to \infty$）时，$V_{oc} = V_s$，因此，可以将 V_s 看作为空载电压。连接负载会造成终端电压幅度的下降，这种效应称为负载效应（loading effect）。



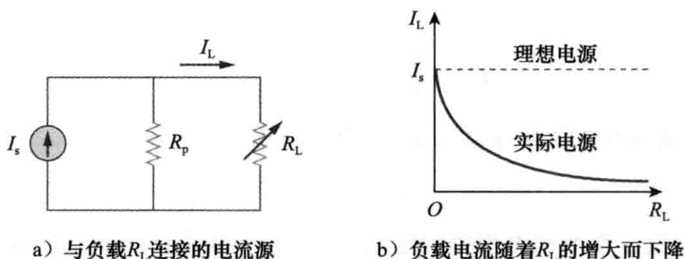
a）与负载R_L相连接的实际电压源　b）负载电压随着R_L的减小而降低

图 8-75　负载电压变化

对于实际电流源，当负载如图 8-76a 所示连接时，可以得到相同的结论。根据分流原理可得

$$I_L = \frac{R_p}{R_p + R_L} I_s \tag{8-22}$$

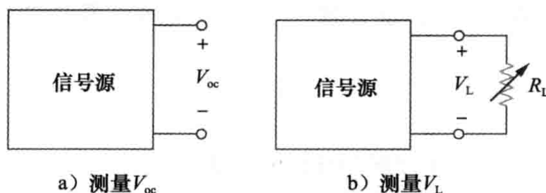
图 8-76b 给出了负载电流随负载电阻增加的变化曲线。同样可以观测到，由负载引起的电流下降（即负载效应），只有在内部电阻相当大（即 $R_p \to \infty$，或者至少 $R_p \gg R_L$）的情况下，负载电流才是常量（即理想电流源）。



a）与负载R_L连接的电流源　b）负载电流随着R_L的增大而下降

图 8-76　负载电流变化

有些时候需要知道电压源的空载电压 V_s 和内部电阻 R_s。可以利用图 8-77 所示的电路来计算 V_s 和 R_s。首先，测量如图 8-77a 所示的开路电压 V_{oc}，且令：



a）测量V_{oc}　b）测量V_L

图 8-77　开路电压

$$V_s = V_{oc} \tag{8-23}$$

然后，在端口处连接一个可变负载 R_L，如图 8-77b 所示，调整电阻 R_L 的值直到测得的负载电压恰好等于开路电压的一半为止，即 $V_L=V_{oc}/2$，因为此时满足 $R_L=R_{Th}=R_s$。此时，断开 R_L，并测量它的阻值，则有，

$$R_s = R_L \tag{8-24}$$

例如，汽车电池的电压为 $V_s=12\text{V}$，内阻为 $R_s=0.05\Omega$。

除电源建模之外，另一个说明本章内容的简单实例就是喇叭（负载）要与放大器的输出电阻相匹配。

例 8-21 某电压源连接一个 2W 负载时的端口电压为 12V。当端开负载时，端口电压升高至 12.4V。(a) 试计算该电压源的源电压 V_s 和内阻 R_s，(b) 当该电压源与一个 8Ω 负载连接时，试求解其电压。

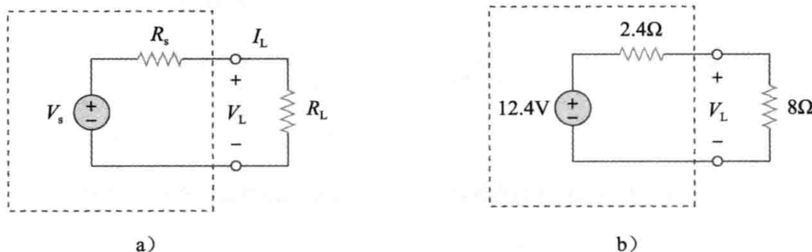


图 8-78 例 8-21 的电路原理图

解： (a) 将电压源用其戴维南等效电路代替。负载断开时的端口电压就是开路电压，即：

$$V_s = V_{oc} = 12.4(\text{V})$$

连接负载后，如图 8-78a 所示，$V_L=12\text{V}$ 且 $P_L=2\text{W}$，因此，

$$P_L = \frac{V_L^2}{R_L} \quad \Rightarrow \quad R_L = \frac{V_L^2}{P_L} = \frac{12^2}{2} = 72(\Omega)$$

负载电流则为

$$I_L = \frac{V_L}{R_L} = \frac{12}{72} = \frac{1}{6}(\text{A})$$

电压源内阻 R_s 两端的电压就是源电压 V_s 与负载电压 V_L 之差，即

$$12.4 - 12 = 0.4 = R_s I_L \quad \Rightarrow \quad R_s = \frac{0.4}{I_L} = 2.4(\Omega)$$

(b) 现已确定电压源的戴维南等效电路，将 8Ω 负载连接至该戴维南等效电路的两端，如图 8-78b 所示，利用分压原理可得，

$$V_L = \frac{R_L}{R_s + R_L} V_{Th} = \frac{8}{8+2.4} \times 12.4 = 9.538(\text{V})$$ ◀

练习 8-21 某放大器开路时测得的开路电压为 9V。当一个 20Ω 的扬声器与该放大器相连接时，其电压下降到 8V。试计算一个 10Ω 的扬声器与该放大器相连接时，其端电压为多少？

答案： 7.2V

8.13 本章小结

1) 线性网络由线性元件、线性受控源和线性独立源构成。
2) 网络定理可以将复杂电路化简为简单电路，从而使得电路分析更加简单。
3) 叠加定理是指在包含多个独立源的电路中，元件两端的电压（或流经元件的电流）等

于各独立源单独作用时产生的各个电压（或电流）的代数和。

4）电源变换是将与电阻串联的电压源转换为与电阻并联的电流源（反之亦然）的一种方法。

5）戴维南等定理或诺顿定理指出，将电路网络的一部分孤立，而将该网络中其余部分用一个等效电路来代替。戴维南等效电路由一个电压源 V_{Th} 和一个与之串联的电阻 R_{Th} 组成，而诺顿等效电路则由一个电流源 I_N 和一个与之并联的电阻 R_N 组成。可以用电源变换的方法说明这两个定理之间的关系。

$$R_N = R_{Th}, \quad I_N = \frac{V_{Th}}{R_{Th}}$$

6）对于给定的戴维南等效电路，当负载电阻等于戴维南等效电阻时，即 $R_L = R_{Th}$，传递给负载的功率最大。

7）弥尔曼定理提供了一种合并多个并联电压源的方法。

8）置换定理是指线性电路的任意支路可以用两端电压相同和流过电流相同的等效支路来代替。

9）互易定理是指仅含有一个电压源的线性电路，如果位于支路 A 的电压源在支路 B 产生电流 I，将电压源连接到支路 B 则会在支路 A 产生电流 I。

10）PSpice 和 Multisim 软件可以用来验证本章所介绍的电路定理。

11）电源建模是戴维南定理的一个应用实例。

复习题

1 当某线性网络中的输入电压源为 10V 时，流过网络中某条支路的电流为 2A。若输入电压降为 1V 且极性反转，则流过该支路的电流是：

(a) −2A (b) −0.2A
(c) 0.2A (d) 2A
(e) 20A

2 利用叠加定理计算电路参数时，并没有要求每次只考虑一个独立源的单独作用，可以考虑任意数目的独立源同时作用。

(a) 正确 (b) 错误

3 叠加定理可以用于计算功率。

(a) 正确 (b) 错误

4 如图 8-79 所示，端口 a-b 两端的戴维南等效电阻是：

(a) 25Ω (b) 20Ω
(c) 5Ω (d) 4Ω

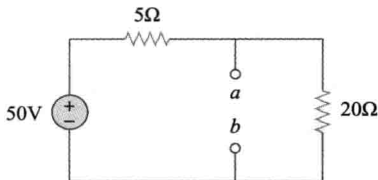


图 8-79 复习题 4、复习题 5 和复习题 6 的电路原理图

5 图 8-79 所示电路中 a-b 两端的戴维南等效电压是：

(a) 50V (b) 40V
(c) 20V (d) 10V

6 图 8-79 所示电路中 a-b 两端的诺顿等效电流是：

(a) 10A (b) 2.5A
(c) 2A (d) 0A

7 诺顿等效电阻 R_N 与戴维南等效电阻 R_{Th} 完全相等。

(a) 正确 (b) 错误

8 图 8-80 所示电路中哪一对是等效的？

(a) a 和 b (b) b 和 d
(c) a 与 c (d) c 和 d

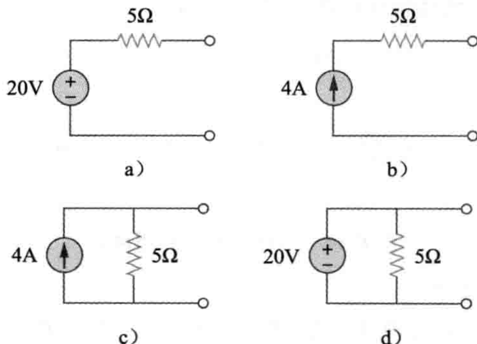


图 8-80 复习题 8 的电路原理图

9 一个负载连接在网络终端，若 $R_{Th}=10\Omega$，$V_{Th}=40V$，则负载上可获得的最大功率是

(a) 160W (b) 80W

(c) 40W (d) 1W

10 若电路包含有多个源，则互易定理不适用。

(a) 正确 (b) 错误

答案： 1 (b)，2 (a)，3 (b)，4 (d)，5 (b)，6 (a)，7 (a)，8 (c)，9 (c)，10 (a)

习题

8.2 节

1 试计算图 8-81 所示电路中的电流 I_o，若输入电压升高至 10V，则该电流是多少？

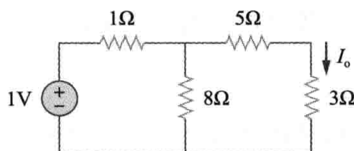


图 8-81 习题 1 的电路原理图

2 试计算图 8-82 所示电路中的 V_o，若电流源下降到 1μA，V_o 变为多少？

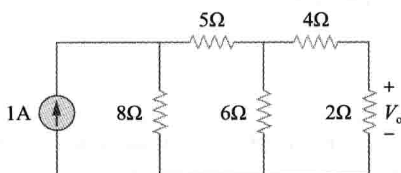


图 8-82 习题 2 的电路原理图

3 试利用线性特性计算图 8-83 所示电路中的 I_o。

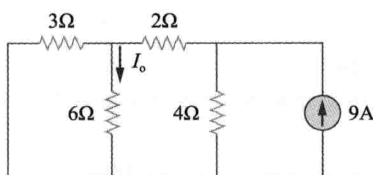


图 8-83 习题 3 的电路原理图

4 图 8-84 所示电路中，假设 $V_o=1V$，试利用线性特性计算 V_o 的实际值。

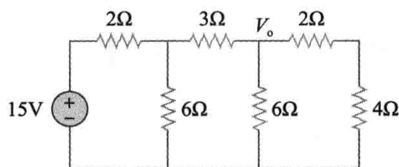


图 8-84 习题 4 的电路原理图

8.3 节

5 试利用叠加定理计算图 8-85 所示电路中的 I。

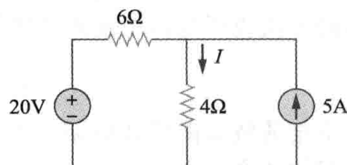


图 8-85 习题 5 的电路原理图

6 给定电路如图 8-86 所示，利用叠加定理计算 I_x 和 10Ω 电阻所消耗的功率。

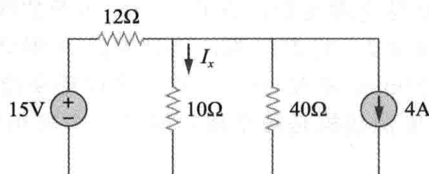


图 8-86 习题 6 的电路原理图

7 试利用叠加定理计算图 8-87 所示电路中的 I。

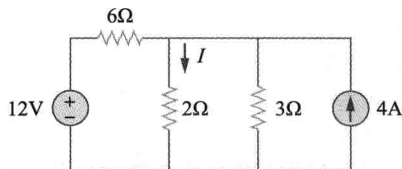


图 8-87 习题 7 的电路原理图

8 试利用叠加定理计算图 8-88 所示电路中的 V_o。

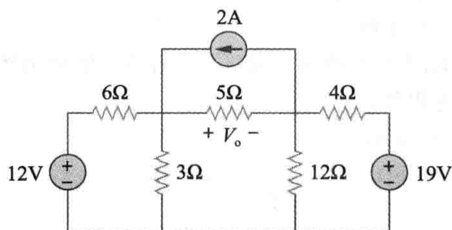


图 8-88 习题 8 的电路原理图

9 试利用叠加定理计算图 8-89 所示电路中的 I_o。

10 试利用叠加定理计算图 8-90 所示电路中的 V_o。

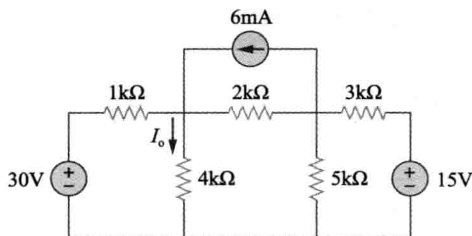


图 8-89 习题 9 的电路原理图

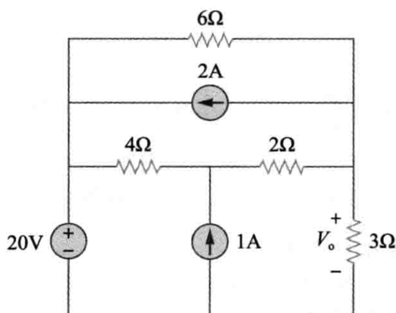


图 8-90 习题 10 的电路原理图

11 给定电路如图 8-91 所示，利用叠加定理计算电路中的 I，并计算 3Ω 电阻消耗的功率。

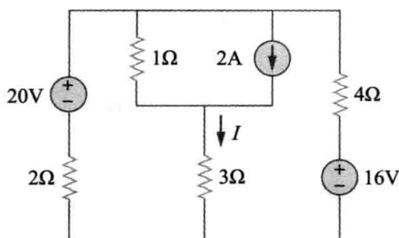


图 8-91 习题 11 的电路原理图

12 给定电路如图 8-92 所示，利用叠加定理计算 I_o。

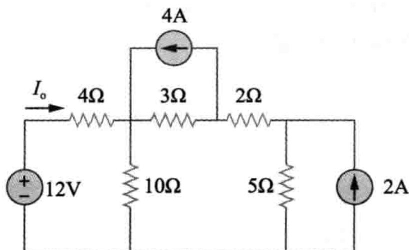


图 8-92 习题 12 的电路原理图

13 试利用叠加定理计算图 8-93 所示电路中的 V_o。

14 试利用叠加定理计算图 8-94 所示电路中的 V_o。

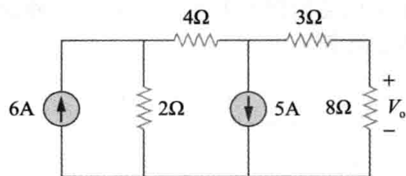


图 8-93 习题 13 的电路原理图

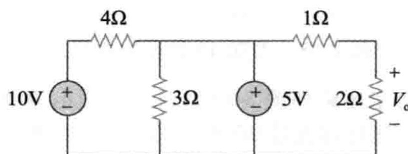


图 8-94 习题 14 的电路原理图

15 给定电路如图 8-95 所示，利用叠加定理计算电路中的 V_o。

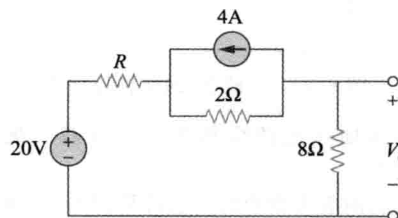


图 8-95 习题 15 的电路原理图

16 试利用叠加定理计算图 8-96 所示电路中的 V_o。

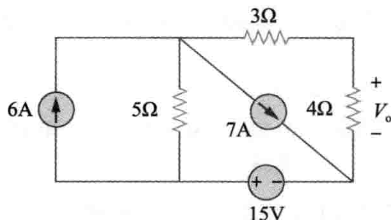


图 8-96 习题 16 的电路原理图

8.4 节

17 试利用电源变换的方法计算习题 7 中的 I。

18 试利用电源变换的方法计算图 8-97 所示电路中的 V_o 和 I_o。

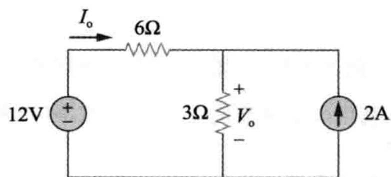


图 8-97 习题 18 的电路原理图

19 给定电路如图 8-98 所示，利用电源变换的方法计算 I。

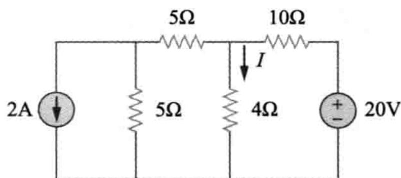


图 8-98 习题 19 的电路原理图

20 给定电路如图 8-99 所示，利用电源变换的方法计算流过 8Ω 电阻的电流和功率。

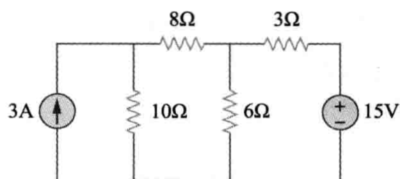


图 8-99 习题 20 的电路原理图

21 连续使用电源变换的方法计算习题 8 中的 V_o。

22 试利用电源变换的方法计算图 8-100 所示电路中的 V_x。

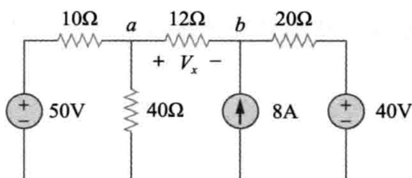


图 8-100 习题 22 和习题 31 的电路原理图

23 试利用电源变换的方法计算图 8-101 所示电路中的 v_o。

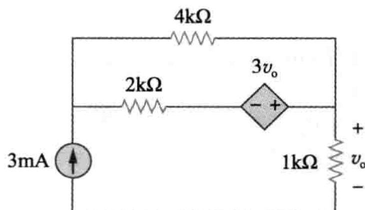


图 8-101 习题 23 的电路原理图

24 试利用电源变换的方法计算图 8-102 所示电路中的 i_x。

25 试利用电源变换的方法计算图 8-103 所示电路中的 i_x。

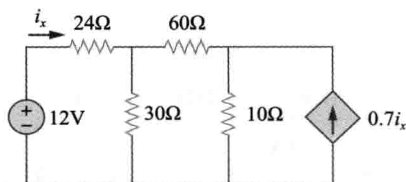


图 8-102 习题 24 的电路原理图

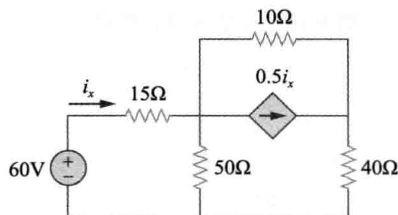
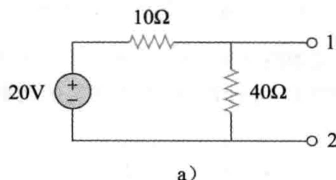


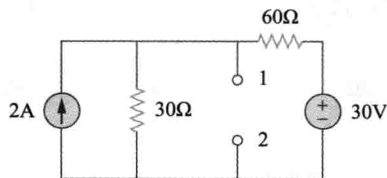
图 8-103 习题 25 的电路原理图

8.5 节和 8.6 节

26 计算图 8-104 所示两个电路中端口 1-2 两端的 R_{Th} 和 V_{Th}。



a)



b)

图 8-104 习题 26 的电路原理图

27 计算图 8-105 所示电路中端口 a-b 两端的戴维南等效电路。

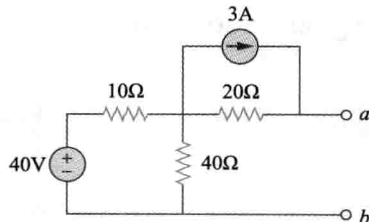


图 8-105 习题 27 和习题 36 的电路原理图

28 试利用戴维南定理计算习题 8 中的 V_o。

29 试利用戴维南定理求解图 8-106 所示电路中的 I。(提示：计算 12Ω 电阻两端的戴维南

等效电路）

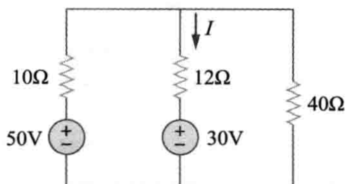


图 8-106 习题 29 的电路原理图

30 试利用戴维南定理求解图 8-107 所示电路中的 V_o。

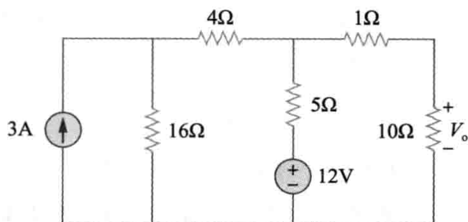


图 8-107 习题 30 的电路原理图

31 给定电路如图 8-100 所示，计算端口 *a*-*b* 两端的戴维南等效电路，并利用该等效电路求解 V_x。

32 试计算图 8-108 所示电路 *a*-*b* 两端的戴维南和诺顿等效电路。

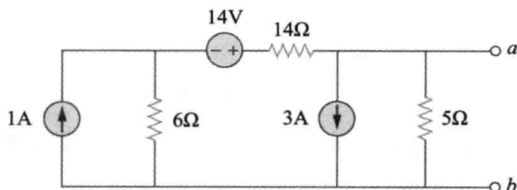


图 8-108 习题 32 的电路原理图

33 试计算图 8-109 所示电路从 *a*-*b* 两端看进去的戴维南等效电路。并求解 I_x。

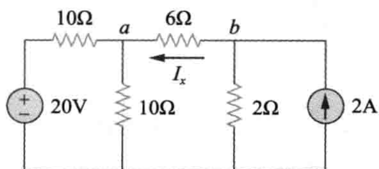


图 8-109 习题 33 的电路原理图

34 给定电路如图 8-110 所示，分别计算如下两端的戴维南等效电路：(a) *a*-*b* 和 (b) *b*-*c*

35 试计算图 8-111 所示电路的诺顿等效电路。

36 试计算图 8-105 所示电路从 *a*-*b* 两端看进去的诺顿等效电路。

37 试计算图 8-112 所示电路 *a*-*b* 两端左侧电路的诺顿等效电路，并利用该等效电路求解 I。

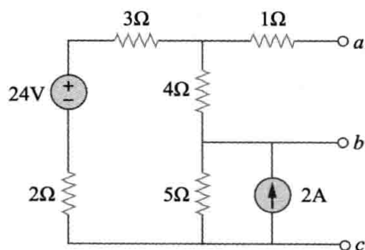


图 8-110 习题 34 的电路原理图

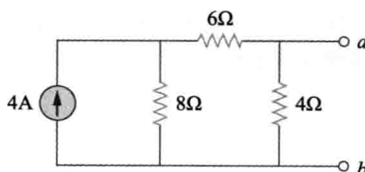


图 8-111 习题 35 和习题 74 的电路原理图

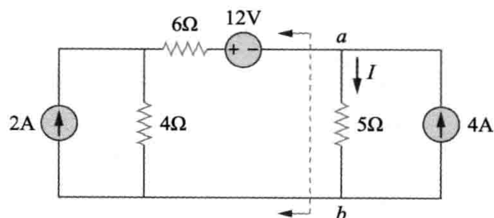


图 8-112 习题 37 的电路原理图

38 给定电路如图 8-113 所示，分别计算从如下两端看进去的诺顿等效电路：(a) *a*-*b* 和 (b) *c*-*d*

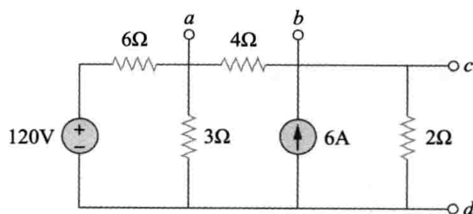


图 8-113 习题 38 的电路原理图

39 试计算图 8-114 所示电路 *a*-*b* 两端的戴维南和诺顿等效电路。

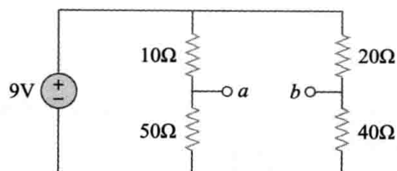


图 8-114 习题 39 的电路原理图

*40 试计算图 8-115 所示电路 a-b 两端的戴维南和诺顿等效电路。

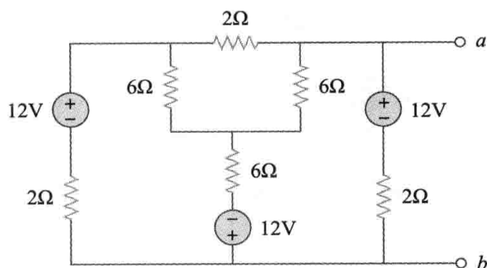
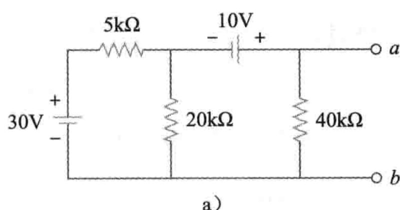
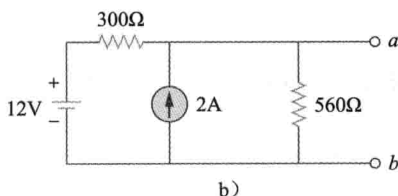


图 8-115 习题 40 的电路原理图

41 试计算图 8-116 所示电路 a-b 两端的戴维南和诺顿等效电路。



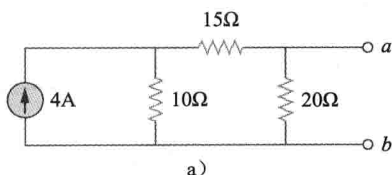
a）



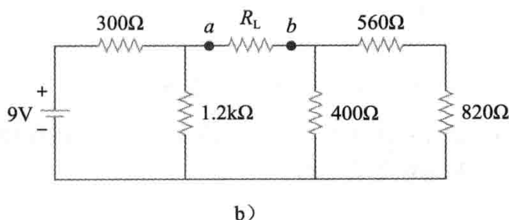
b）

图 8-116 习题 41 的电路原理图

42 试计算图 8-117 所示电路 a-b 两端的戴维南和诺顿等效电路。



a）



b）

图 8-117 习题 42 的电路原理图

43 试利用图 8-118 所示电路的戴维南等效电路计算 V_L 的取值范围。

44 试计算图 8-119 所示电路 a-b 两端的戴维南等效电路，并利用该等效电路求解 V_o。

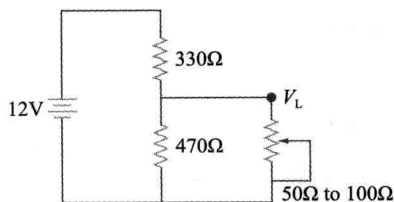


图 8-118 习题 43 的电路原理图

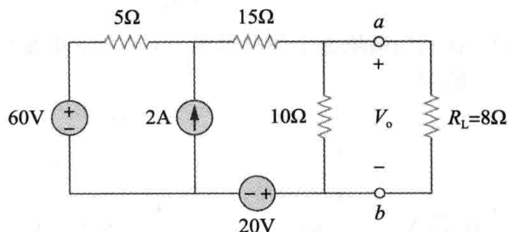


图 8-119 习题 44 的电路原理图

45 试计算图 8-120 所示电路 a-b 两端的戴维南和诺顿等效电路。

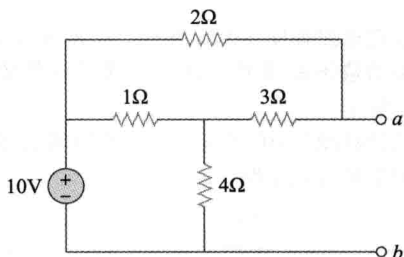


图 8-120 习题 45 的电路原理图

46 试计算图 8-121 所示电路 a-b 两端的诺顿等效电路。

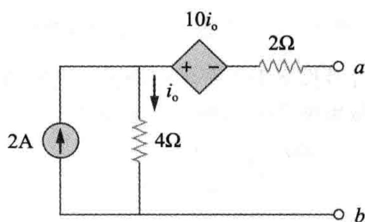


图 8-121 习题 46 的电路原理图

47 给定电路如图 8-122 所示，试计算 a-b 两端的戴维南等效电路。

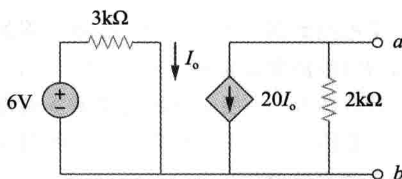


图 8-122 习题 47 的电路原理图

48　试计算图 8-123 所示电路 a-b 两端的戴维南等效电路。

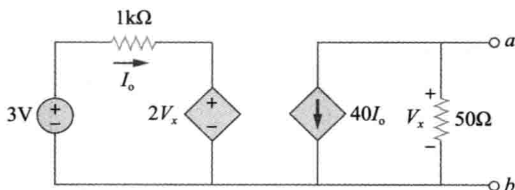


图 8-123　习题 48 的电路原理图

49　试计算图 8-124 所示电路 a-b 两端的戴维南和诺顿等效电路。

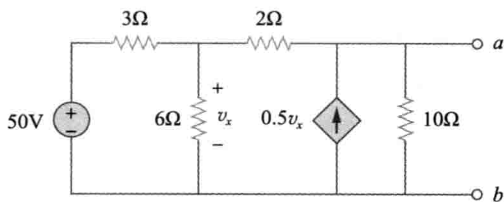


图 8-124　习题 49 的电路原理图

8.7 节

50　网络化简为 $V_{eq}=30\text{V}$ 且 $R_{eq}=2\text{k}\Omega$，试计算网络可以传递的最大功率。

51　试计算图 8-125 所示电路可以传递给电阻 R 的最大功率。

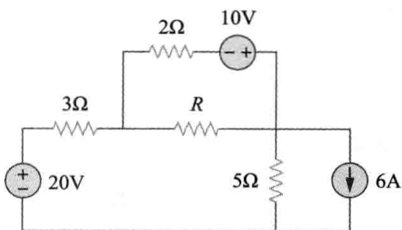


图 8-125　习题 51 的电路原理图

52　给定电路如图 8-126 所示，试计算电阻 R 获得最大功率时的阻值，并计算该最大功率。

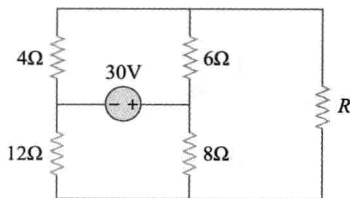


图 8-126　习题 52 的电路原理图

53　(a) 电路如图 8-127 所示，试计算 a-b 两端的戴维南等效电路。(b) 计算当 $R_L=8\Omega$ 时，流过该电阻的电流。(c) 计算满足最大功率传输要求的 R_L。(d) 求解该最大功率。

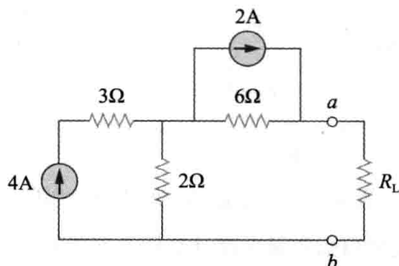


图 8-127　习题 53 的电路原理图

54　给定电桥电路如图 8-128 所示，试计算可变电阻 R_L 可以获得的最大功率。

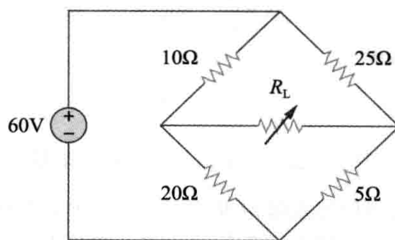


图 8-128　习题 54 的电路原理图

8.8 节

55　试利用弥尔曼定理计算图 8-129 所示电路中的 V_o。

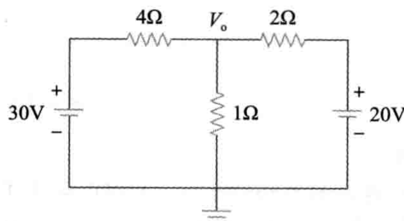


图 8-129　习题 55 的电路原理图

56　试利用弥尔曼定理计算图 8-130 所示电路中的 I_x。

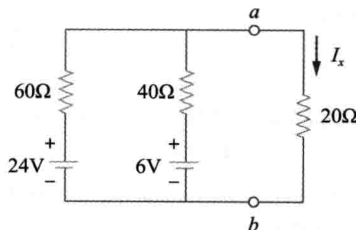


图 8-130　习题 56 的电路原理图

57　试利用弥尔曼定理计算图 8-131 所示电路中的 V_o。

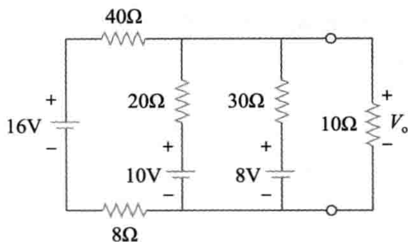


图 8-131 习题 57 的电路原理图

58 试利用弥尔曼定理计算图 8-132 所示电路中的 I_o。

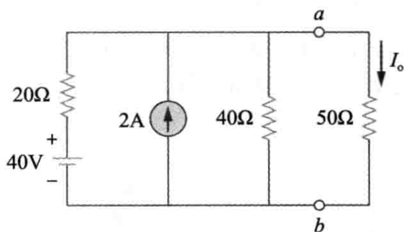


图 8-132 习题 58 的电路原理图

59 试利用弥尔曼定理将图 8-133 所示电路中的电压源和电流流化简为单一电压源，并计算当 $R_L=100$ 时的负载电流。

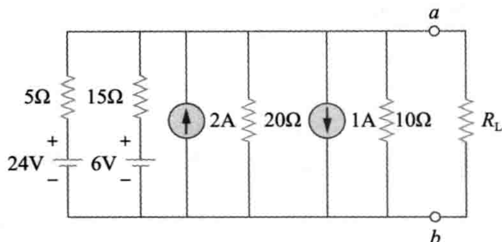


图 8-133 习题 59 的电路原理图

60 试利用弥尔曼定理求解图 8-134 所示电路中的 V 和 I。

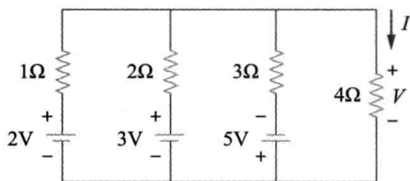


图 8-134 习题 60 的电路原理图

61 试利用弥尔曼定理计算图 8-135 所示电路中的 I_x。

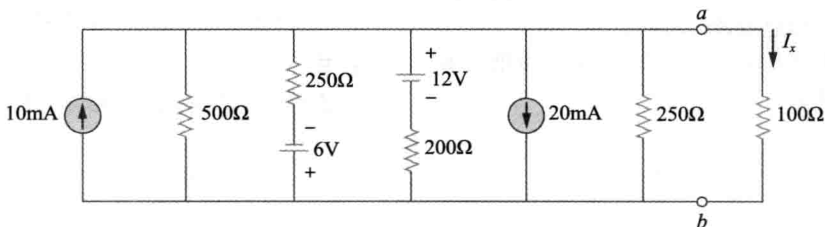


图 8-135 习题 61 的电路原理图

8.9 节

62 电路如图 8-136 所示，若将电路中的 10Ω 电阻用一个电压源和与之串联的 20Ω 电阻代替，试计算电压源的幅度值。

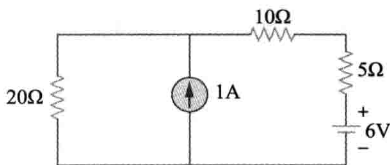


图 8-136 习题 62 和习题 63 的电路原理图

63 若将图 8-136 所示电路中的 10Ω 电阻用一个电流源和与之并联的 20Ω 电阻代替，试计算电流源的幅度值。

64 试利用置换定理给出图 8-137 所示电路 a-b 支路的两种等效支路。

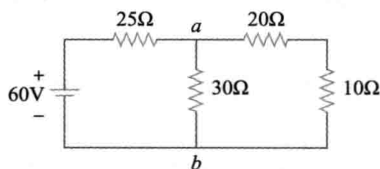


图 8-137 习题 64 的电路原理图

8.10 节

65 求解图 8-138 所示电路中的电流 I_x，并验证是否满足互易定理。

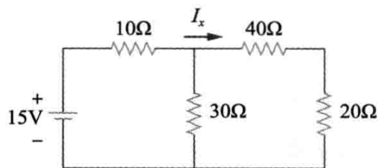


图 8-138 习题 65 的电路原理图

66 求解图 8-139 所示电路中的电压 V_o，并用该电路验证互易定理。

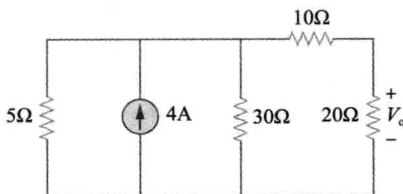
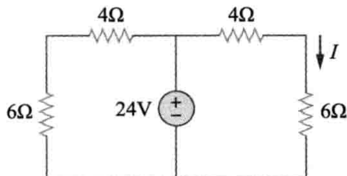


图 8-139 习题 66 的电路原理图

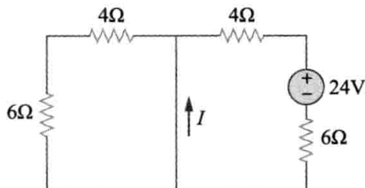
67 (a) 给定电路如图 8-140a 所示，试计算电流 I。

(b) 如图 8-140b 所示电路，重新计算问题 (a)。

(c) 是否满足互易定理?



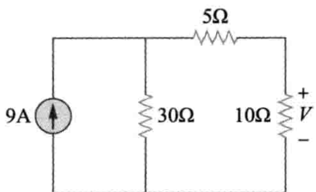
a)



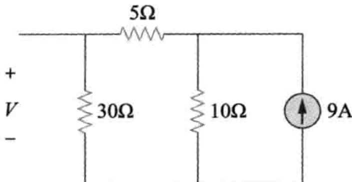
b)

图 8-140 习题 67 的电路原理图

68 (a) 试计算图 8-141a 所示电路中的 V。



a)



b)

图 8-141 习题 68 和习题 71 的电路原理图

(b) 试确定图 8-141b 所示电路中的 V。

(c) 互易定理是否满足?

8.11 节

69 试利用 PSpice 求解习题 39。

70 试利用 PSpice 求解习题 61。

71 试利用 PSpice 求解习题 68。

72 试利用 PSpice 计算图 8-142 所示电路的戴维南等效电路。

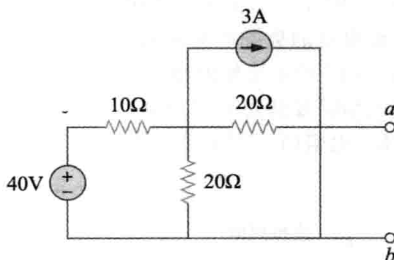


图 8-142 习题 72 和习题 75 的电路原理图

73 给定电路如图 8-143 所示，试利用 PSpice 计算 a-b 两端的戴维南等效电路。

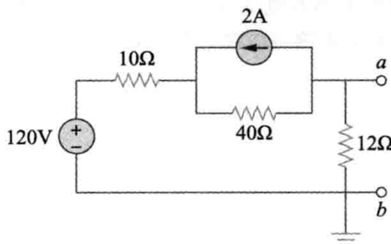


图 8-143 习题 73 和习题 76 的电路原理图

74 试利用 Multisim 求解图 8-111（习题8-35）所示电路的诺顿等效电路。

75 试利用 Multisim 求解图 8-142 所示电路的戴维南等效电路。

76 试利用 Multisim 重新求解习题 73。

77 试利用 Multisim 求解图 8-144 所示电路的 a-b 两端的戴维南和诺顿等效电路。

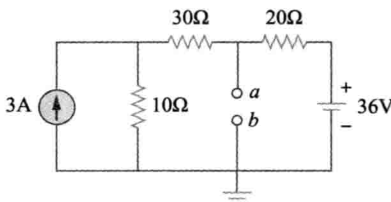


图 8-144 习题 77 的电路原理图

8.12 节

78 某电池的短路电路为 20A，开路电压为 12V。如果此电池与一个阻值为 2Ω 的灯泡

相连接，试计算灯泡消耗的功率。

79 在某个电阻网络的两个端点之间测得的数据如下，试求解该网络的戴维南等效电路。

端点电压	12V	0V
端点电流	0A	1.5A

80 某电池与一个 4Ω 电阻相连接时，两端电压为 10.8V，而开路时两端电压为 12V，试计算该电池的戴维南等效电路。

81 图 8-145 所示线性网络 a-b 两端的戴维南等效电路需要通过测量得到。当 a-b 两端连接 10kΩ 电阻时，测量得到的电压 V_{ab} 为 6V。当 a-b 两端连接 30kΩ 电阻时，测量得到的电压 V_{ab} 为 12V。试计算：(a) 端口 a-b 两端的戴维南等效电路；(b) 当端口 a-b 两端连接 20kΩ 电阻时，V_{ab} 的大小。

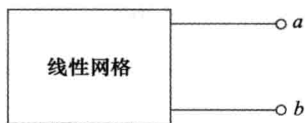


图 8-145 习题 81 的电路原理图

82 一个装有电路的黑盒子，与一个可变电阻相连接，如图 8-146 所示。用一个理想安培表（内部电阻为零）和一个理想电压表（内部电阻为无穷大）测量该黑盒子的电流和电压，测得的结果如下表所示：

R(Ω)	**V**(V)	**I**(A)
2	3	1.5
8	8	1.0
14	10.5	0.75

(a) 求 $R=4\Omega$ 时的 i。

(b) 确定黑盒子产生的最大功率。

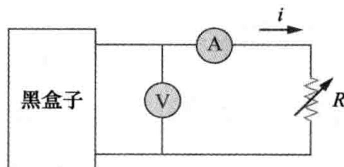


图 8-146 习题 82 的电路原理图

第9章

电　容

我们期待一个建立在四项人类基本自由之上的世界：第一是在全世界任何地方发表言论和表达意见的自由；第二是在全世界任何地方，人人有以自己的方式来崇拜上帝的自由；第三是全世界范围内不虞匮乏的自由；第四是在全世界任何地方免除恐惧的自由。

——富兰克林·德拉诺·罗斯福

历史人物

迈克尔·法拉第（Michael Faraday，1791—1867），英国化学家和物理学家，是当时最伟大的实验科学家。

法拉第出生在伦敦附近，在英国皇家研究院与伟大的化学家汉弗里·戴维爵士一起工作，实现了他童年时代的梦想，他在皇家研究院整整工作了54年。他在物理科学的各个领域都有所建树，并创造了诸如电解（electrolysis）、阳极（anode）、阴极等（cathode）科学术语。他于1831年发现的电磁感应现象提供了一种发电方法，是工程领域的一项重大突破。电动机和发电机就是在这个原理基础上发明的。电容的单位，法拉第，就是为纪念他而以其名字命名的。



迈克尔·法拉第
(© The Huntington Library, Burndy Library, San Marino, California)

本杰明·富兰克林（Benjamin Franklin，1706—1790），美国发明家、科学家、哲学家、经济学家、政治家，是最具有国际影响力的人物之一。

他虽然出生于北美洲的波士顿，但是费城被认为是他的家乡。在费城，可以找到本杰明·富兰克林国家纪念馆。本杰明·富兰克林的那么多的发明体现了他多方面的天赋和广泛的爱好。他的科学家的特质促使他成为一名发明家。他发明了避雷针，可以保护建筑物和船舶免受闪电的破坏。

富兰克林成功的经验很简单，他相信要想成功必须要比别人更加努力。富兰克林是美国政府的创立人之一，他参加了美国政府的建立和美语字母的界定。



本杰明·富兰克林
(Library of Congress Prints and Photographs Division (LC-USZ62-25564))

9.1 引言

本章之前的分析还仅限于电阻电路。本章以及下一章将会介绍两个新的重要的无源线性电路元件：电容和电感。电阻消耗能量，而这两个元件与电阻不同，它们不仅不消耗能

量，而且还存储能量，并且储存的能量能够在过一段时间后释放出来。鉴于此，电容和电感称为储能元件（storage element）⊖。

虽然电阻电路在数字电路中是非常普遍的，不过电阻电路的应用也是非常有限的。例如，在收音接收机中的调频电路以及在计算机系统中作为动态存储元件。在本章介绍了电容元件，下一章介绍了电感之后，将能够分析更多重要和实用的电路。这里说明一下，第7章和第8章中讲述的电路分析方法同样应用于含有电容和电感的电路中。

电容可能是电子元件世界中不被人赞美的英雄。因为电容具有反抗电压变化、隔断直流以及存储电荷和电能的特性，所以它是应用最广泛的电子元件之一。例如，近年来手机的迅速扩散不仅带来了便利的通信和烦人的铃声，也带来了电容的创新。

本章将首先介绍电容元件并描述它在电子领域中是怎样存储能量。然后分析不同类型的电容是否适于商用。接下来分析电容怎样串联以及并联，然后分析 *RC* 电路（电路中包含电阻 *R* 和电容器 *C*），讨论如何用计算机来模拟 *RC* 电路。最后将讨论电容在实际生活中的两个应用实例。

9.2 电容简介

除了电阻，电容是最常用的电子元件。电容是一个无源元件，它主要用于存储能量。电容在电子、通信、计算机以及电力系统中都有广泛的应用。例如，在收音接收机中用于调频电路以及在计算机系统中用作动态元件。典型的电容结构示意图如图 9-1 所示。

电容包含两个极板，两个极板由介质（或者绝缘体）隔开。

在很多的实际应用中，极板可能是铝箔，而中间的介质可能是玻璃、云母、陶瓷、纸或者塑料如聚乙烯或聚碳酸酯等，甚至空气都可以作为介质。电容的种类是按照电容的介质来命名的，比如陶瓷电容、云母电容、纸介电容器、聚酯纤维电容，以及空气电容器等。介质的作用是为了防止电容的两个极板相互接触。通常一个电容会有两个以上的极板。

当一个电压源 V 连接到一个电容上，如图 9-2 所示，电压源在该电容的一个极板上存放正的电量 $+Q$，在另一个极板上存放负的电量 $-Q$，所以对于电容本身来说它是不带电的。电容是用来储存电荷电量，其储存的电荷的数量用 Q 来表示，且储存的电量恰好正比于加于电容上的电压 V，如下式所示：

$$\boxed{Q = CV} \tag{9-1}$$

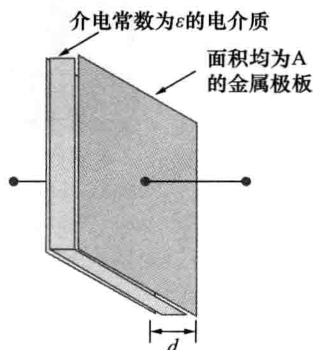


图 9-1 典型的电容

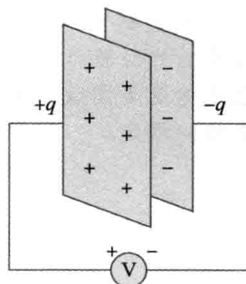


图 9-2 加有电压为 V 的电容

⊖ 相对于电阻吸收或者消耗能量，电感或者电容是存储或者释放能量，也就是说电感和电容具有记忆性。

式中，C 表示比例常数，称为电容器的电容（capacitance）（这里的 C 不要与电荷的单位，库仑混淆）。电容是表征了电容器储存能量的能力。电容的单位是法拉（F），用以纪念英国物理学家迈克尔·法拉第（1791—1867）。不过，1F 非常大，大部分的电容只是 1F 的一小部分，所以用前缀（乘数）来表示更小的数值。例如，1μF 表示 1F 的一百万分之一。由式（9-1）可得

$$1C = 1F - V \tag{9-2}$$

重新整理式（9-1），可以将方程重写如下：

$$C = \frac{Q}{V} \tag{9-3a}$$

$$V = \frac{Q}{C} \tag{9-3b}$$

由式（9-3a），可以得出以下的定义[⊖]：

电容是电容器一个极板上的电量对于两极板间压差的比值，用法拉（F）来计算。

虽然电容器的电容 C 是单极板电荷量 Q 对于极板间电压 V 的比值，但是电容并不取决于 Q 或者 V。电容取决于电容器的物理尺寸。这一点将会在下一节中讲到。

可以得到电容器的静电场能量。这里再次调用

$$C = \frac{Q}{V}, \quad Q = It, \quad C = \frac{It}{V} \tag{9-4}$$

所以

$$I = \frac{CV}{t} \tag{9-5}$$

电场能量为

$$W = \text{平均电平} \times \text{电流} \times \text{时间} = \frac{(V-0)}{2}It = \frac{1}{2}V\left(\frac{CV}{t}\right)t$$

或者

$$\boxed{W = \frac{1}{2}CV^2} \tag{9-6}$$

这里 V 的单位是伏特，C 的单位是法拉，所以 W 的单位是焦耳。如果电容电压从零上升到终电压 V，那么平均电压为 $V/2$。如果将 $V=Q/C$ 代入，那么，式（9-6）可以写为

$$W = \frac{Q^2}{2C} \tag{9-7}$$

这是式（9-6）的另一种表示方式。

例 9-1 (a) 计算两端电压为 20V 的 3pF 电容中存储的电荷量。(b) 求存储在电容中的能量。

解：(a) 因为 $Q=CV$，

$$Q = 3 \times 10^{-12} \times 20 = 60(\text{pC})$$

(b) 电容中存储的能量为

$$W = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2} \times 3 \times 10^{-12} \times 400 = 600(\text{pJ})$$

◀

练习 9-1 一个 3.3μF 的电容器，如果单极板电量为 0.12mC，那么它两端的电压是多少？储存的能量是多少？ **答案：**36.36V；2.182mJ

⊖ 换句话说，电容是电容器中存在单位电压差时，单极板所储存的电荷量。

9.3 电场

电容将能量储存于自身的电场中，该电场由其极板上极性相反的电荷所形成。电场是存在于带电体间的力场。对于平行极板电容来说，电场用力作用线来表示，如图 9-3 所示。电场强度（electric field strength）、电通量（electric flux），以及电通量密度（electric flux density）都可以由计算得到。

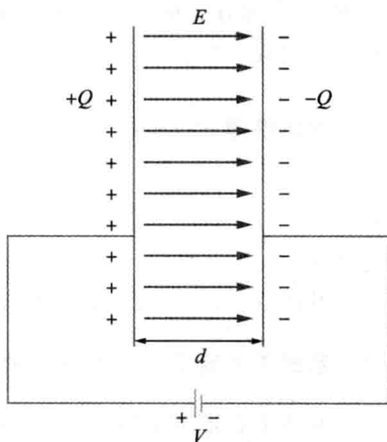


图 9-3 电容内部的电场

如第 1 章所述，电荷量的单位为库仑。电通量是对通过某横截面积的电场线数量的度量，单位也是库仑。因此，如果某电容拥有电荷 Q 库仑，那么其极板间的总电通量 Ψ 则为 Q 库仑，也就是说

$$\Psi = Q \tag{9-8}$$

电通量密度 D 为每单位横截面积上的电通量，也即

$$D = \frac{\Psi}{A} = \frac{Q}{A} \tag{9-9}$$

电场强度 E（或者称为电场密度）为极板端电压 V 和极板间距离 d 之间的比值，即

$$E = \frac{V}{d} \tag{9-10}$$

电场强度 E（单位 V/m）以及电通量密度 D（单位 C/m^2）都会随着电容极板上的电荷量的增加而增加，并且它们二者是相关的。

$$D = \varepsilon E \tag{9-11}$$

其中，ε 称为介质材料的电介质常数。电介质常数表明了电通量通过材料的难易程度。

对于平板电容来说（如图 9-1 到图 9-3 所示），由于 $\Psi = DA$，$V = Ed$，且 $D/E = \varepsilon$，所以有

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\Psi}{V} = \frac{DA}{Ed} = \frac{\varepsilon A}{d} \tag{9-12}$$

或者

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon A}{d}} \tag{9-13}$$

这里 A 表示每个极板的表面积，d 表示两极板间的距离，ε 表示介质材料的电介质常数。从式（9-12）和式（9-13）可以看出，电容并不取决于 Q 和 V，而取决于这二者的比值，以及电容的物理尺寸。虽然式（9-13）仅适用于平板电容，但是可以从中推断出决定电容大小的三个一般因素：

1）极板的表面积——表面积越大，电容越大；

2）极板间的间隙——间隙越小，电容越大；

3）介质材料的电介质常数——电介质常数越大，电容越大。

介质材料的电介质常数可以表示为

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \tag{9-14}$$

这里 $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ 法拉每米（F/m）是真空的电介质常数，而 $\varepsilon_r = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ 是介质的相对电介质常数。

常用材料的电介质常数在表 9-1 中给出。由于，给定材料的电介质常数会变化很大，因此，表 9-1 中列出的电介质常数只是近似值，因为对于给定的材料来说电介质常数也是

会变化很大。应该知道电介质常数是无量纲的，因为它是一个相对的度量。

表 9-1　常用材料的电介质常数

介质材料	电介质常数（ε_r）	介质材料	电介质常数（ε_r）
真空	1.0	云母	5.0
空气	1.0006	瓷介	6.0
聚四氟乙烯	2.0	玻璃	7.5
纸（干燥）	2.5	氧化钽	30
聚苯乙烯	2.5	水（蒸馏）	80
橡胶	3.0	陶瓷	7500
油（转换油）	4.0		

如果图 9-3 所示的电压 V 超过某个特定的值，那么将电容极板隔开的介质材料将会损坏，电容损坏时的电场强度就称为材料的电介质强度（dielectric strength）。一个给定材料的电介质强度为每单位厚度的电压，超过这个电压材料就会被损坏。在表 9-2 中给出了常用材料的电介质强度。同样，表 9-2 中列出的电介质强度也是近似的。对于给定材料，其电介质强度也会随着给定的材料不同而发生很大变化。一般情况下，如果两极板的间距（介质的厚度）增加会增大损坏电压，但是这样会造成电容的减小。

表 9-2　常用材料的电介质强度

介质材料	电介质强度（kV/cm）	介质材料	电介质强度（kV/cm）
空气	30	聚四氟乙烯（塑料）	600
陶瓷	30	玻璃	1200
瓷介	70	云母	2000
纸介	500		

例 9-2　(a) 计算一个平板电容的电容，极板面积为 4cm²，极板间距为 0.3cm。假定极板间介质为空气。(b) 如果电介质为陶瓷时，重复计算 (a)。

解：(a) 对于空气，$\varepsilon_r \approx 1$，所以有

$$C=\varepsilon_o\frac{A}{d}=8.85\times10^{-12}\times\frac{4\times10^{-4}}{0.3\times10^{-2}}=1.18(\text{pF})$$

(b) 对于陶瓷，$\varepsilon_r \approx 7500$，所以有

$$C=\varepsilon_o\varepsilon_r\frac{A}{d}=8.85\times10^{-12}\times7500\times\frac{4\times10^{-4}}{0.3\times10^{-2}}=8850(\text{pF})=8.85(\text{nF})$$

从这里可以看出介质的特性可以使得电容的值存在巨大的差异。 ◀

练习 9-2　求某平板电容的电容的大小，其极板面积为 0.02m²，极板间距为 5nm。假定极板间介质为聚四氟乙烯。　**答案：**70.8pF

9.4 电容的种类

商用的电容有不同的种类和标称值。典型的电容的值在皮法（pF）到（μF）的范围之间。电容可以按制造电容的电解质材料来分类，也可以分为固定电容和可变电容两类。如图 9-4 给出了表示固定电容和可变电容的电路符号。注意根据无源符号规则，电容在充电时电流流入电容的正端，而当电容放电时，电流流出电容的正端。

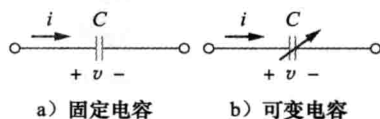


图 9-4　电容的电路符号

图 9-5 中给出了固定值电容的常见种类。聚酯电容（Polyester capacitor）重量轻，性能稳定，且它随温度的变化是可以预测的。除了聚酯电介质，其他的电介质材料如云母、陶瓷以及聚苯乙烯都可用来充当电容的电介质。如表 9-1 所示，陶瓷提供了非常高的电介质常数和高的电介质强度。因此，可以将相当大的电容做在很小的空间。薄膜电容是由金属薄膜或者塑料薄膜卷制而成或者封装而成的。电解电容能够产生非常大的电容但其击穿电压较低。

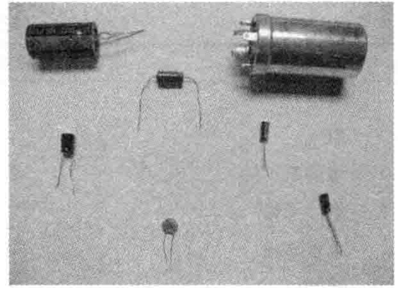
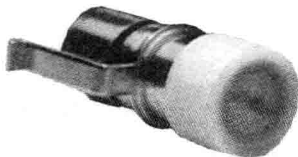


图 9-5 不同种类的固定电容器
（© Sarhan M. Musa）

可变或者可调整电容用于那些需要调整电容的电路之中。这类电路可用于收音机接收机、TV 调谐器，或者天线调谐器中的阻抗匹配。如图 9-6 给出了可变电容的常见类型。微调电容（垫整电容）或者玻璃活塞电容（glass piston capacitor）的电容会随着螺丝钉的旋转而改变。微调电容经常与另一电容并联，这样就可以使得等效电容得到微小的改变。可变空气电容（网状板，meshed plates）通过旋动转轴来改变电容。用于收音机接收机的可变电容允许调节到不同的状态。

电容值和额定电压通常都标注于电容主体之上。电容值表明电容能够储存的多少电荷量［参见式（9-1）］。额定电压表示电容能够承受多大电压。与某些电阻相似，由于某些电容尺寸较小，所以也是用色码来标识。某些色码已经不再经常使用了，可以在较老的教科书和参考手册中找到。虽然学习色码标注并不重要，不过应该知道色码的存在。其他电容，如电解电容尺寸很大，所以足够将关于自身电容、额定电压、额定容限的这些信息标注其主体上。实际上大多数电容都是用数值标注的；不过，有些是用色码标注的，还有些是用字母编码标注的。

电解电容的“极板”中的一个或者两个都是非金属物质，即电解质。电解质比金属具有更低的电导率，所以它们仅在电容器的金属极板不适用时使用，如电介质表层不牢固或形状不平整时。电解质电容如图 9-7 所示。它们通常具有最大的电容值，范围从 0.1 到 200000μF。电解质电容通常将一个极板极化为正端，另一个极板极化为负端。为此，对正确极性的错误使用，会导致灾难性的（爆炸性的）后果。非电解质电容在电路中连接时可以不用考虑其极性。



a）微调电容



b）薄膜电容

图 9-6 可变电容
（© Johanson Manufacturing Corporation）



图 9-7 电解电容
（图片由 Surplus Sales of Nebraska 提供）

电容也可以像电阻一样作为贴片元件。贴片电容有时又称为片状电容，设计用于要求稳定温度以及频率特性类似于聚酯薄膜电容的应用中。对于某些应用如电磁干扰、噪声滤除、电源输入/输出滤波器，以及音频或者信号匹配等，使用贴片电容是非常理想的。图9-8给出了贴片电容的一些例子。

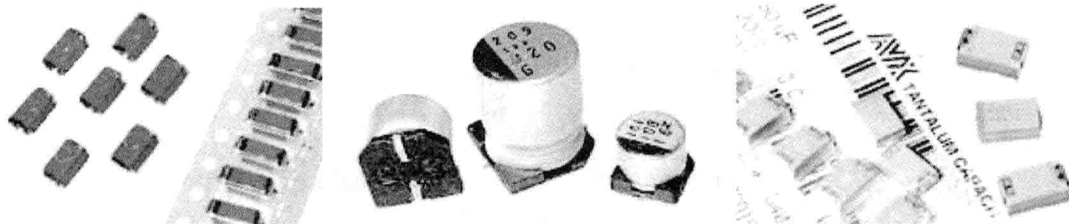


图9-8　贴片电容器
（图片由 Surplus Sales of Nebraska 提供）

电容的标准值与电阻的类似。标准电容设计为电容的初始参考标准，用于对电容的工作值进行比较。电容标准值有10、100、150、220、330、470、560和1000pF以及1、1.5、2.2、3.3、4.7、5.6、10μF等。

电容有以下一些用途：

- 平滑电源输出；
- 阻止直流电流，允许交流电流通过；
- 储存能量如照相机闪光灯电路；
- 用于定时，如在555定时器中，IC控制充电和放电；
- 用于匹配，如在声音系统和连接扬声器之间；
- 用于滤波，如声音系统中的音量控制；
- 用于调谐，如收音机系统。

9.5　电容的串联和并联

有时也会遇到电容的串并联，并期望用一个单一的等效电容 C_{eq} 来代替这些电容。

要得到 N 个并联电容的等效电容 C_{eq}，考虑图9-9a所示电路，等效电路如图9-9b所示。注意到这里的电容都具有相同的端电压，不过总的电荷量为各个电容电荷量的和值。

$$Q_T = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \cdots + Q_N \tag{9-15}$$

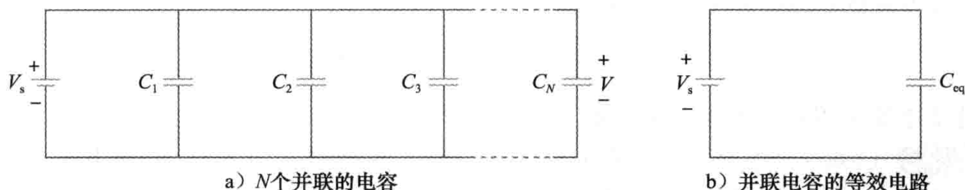


图9-9　并联

又 $Q=CV$，因此

$$C_{eq}V = C_1V + C_2V + C_3V + \cdots + C_NV$$

或

$$\boxed{C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots + C_N} \tag{9-16}$$

可知，并联电容等效电容类似于串联电阻的等效模式。

N个并联电容的等效电容等于各个电容的和值。

再来看一下 N 个电容串联时的等效电容 C_{eq}，比较图 9-10a 所示电路，其等效电路如图 9-10b。注意，流过电容的电流 i 均相同（因此，每个电容的极板上都聚集了相同电荷量）。对图 9-10a 中的回路应用 KVL 定律

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_N \tag{9-17}$$

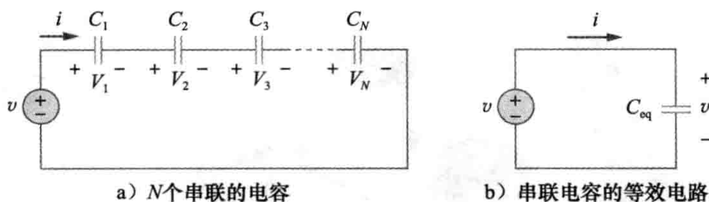


图 9-10 串联

又有 $V=Q/C$，所以

$$\frac{Q}{C_{eq}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} + \cdots + \frac{Q}{C_N}$$

或

$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots + \frac{1}{C_N}} \tag{9-18}$$

串联电容的等效电容等于各个电容的倒数的和值的倒数。

由上可以看出串联电容的等效电容类似于并联电阻的等效模式。对于 $N=2$（也即两个电容串联），式（9-18）化为

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

或

$$\boxed{C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}} \tag{9-19}$$

图 9-10a 所示电路中每个电容的端电压可以由以下公式计算。

$$V_1 = \frac{Q}{C_1},\quad V_2 = \frac{Q}{C_2}\quad ,\cdots,\quad V_N = \frac{Q}{C_N}$$

又有 $V=Q/C_{eq}$ 或 $Q=C_{eq}V$。则

$$V_1 = \frac{C_{eq}}{C_1}V,\quad V_2 = \frac{C_{eq}}{C_2}V\quad ,\cdots,\quad V_N = \frac{C_{eq}}{C_N}V \tag{9-20}$$

这里电容作用相当于电压分压器。

例 9-3 已知三个电容并联，有 $C_1=4\mu F$，$C_2=5\mu F$，$C_3=10\mu F$，其端电压为 110V。(a) 求总的电容；(b) 求储存的总能量

解：(a) 因为电容是并联，因此等效电容或者总电容为

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 = 4 + 5 + 10 = 19(\mu F)$$

(b) 储存的总能量为

$$W = \frac{1}{2}C_{eq}V^2 = \frac{1}{2} \times 19 \times 10^{-6} \times 110^2 = 0.115(J)$$ ◀

练习 9-3 如果例 9-3 中的电容为串联，试重新求解。 **答案**：1.818μF；11.01mJ

例 9-4 求如图 9-11 所示电路中 a、b 两端间的等效电容。

解：20μF 和 5μF 的电容串联，其等效电容为

$$\frac{20 \times 5}{20 + 5} = 4(\mu\text{F})$$

得到的 4μF 的电容与 6μF 和 20μF 的电容并联，则等效电容为

$$4 + 6 + 20 = 30(\mu\text{F})$$

得到的 30μF 电容与 60μF 的电容是串联，则整个电路的等效电容为

$$C_{eq} = \frac{30 \times 60}{30 + 60} = 20(\mu\text{F})$$ ◀

练习 9-4 求如图 9-12 所示电路中 a、b 两端间的等效电容。 **答案：** 40μF

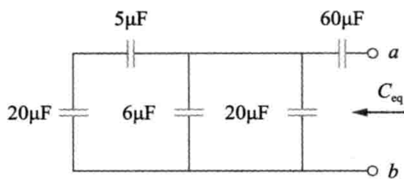


图 9-11 例 9-4 的电路图

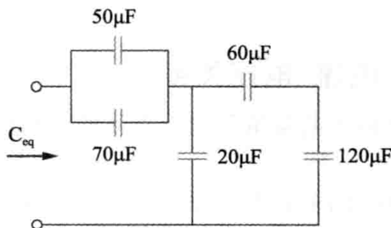


图 9-12 练习 9-4 的电路图

例 9-5 电路如图 9-13 所示，求每个电容的端电压。

解： 首先来计算如图 9-14 的等效电容 C_{eq}。图 9-13 中的两个并联电容先进行合并得到 $40+20=60\mu$F。而这个 60μF 的电容再与 20μF 及 30μF 的电容串联。所以

$$C_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{60} + \frac{1}{30} + \frac{1}{20}} = 10(\mu\text{F})$$

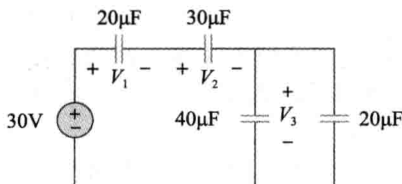


图 9-13 例 9-5 的电路图

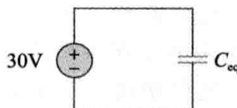


图 9-14 图 9-13 的等效电路

总的电荷量为

$$Q = C_{eq}V = 10 \times 10^{-6} \times 30 = 0.3(\text{mC})$$

而 20μF 和 30μF 电容与 30V 的电源相串联，所以 20μF 和 30μF 电容的电荷量就等于这一电荷量（由于 $I=Q/t$，因此可以简略地将电荷量看成是电流来理解），因此

$$V_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{0.3 \times 10^{-3}}{20 \times 10^{-6}} = 15(\text{V})$$

$$V_2 = \frac{Q}{C_2} = \frac{0.3 \times 10^{-3}}{30 \times 10^{-6}} = 10(\text{V})$$

确定了 V_1 和 V_2 后，再使用 KVL 来确定 V_3，即

$$V_3 = 30 - V_1 - V_2 = 5(\text{V})$$

也可以这样分析，由于 20μF 和 30μF 的电容是并联，所以二者具有相同的电压 V_3，且它们的等效电容为 $40+20=60\mu$F。这一等效电容与 20μF 和 30μF 的电容相串联且具有相同的电荷量。所以

$$V_3 = \frac{Q}{60\mu\text{F}} = \frac{0.3 \times 10^{-3}}{60 \times 10^{-6}} = 5(\text{V})$$ ◀

练习 9-5 求如图 9-15 所示电路中每个电容的端电压。

答案： $V_1=30\text{V}$；$V_2=30\text{V}$；$V_3=10\text{V}$；$V_4=20\text{V}$

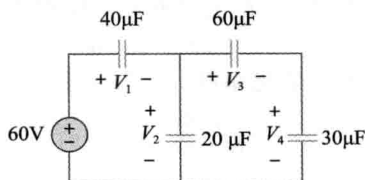


图 9-15 练习 9-5 的电路图

9.6 电流-电压关系

电容的电荷量和电压之间的关系由式（9-1）给出，即

$$Q = Cv$$

要得到电容的电流-电压关系，注意，式（9-1）表示：

$$\text{电荷量 } Q \text{ 的变化率} = C \times \text{电压 } v \text{ 的变化率}$$

由于电容 C 为常数，而

$$\text{电荷量 } Q \text{ 的变化率} = \text{电流} = i$$

即

$$i = C \times \text{电压 } v \text{ 的变化率}$$

因此，写成数学表达式为

$$\boxed{i = C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}} \tag{9-21}$$

其中 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ 为 v 的变化率或者 v 的一阶导数。式（9-21）为电容的电流-电压关系，假定符合无源符号规则（参考图 9-4）。式（9-21）表明电容的端电压变化越大，则流经它的电流越大，反之亦然。如果电压随时间增长，则导数 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ 为正；如果电压减少，则 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ 为负。如果电压保持恒定（没有变化），则电流为零。

注意，这里使用小写的 v 和 i 表示瞬时电压和瞬时电流，用大写的 V 和 I 表示直流电压和直流电流。

下列电容的重要特性应铭记于心：

1）由式（9-21）可以看到当电容的端电压不随时间变化时（即直流电压），则流经电容的电流为零。因此

电容对直流表现为开路。

不过，如果电池（直流电压）连接到电容两端时，电容会有电流。

2）电容的端电压一定是连续的，即

电容的端电压不能够进行突变。

电容阻止其端电压发生突变。由式（9-21）可知，电压的瞬时变化要求无限大的电流，但是这在实际中是不可能的。例如，电容的端电压可以具有如图 9-16a 所示的波形，但是却不能具有图 9-16b 所示的波形，因为图 9-16b 的电压发生了突变。相反，流经电容的电流则可以发生突变。

3）理想电容不消耗能量。它存储能量时从电路中吸收功率，而释放能量时则为电路提供功率。

4）实际的、非理想的电容存在一个并联漏电阻，如图 9-17 所示。漏电阻可能为 100MΩ，也可能很小以致在很多实际应用中均可被忽略。鉴于此，本书中只考虑理想电容。

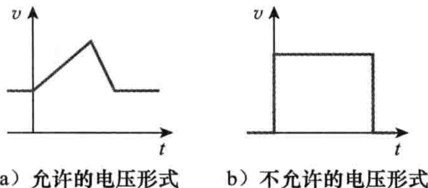


图 9-16　电容两端的电压

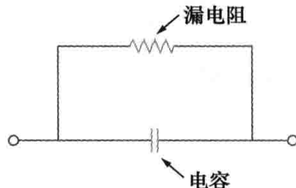


图 9-17　非理想电容的电路模型

例 9-6 计算 $200\mu F$ 电容上流过的电流，其端电压如图 9-18 所示。

解： 由 $i(t)=C\Delta v/\Delta t$ 且 $C=200\mu F$，求 v 的导数或者斜率就可以得到 $i(t)$。

从 $t=0s$ 到 $t=1s$，$\Delta v=50V$，而 $\Delta t=1s$，所以

斜率 $=\Delta v/\Delta t=50/1=50V/s$。

从 $t=1s$ 到 $t=3s$，$\Delta v=-100V$，而 $\Delta t=2s$，所以

斜率 $=\Delta v/\Delta t=-100/2=-50V/s$。

从 $t=3s$ 到 $t=4s$，$\Delta v=50V$，而 $\Delta t=1s$，所以

斜率 $=\Delta v/\Delta t=50/1=50V/s$。

图 9-18　习题 6 的电路图

因而，$i(t)=C\Delta v/\Delta t$ 有

$$i(t)=200\times10^{-6}\times\begin{cases}50, & 0<t<1\\-50, & 1<t<3\\50, & 3<t<4\\0 & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}10\text{mA}, & 0<t<1\\-10\text{mA}, & 1<t<3\\10\text{mA}, & 3<t<4\\0 & \text{其他}\end{cases}$$

电流波形如图 9-19 所示。◀

练习 9-6 给未充电的 1mF 电容通以如图 9-20 所示的电流。分别计算电容在 $t=2ms$ 以及 $t=5ms$ 时的端电压。

答案： 100mV；400mV

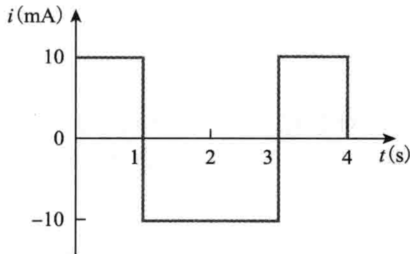


图 9-19　习题 6 的电流波形

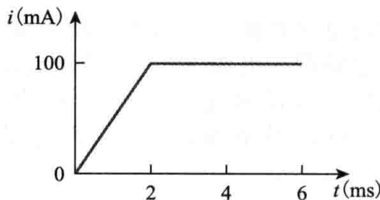


图 9-20　练习 9-6 的电路图

例 9-7 电路如图 9-21a 所示，计算直流条件下电路中每个电容储存的能量。

解： 在直流条件下，电容都用开路来代替，如图 9-21b 所示。通过 2kΩ 和 4kΩ 电阻串联支路的电流可以由分流的方式得到

$$i=\frac{3}{3+2+4}\times6=2(\text{mA})$$

因此，两个电容上的端电压 v_1 和 v_2 分别为

$$v_1=2000i=4V,\quad v_2=4000i=8(V)$$

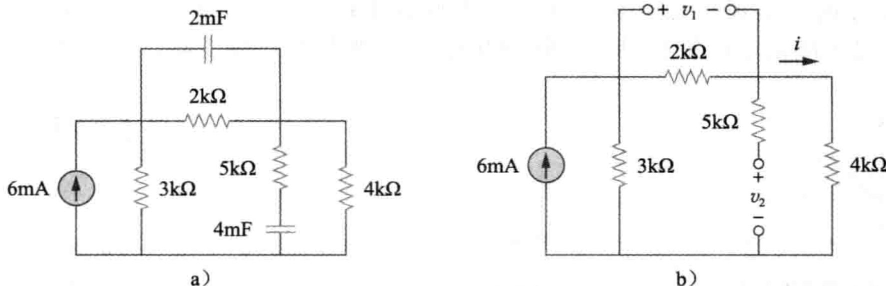


图 9-21 习题 7 的电路图

储存的能量分别为

$$w_1 = \frac{1}{2}C_1 v_1^2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 10^{-3} \times 4^2 = 16(\mathrm{mJ})$$

$$w_2 = \frac{1}{2}C_2 v_2^2 = \frac{1}{2} \times 4 \times 10^{-3} \times 8^2 = 128(\mathrm{mJ})$$ ◀

练习 9-7 在直流条件下，求如图 9-22 所示电路中每个电容所储存的能量。 **答案：** 405μJ；90μJ

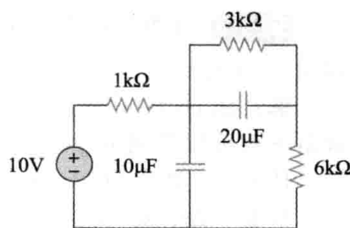


图 9-22 练习 9-7 的电路图

9.7 电容的充电和放电

本节中将分析电容如何进行充电和放电，以及电容如何通过电阻充放电。

9.7.1 充电循环

考虑如图 9-23 所示电路，一个干电池与一个电阻和一个电容相串联（通常情况下，如图 9-23 所示电路中的电阻和电容也可以是多个电阻或者多个电容组合的等效电阻或等效电容）。假定如图 9-23 电路中电容没有充电，且开关在 $t=0$ 时刻闭合。开关闭合后，才开始为电容充电，对图 9-23 中的电路应用 KVL，

$$V_s = v_R + v_C \tag{9-22}$$

电容电压在任意时刻的表达式可以写为

$$v_C = V_s - (V_s - V_0)\mathrm{e}^{-t/RC} \tag{9-23}$$

其中，V_s 为电源电压，V_0 为初始电压。在本例中，电容在初始状态下没有充电。因此，有 $V_0=0$ 且

$$v_C = V_s(1 - \mathrm{e}^{-t/RC}) \tag{9-24}$$

这时电容将能量存储于它两极板之间的电场中。

在电路图中电源电压 V_s 通过流经电阻（R）的电流对电容（C）进行充电。

假定电容的端电压（v_C）初值为零，不过它随着电容的充电过程不断增长，如图 9-24 所示。电容在 $v_C=V_s$ 时充电完成。

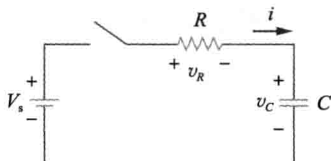


图 9-23 充电电路

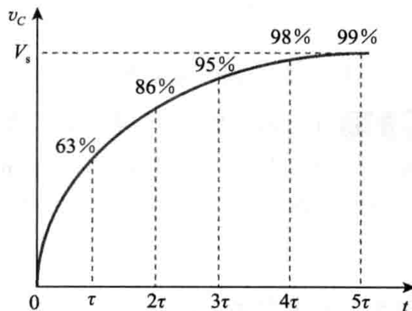


图 9-24 电容的充电曲线

从式（9-22）和式（9-24）可以看出，充电电流 i 取决于电阻的端电压

$$v_R = V_s - v_C = V_s - V_s(1 - e^{-t/RC}) = V_s e^{-t/RC}$$

充电电流为

$$i = \frac{v_R}{R} = \frac{V_s}{R} e^{-t/RC} \tag{9-25}$$

随着 t 的增长，电流将会衰减到零。电流的衰减速度用术语——时间常数（time constant）来描述，用希腊字母 τ（tau）表示。

电路的时间常数（单位为秒）τ 为电路响应（电流）衰减到初始值的 1/e 或 36.8%时所经过的时间。

$t=\tau$ 时，式（9-25）化为

$$\frac{V_s}{R} e^{-\tau/RC} = \frac{V_s}{R} e^{-1} = 0.368 \frac{V_s}{R}$$

或者

$$\boxed{\tau = RC} \tag{9-26}$$

时间常数也可以认为是电路以初始变化速率达到终态所需要的时间。引入时间常数后，式（9-24）则可以写为

$$\boxed{v_C(t) = V_s(1 - e^{-t/\tau}), \quad \tau = RC} \tag{9-27}$$

9.7.2 放电循环

对于放电过程，考虑图 9-25 所示的无源 RC 电路，且假定开关在 $t=0$ 时刻闭合。由于电容器是已充电状态，所以假定在 $t=0$ 时刻，初始电压为

$$v_C(0) = V_0$$

令式（9-23）中 $V_s=0$，则可得

$$\boxed{v_C(t) = V_0 e^{-t/\tau}, \quad \tau = RC} \tag{9-28}$$

该式表明了放电过程是初始电压以指数函数形式进行衰减，如图 9-26 所示。可得在 $t=\tau$ 时，式（9-28）化为

$$V_0 e^{-\tau/RC} = V_0 e^{-1} = 0.368 V_0$$

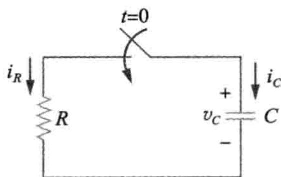


图 9-25 放电电路

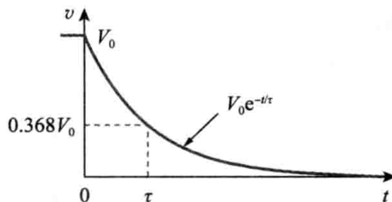


图 9-26 电容器的放电曲线

用计算器可以很容易计算出 $v(t)/V_0$ 的值，如表 9-3 所示。从表 9-3 可以看出电压 $v(t)$ 在经过 5τ（五倍时间常数）的时间之后将小于 V_0 的 1%。五倍的时间常数也称为暂态时间。因此，习惯上（对于所有的实际应用）假定电容在经历五倍的时间常数之后就会放电（或充电）完全。换句话说，电路经过 5τ 的时间后，电路就会达到终态或者稳态，这时电路不会再随时间发生变化。

表 9-3 $v(t)/V_0=\mathrm{e}^{-t/\tau}$ 的值

t	$v(t)/V_0$	百分比	t	$v(t)/V_0$	百分比
0	1	100	3τ	0.04979	4.98
τ	0.36788	36.79	4τ	0.01832	1.83
2τ	0.13534	13.53	5τ	0.00674	0.67

如图 9-27 所示，电路的时间常数小（$\tau=RC$，R 或者 C 的改变都会引起时间常数的增大或减小），它就会很快地释放出储存的能量，所以电路的响应速度就快，能很快到达稳态（或终态）；而电路的时间常数大，则它的响应速度就慢，到达稳态的时间就长一些。对于任何响应速度，不管电路的时间常数是大还是小，电路都会在 5 倍的时间常数时达到稳态。

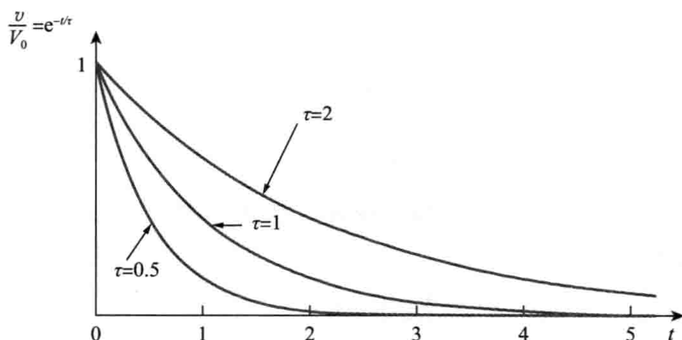


图 9-27 时间常数取不同值时，$v/V_0=\mathrm{e}^{-t/\tau}$ 的曲线

本节中的分析方法可以扩展到无源 RC 暂态电路的一般情况下。给定了初值和时间常数，即可得到电容的电压响应：

$$v_C(t)=v(0)\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

得到电容电压之后，其他变量（如电容电流 i_c、电阻电压 v_R 以及电阻电流 i_R）就都可以确定了。在求时间常数 $\tau=RC$ 时，R 通常为电容两端的戴维南等效电阻；即可以去掉电容 C，求剩余电路中的等效电阻 $R=R_{\mathrm{Th}}$⊖。

例 9-8 电路如图 9-23 所示，其中 $R=500\Omega$，$C=10\mu\mathrm{F}$，$V_s=15\mathrm{V}$。(a) 计算电路的暂态时间。(b) 求 v_C、v_R 和 i。

解：(a) 时间常数为 $RC=\tau=500\times10\times10^{-6}=5\mathrm{ms}$。暂态时间为 $5\tau=25\mathrm{ms}$。

(b) 由式 (9-27) 有

$$v_C(t)=V_s(1-\mathrm{e}^{-t/\tau})=15(1-\mathrm{e}^{-t/\tau})(\mathrm{V})$$

$$v_R(t)=V_s-v_C=V_s\mathrm{e}^{-t/\tau}=15\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

$$i(t)=\frac{v_R}{R}=\frac{V_s}{R}\mathrm{e}^{-t/\tau}=\frac{15}{500}\mathrm{e}^{-t/\tau}$$ ◀

练习 9-8 在例 9-8 中，电容电压 v 增加到 10V 需要多长时间？ **答案：**5.493m

例 9-9 如图 9-28，令 $v_C(0)=15\mathrm{V}$，求 v_C、v_x 以及 i_x 在 $t>0$ 时的表达式。

解：首先需要将图 9-28 的电路转化为如图 9-25 所示的标准 RC 电路。所以得先求电容两端的等效电阻或戴维南等效电阻。然后，求得电容电压的响应 v_C 之后，即可分别得到 v_x 和 i_x。

⊖ 如果电路中包含单一电容和多个电阻，可以用戴维南等效定理来求出电容两端的等效电阻，以构造一个简单的 RC 电路。同样，戴维南等效定理也可以用于多个电容可以等效为单一电容的情况。

8Ω 电阻和 12Ω 电阻串联合并为 20Ω 电阻。得到的 20Ω 电阻与 5Ω 电阻合并可以得到等效电阻为

$$R_{eq} = \frac{20 \times 5}{20 + 5} = 4(\Omega)$$

因此，得到如图 9-29 所示的等效电路，类似于图 9-25 的电路。其中时间常数为

$$\tau = R_{eq}C = 4 \times 0.1 = 0.4(\mathrm{s})$$

所以

$$v(t) = v(0)\mathrm{e}^{-t/\tau} = 15\mathrm{e}^{-t/0.4}\mathrm{V}, \quad v_C(t) = v(t) = 15\mathrm{e}^{-2.5t}\mathrm{V}$$

由图 9-28，可以用分压的方法得到 v_x，即

$$v_x = \frac{12}{12+8}v_C = 0.6 \times 15\mathrm{e}^{-2.5t} = 9\mathrm{e}^{-2.5t}\mathrm{V}$$

最后

$$i_x = \frac{v_x}{12} = 0.75\mathrm{e}^{-2.5t}\mathrm{A}$$

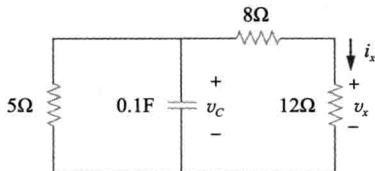


图 9-28 例 9-8 电路图

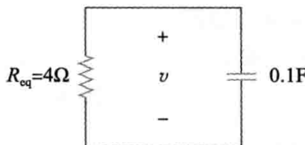


图 9-29 图 9-28 的等效电路

练习 9-9 参考如图 9-30 所示电路，令 $v_C(0)=30\mathrm{V}$，求 $t \geqslant 0$ 时的 v_C、v_x 和 i_x。

答案： $30\mathrm{e}^{-0.25t}\mathrm{V}$；$10\mathrm{e}^{-0.25t}\mathrm{V}$；$-2.5\mathrm{e}^{-0.25t}\mathrm{A}$

例 9-10 如图 9-31，电路中的开关已经闭合了很长时间，且在 $t=0$ 时刻打开。求 $t \geqslant 0$ 时 $v(t)$。计算电容中储存的初始能量。

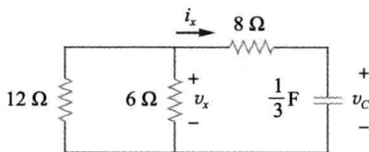


图 9-30 练习 9-9 和习题 68 的电路图

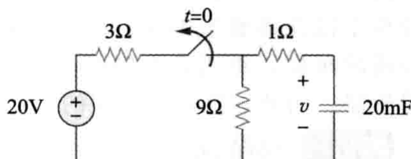


图 9-31 例 9-10 的电路图

解： $t<0$ 时，开关闭合，电容对于直流而言相当于开路，如图 9-32a 所示。利用分压原理可得

$$v_C(t) = \frac{9}{9+3} \times 20 = 15(\mathrm{V}), \quad t < 0$$

由于电容的端电压不能发生突变，所以电容的端电压在 $t=0^-$（$t=0$ 之前）时的值等于 $t=0$ 时的值，即

$$v_C(0) = V_0 = 15(\mathrm{V})$$

当 $t>0$，开关打开，可得到如图 9-32b 所示电路。（注意，这里图 9-32b 的电路 RC 是无源的，图 9-31 中的独立源仅是提供初始电压 V_0 或者初始能量。）1Ω 的电阻和 9Ω 的电阻是串联的，可得

$$R_{eq} = 1 + 9 = 10(\Omega)$$

时间常数为

$$\tau = R_{eq}C = 10 \times 20 \times 10^{-3} = 0.2(\mathrm{s})$$

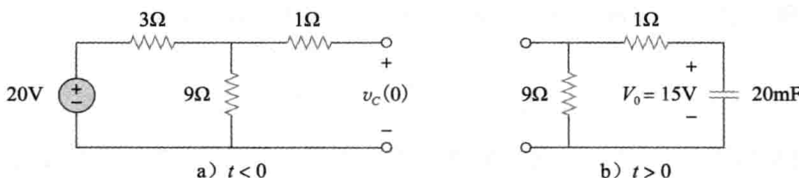


图 9-32 例 9-10 的电路图

因此，$t\geqslant 0$ 时的电容器端电压为

$$v(t)=v_C(0)e^{-t/\tau}=15e^{-t/0.2}\text{V}$$

或

$$v(t)=15e^{-5t}\text{V}$$

电容储存的初始能量为

$$w_C(0)=\frac{1}{2}Cv_C^2(0)=\frac{1}{2}\times 20\times 10^{-3}\times 15^2$$
$$=2.25(\text{J})$$
◀

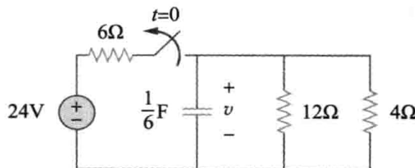


图 9-33 练习 9-10 的电路图

练习 9-10 如图 9-33，如果开关在 $t=0$ 时刻打开，求 $t\geqslant 0$ 时的 $v(t)$ 和 $w(0)$。

答案： $8e^{-2t}$V；5.33J

9.8 计算机分析

9.8.1 PSpice

PSpice 可以用于获取含有存储元件的电路响应。附录 C 中 C.4 节对如何在 Windows 中使用 PSpice 来进行暂态分析进行了概述，建议读者在学习本节之前先回顾一下 C.4 节。

如果必要的话，首先用直流 PSpice 分析来确定初始条件。然后将初始条件用于 PSpice 暂态分析中以获得暂态响应。推荐读者在进行直流分析的时候，将所有的电容开路、将所有的电感短路。当然，这不是必须的。

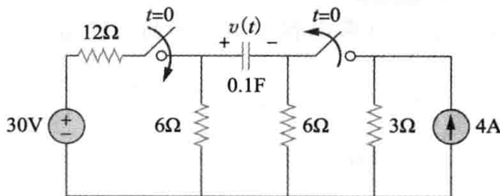


图 9-34 例 9-11 的电路图

例 9-11 电路如图 9-34，求 $v(t)$ 的响应。

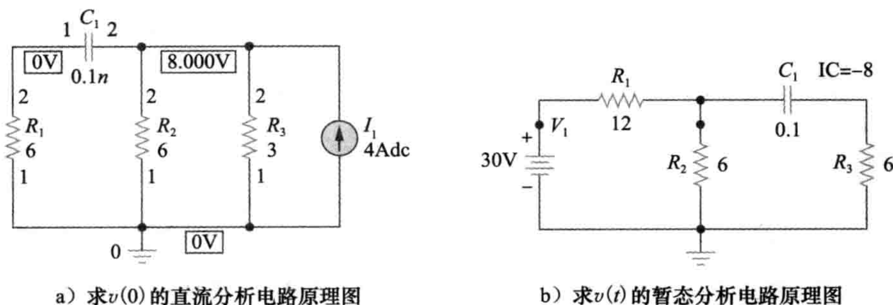
解： 有两种使用 PSpice 求解的方法。

方法 1：

第一种方法为首先使用直流 PSpice 分析求电容器初始电压，其相关电路图如图 9-35a 所示。由于是直流分析，所以使用电流源 IDC。画出电路且将其保存为 exam911a.dsn 后，选择 PSpice/New Simulation Profile，这样打开 New Simulation 对话框。输入 exam911a 作为文件名，然后单击 Create 后，就会打开 Simulation Settings 对话框。单击 OK 按钮，然后单击 PSpice/Run。电路仿真完成后，就可以得到如图 9-35a 中显示的数值，如 $V_1=0$、$V_2=8$V。所以初始电容电压为 $v(0)=V_1-V_2=-8$V。接下来，使用得到的初值和图 9-35b 所示电路进行暂态分析。

图 9-35b 所示电路画好之后，将电容的初始电压设置为 IC＝－8。可双击图中电容符号然后在 IC 下输入－8。然后选择 PSpice/New Simulation Profile，在 New Simulation 对话框中，输入“exam911b”作为文件名，然后单击 Create。在 Simulation Settings 对话框中，分析类型（Analysis Type）选择时域（暂态），运行时间（Run to time）选择 $4\tau=4$s，接着单击 Apply，然后单击 OK 按钮。电路保存好之后，选择 PSpice/Run 对电路进

行仿真。在弹出的窗口中，选择 Trace/Add 并且将 V(R2:2)－V(R3:2) 或者 V(C1:1)－V(C1:2) 的值作为电容电压 $v(t)$ 显示出来，$v(t)$ 的曲线如图 9-36 所示。这一结果与手算得到的结果相同，$v(t)=10-18e^{-t}$V。



a）求 $v(0)$ 的直流分析电路原理图　　b）求 $v(t)$ 的暂态分析电路原理图

图 9-35

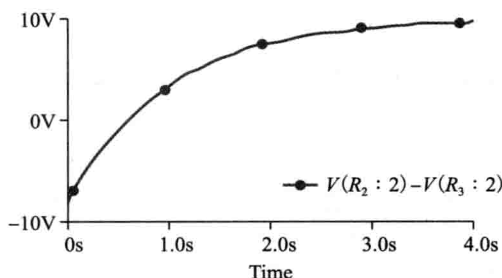


图 9-36　图 9-34 所示电路的响应 $v(t)$

方法 2：

可以直接使用 PSpice 对图 9-34 的电路进行仿真，因为 PSpice 能够自动地处理开关的打开、闭合以及计算初始条件。（打开开关和闭合开关的元件分别为 Sw_topen 和 Sw_tclose。）利用这些元件可以将电路图画为如图 9-37 所示。用这样的方法画好电路之后，选择 PSpice/New Simulation Profile，就会打开 New Simulation 对话框，输入 exam911a 作为文件名，然后单击 Create 后，就会打开 Simulation Settings 对话框。在仿真设置中，分析类型（Analysis Type）选择时域（暂态），运行时间（Run to time）选择 $4\tau=4$s，接着单击应用，然后单击 OK 按钮。电路保存好之后，选择 PSpice/Run 对电路进行仿真。在弹出的窗口中，选择 Trace/Add Trace 并且将 V(R2:2)－V(R3:2) 或者 V(C1:1)－V(C1:2) 的值作为电容器电压 $v(t)$ 显示出来，$v(t)$ 的曲线与图 9-36 所示的曲线相同。

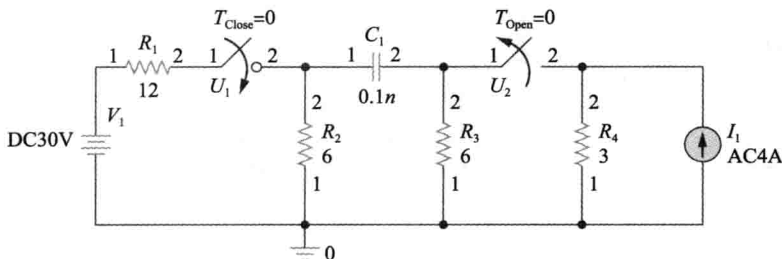


图 9-37　例 9-11 的电路图

练习 9-11 如图 9-38 所示电路，开关已经打开很长时间，并且在 $t=0$ 时闭合。用 PSpice 求 $t>0$ 时 $v(t)$。 **答案：** 如图 9-39 所示

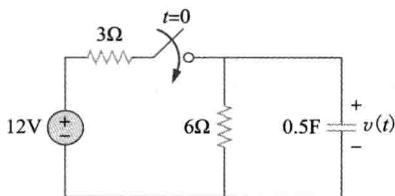


图 9-38 练习 9-11 的电路图

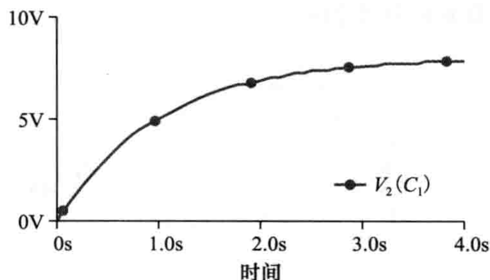


图 9-39 练习 9-11 的响应曲线

9.8.2 Multisim

本节将介绍用 Multisim 来分析 RC 电路。推荐在开始学习本节之前，先阅读附录 D 中的暂态分析 D.3 节

例 9-12 使用 Multisim 来求如图 9-40 所示的电路响应 v_0。

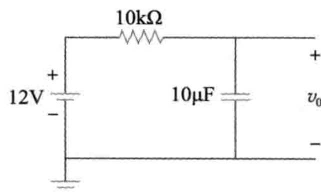


图 9-40 例 9-12 的电路图

解： 首先用 Multisim 画出如图 9-41 所示的电路。Multisim 会自动给节点编号。如果编号没有显示出来，可以选择 Options/Sheet Properties，然后在 Net Names 下方选择 Show all。这样就可以将节点的标号显示出来，如图 9-41 所示。

要确定仿真运行的时间长度，合理的值是 5τ，其中 τ 为电路的时间常数。在本例中

$$\tau = RC = 10 \times 10^3 \times 10 \times 10^{-6} = 0.1(\mathrm{s})$$

所以 $5\tau=0.5\mathrm{s}$。要对仿真中需要用到的参数设定，选择 Simulate/Analyses/Transient Analysis，然后在 Transient Analysis 对话框中，设置开始时间（TSTART）为 0、停止时间（TSTOP）为 0.5s。在 Initial Conditions 选项，选择 Set to zero；在 Output 这项，将V(2)从左边的列表移动到右边的列表中，从而对节点 2 的电压进行仿真。首先在左边的列表中选择/高亮 V(2)，然后单击中间列的 Add 按钮，这样就将 V(2) 移动到了右边的列表。最终在 Transient Analysis 对话框中，选择 Simulate，则输出结果会自动显示出来，如图 9-42 所示。

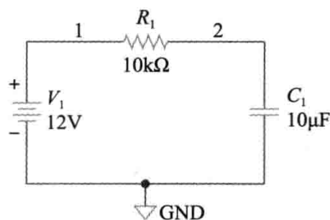


图 9-41 图 9-40 的仿真电路

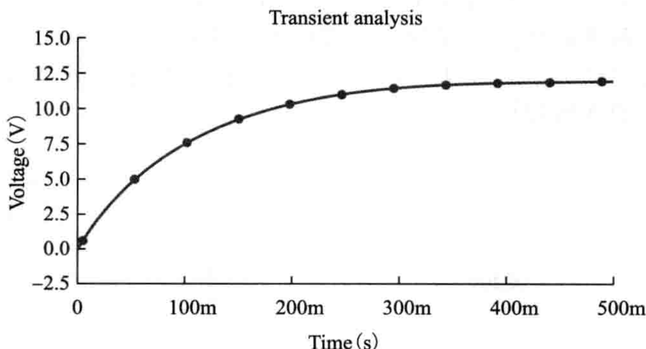


图 9-42 图 9-40 所示电路中的响应 v_0

练习 9-12 用 Multisim 求如图 9-43 所示电路的 V_x。 **答案：** 参见图 9-44

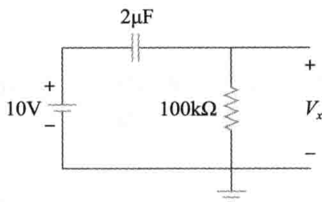


图 9-43 例 9-12 的电路图

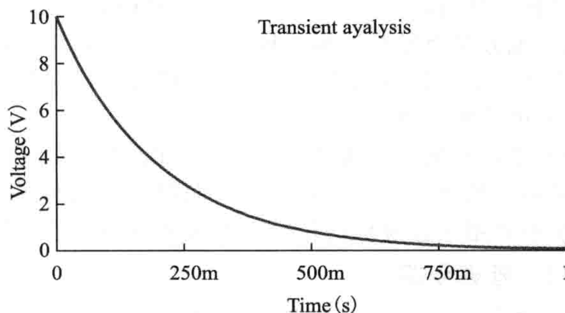


图 9-44 练习 9-12 的响应曲线

9.9 故障诊断

确定电路问题所在的能力是非常有用的。因为学习故障诊断既是一项科学又是一门技术，只有多做才能够掌握。虽然学习都是从电路图开始，但是要记住电路图并不是实际电路。由已知出发，然后以起因-结果方式分析来找到故障所在。

经验可知，电容带来的故障要远比电阻要多。对电源线来说，在老式的收音机中电容是最容易导致出现故障的元件。某些类型的电容，如模塑纸介电容和电解电容，都是很容易工作不正常的，需要在一段时间后更换的。而其他类型如云母电容和陶瓷电容，则几乎不用重新更换。电容的工作不正常与环境温度、使用寿命、短路或者开路有关。电容肯定会受到其周围环境温度的影响，也会随着使用时间过长而损毁。电容的导线与其极板的连接断开则会作用为开路；而它的极板短路则会作用为短路。检测故障电容故障最好的方法是使用合适的仪表。使用欧姆表可以检测电容的连续性，尽量使用模拟仪表，因为模拟仪表的测量值用指针或者移动指针显示在表盘上。尽量使用最大的欧姆量程，如 $R\times1\text{M}\Omega$。电容两端间的电阻应该是无限大。任何短接都表示内部泄露，则电容无效，应该被替换。

对于有极性电容，则电容的极性应该与仪表的极性相匹配。有极性电容的负端（负极）应该总是接地。（当电路中有极性电容接反就会导致爆炸。）为保护仪表，一定要在测试之前确保电容已经完全放电。将电容的两端短路就可以让电容放电。要知道超级大的电容或者充电到很高电压的电容含有巨大的能量。仅仅短路电容的两端会造成不幸的结果如发出火星或者导致熔化（melting）。并且，用于高电压应用的电容可以保持自身的电荷量很长一段时间。在对这样的电路进行操作之前，先断开电源并给电路充分放电的时间。



图 9-45 数字电容表（© Mastech）

尽管电容仪表作为可以作为独立的仪表，但是很多数字万用表（digital multimeter，DMM）都能用于测量很大范围的电容值。数字电容仪的一个实例如图 9-45 所示。在更为复杂的测试中就需要对电容值进行测量，如泄漏、电介质吸收诸如此类情况。

9.10 应用实例

诸如电阻和电容等电路元件的商业级产品既有分立元件的形式又有集成电路（IC）的形式。电容用于很多应用中，如定时电路、调谐电路、电力供电、滤波器以及计算机存储器。例如，电容用于通交流（ac）阻直流（dc）。电容以及电阻和电感，应用在电子设备和微电子设备中。模拟电路中通常既有电阻又有电容。

电容（和电感）具有的如下三个特殊属性使其在电子电路中非常有用：

1）电容具有储存能量的能力，可以使其作为临时电压源或电流源来用。因此，在短时间内产生出大量电流或电压的应用场合就可以使用电容。

2）电容阻止电压的突变。

3）电容对频率是敏感的，所以可以用于频率鉴别的场合。

前两个属性适用于直流电路，而第三个属性则会在交流电路中体现其优势。将在后续的章节中介绍上述属性的用处。本节将介绍电容应用的两个简单的应用实例。

9.10.1 延迟电路

RC 电路在一些设备中都有应用，包括直流电源供电中的滤波器、数字通信中的平滑电路、微分器、积分器、延迟电路以及继电器电路，其中一些应用利用了 *RC* 电路的时间常数或长或短的特点。

RC 电路可以用于提供不同的时间延迟。如图 9-46 所示的电路中包含了一个 *RC* 电路，它是由电容与霓虹灯并联构成的。当开关闭合，电容电压逐渐上升到 120V，上升的速率由电路的时间常数 $(R_1+R_2)C$ 来决定。当霓虹灯两端的电压没有超过一个特定的阈值（假定为 70V）时，它在电路中作用为开路且不发光。当电压阈值达到时，霓虹灯就会点亮，电容就会通过它进行放电。由于霓虹灯点亮时的低阻特性，电容电压会迅速下降，同时灯也会熄灭。接着霓虹灯再次作用为开路，电容重新进行充电。

由于电容需要时间周期 τ 充电来点亮小灯或者放电来熄灭小灯，所以调整 R_2 的值，可以改变电路中延迟时间的长短，使得小灯每间隔一个时间常数 $\tau=(R_1+R_2)C$ 点亮、再充电、再点亮重复循环。类似的 *RC* 延迟电路通常用于建筑工地等场所的闪光警戒灯中。

例 9-13 考虑如图 9-46 所示电路，假定 $R_1=15\text{M}\Omega$ 且 $0<R_2<2.5\text{M}\Omega$。计算该电路的时间常数的极值。

解： R_2 的最小值为 0Ω，相应的电路时间常数为

$$\tau=(R_1+R_2)C=(1.5\times10^6+0)\times0.1\times10^{-6}=0.15(\text{s})$$

R_2 的最大值为 2.5MΩ，相应的电路时间常数为

$$\tau=(R_1+R_2)C=(1.5+2.5)\times10^6\times0.1\times10^{-6}=0.4(\text{s})$$

所以，对于适当的电路设计，时间常数可以用调整适当的电路延迟。 ◀

练习 9-13 如图 9-47 所示 *RC* 电路是用于发出警报的，当流过警报的电流超过 120μA 就会响起警报。如果 $0\leqslant R\leqslant6\text{k}\Omega$，求该电路能够实现时间延迟的范围。

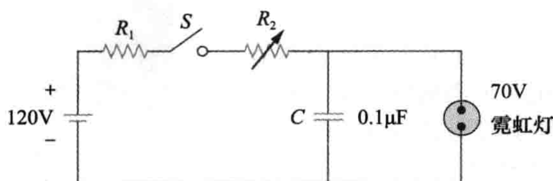


图 9-46 *RC* 延迟电路

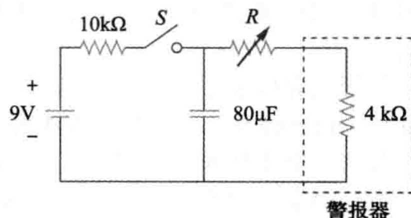


图 9-47 练习 9-13 的电路图

答案： 从 47.32m 到 79.4ms

9.10.2 照相机闪光灯装置

RC 电路的常见应用还有电子闪光装置。这一应用利用了电容阻止电压发生突变的特性。如图 9-48 所示的简单电路，包含一个高电压直流电源，一个大的限流电阻 R_1，以及

一个电容并联了一个闪光灯的小电阻 R_2。当开关处于位置 1 时，由于此时电路时间常数（$\tau_1=R_1C$）较大，所以电容开始缓慢充电，如图 9-49a 所示，电容器电压逐渐由 0 上升到 V_s，而电流则逐渐由 $I_1=V_s/R_1$ 下降到 0，充电时间大约为 5 个时间常数，即

$$t_{充电} = 5R_1C \tag{9-29}$$

当开关置于位置 2 时，电容器电压开始放电。闪光灯的低阻 R_2 允许瞬间的高放电电流，峰值为 $I_2=V_s/R_2$，如图 9-49b 所示。放电也持续大约 5 个时间常数，即

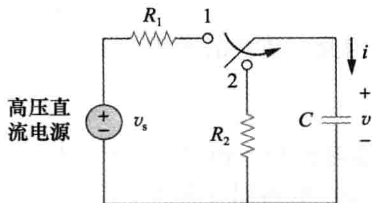
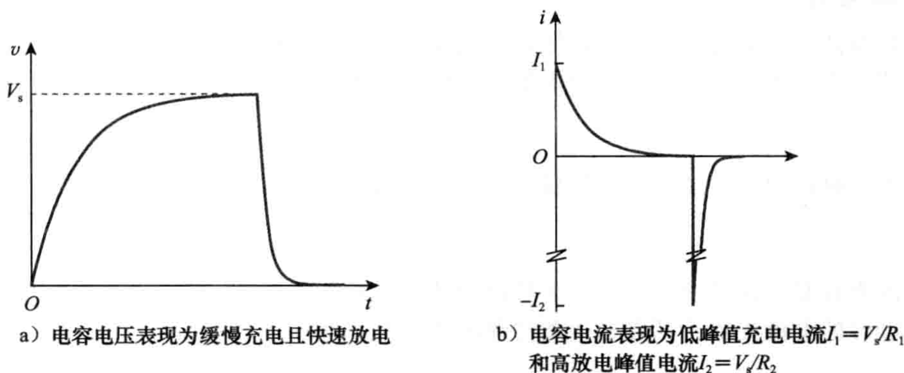


图 9-48　闪光灯单元电路，在位置 1 时慢速充电，在位置 2 时快速放电

$$t_{放电} = 5R_2C \tag{9-30}$$

因此，如图 9-48 所示，电路产生了短时高电流脉冲。类似的电路应用于电点焊以及雷达发射管中。



a）电容电压表现为缓慢充电且快速放电

b）电容电流表现为低峰值充电电流 $I_1=V_s/R_1$ 和高放电峰值电流 $I_2=V_s/R_2$

图 9-49　电容电压和电流变化曲线

例 9-14 某电子闪光灯电路中有一个 6kΩ 的限流电阻和一个 2000μF 的电解电容，已充电，电压为 240V。如果闪光灯电阻为 12Ω，求：

(a) 峰值充电电流；

(b) 电容完全充电需要的时间；

(c) 峰值放电电流；

(d) 电容中储存的总能量；

(e) 闪光灯消耗的平均功率。

解： 使用如图 9-48 所示电路。

(a) 峰值充电电流为

$$I_1 = \frac{V_s}{R_1} = \frac{240}{6\times 10^3} = 40(\text{mA})$$

(b) 由式（9-29）可得

$$t_{充电} = 5R_1C = 5\times 6\times 10^3\times 2000\times 10^{-6} = 60\text{s} = 1(\text{min})$$

(c) 峰值放电电流为

$$I_2 = \frac{V_s}{R_2} = \frac{240}{12} = 20(\text{A})$$

(d) 储存的能量为

$$W = \frac{1}{2}CV_s^2 = \frac{1}{2}\times 2000\times 10^{-6}\times 240^2 = 57.6(\text{J})$$

(e) 电容储存的能量在放电过程中被闪光灯消耗了，由式(9-30)，可得

$$t_{放电} = 5R_2C = 5 \times 12 \times 2000 \times 10^{-6} = 0.12(\mathrm{s})$$

因此，消耗的平均功率为

$$P = \frac{W}{t_{放电}} = \frac{57.6}{0.12} = 480(\mathrm{W})$$

◀

练习 9-14 相机的闪光灯单元中电容为 2mF，已充电，电压为 80V。

(a) 电容拥有多少电荷量？

(b) 电容中储存了多少能量？

(c) 如果闪光灯在 0.8ms 内点亮，闪光管中流过的平均电流是多少？

(d) 提供给闪光管的功率是多少？

(e) 照完一张照片，电容需要再次充电，电源提供的最大电流为 5mA，电容充电需要多长时间？ **答案：**(a) 0.16C；(b) 6.4J；(c) 200A；(d) 8kW；(e) 32s

9.11 本章小结

1) 电容含有两个（或更多）并行极板，极板间由电介质材料隔开。

2) 电容器的电容为其单个极板上的电量与极板间电压的比值。

$$C = \frac{Q}{V}$$

3) 电容在其极板间的电场中储存能量。对于任一给定时间，电容储存的能力为

$$W = \frac{1}{2}CV^2$$

4) 电容的串联和并联的合并方式与电导的合并方式相同。

5) 流经电容的电流正比于其端电压随时间的变化率，即

$$i = C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

6) 如果电容的端电压保持恒定，则流经电容的电流为零。因此，电容对于直流源相当于开路。

7) 电容端电压不能瞬时发生改变。

8) 电容充电和放电遵循指数函数曲线。自然响应（本例中的放电方程）的形式为

$$v_C(t) = V_0\mathrm{e}^{-t/\tau}, \quad \tau = RC$$

其中 V_0 为初始电压，τ 为时间常数，即响应衰减为初值的 1/e 所需要的时间。

9) 排除电路中的电容故障是一门需要通过具体实践才能够进步的技术。

10) RC 电路可以用 PSipce 和 Multisim 进行分析。

11) 本章中介绍了两个应用电路实例：延迟电路和闪光灯单元。

复习题

1 当 5mF 电容连接到 120V 的电压源时，其电荷量为多少？

(a) 600mC (b) 300mC

(c) 24mC (d) 12mC

2 电容的计量单位为

(a) 库仑 (b) 焦耳

(c) 亨利 (d) 法拉

3 当电容储存的总电荷量翻倍时，其储存的能量

(a) 保持不变 (b) 减半

(c) 翻倍 (d) 四倍

4 有极性陶瓷电容不存在

(a) 正确 (b) 错误

5 如图 9-50 所示的电压波形是否可以为电容的端电压波形？

(a) 是 (b) 否

6 2 个 40mF 电容串联，然后再与一个 4mF 的电容并联，那么总电容为

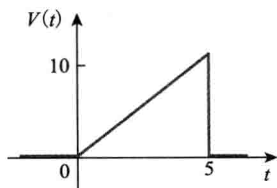


图 9-50　复习题 5 的电路图

(a) 3.8mF　　(b) 5mF
(c) 24mF　　(d) 44mF
(e) 84mF

7 并行极板电容的电容增长会由于
(a) 减小电介质常数
(b) 减小极板面积
(c) 减小间距
(d) 减少每个极板的电荷量

8 某 RC 电路中 $R=2\Omega$、$C=4\text{F}$。则时间常数为
(a) 0.5s　　(b) 2s
(c) 4s　　(d) 8s
(e) 15s

9 RC 电路中电容已经充电，其中 $R=2\Omega$ 且 $C=4\text{F}$。电容电压达到其稳态值的 63.2%需要的时间为
(a) 2S　　(b) 4S
(c) 8S　　(d) 16S
(e) 0V

10 如图 9-51 所示电路，电容电压在 $t=0$ 之前的时刻为：
(a) 10V　　(b) 7V
(c) 6V　　(d) 4V
(e) 0V

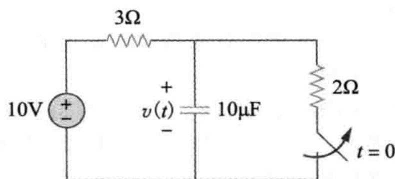


图 9-51　复习题 10 的电路图

答案： 1 (a)，2 (d)，3 (d)，4 (a)，5 (b)，6 (c)，7 (c)，8 (d)，9 (c)，10 (d)

习题

9.1 节

1 (a) 将 268pF 转换为 μF；
(b) 将 0.045μF 转换为 pF；
(c) 将 0.0024F 转换为 pF。

2 (a) 已知 $C=2\mu\text{F}$ 且 $V=100\text{V}$，求电容储存的电荷量。
(b) 已知 $C=40\mu\text{F}$ 且 $Q=30\text{mC}$，求电容电压。
(c) 若 $Q=5\text{mC}$，$V=2\text{kV}$，求电容。

3 某 20μF 的电容极板上拥有 450μC 的电荷量，求电容的端电压。

4 求以下每个电容的电荷量和储存的能量：
(a) 5μF 电容，$V=20\text{V}$。
(b) 6nF 电容，$V=9\text{V}$。

5 某平板电容，极板间加压 30V 时，电容的电荷量为 450μC。求该电容器的电容。

6 某 20mF 电容的端电压为 12V，计算电容储存的能量。

7 两个相同的电容，第二个电容的充电电压为第一个电容的五倍。比较两个电容储存的能量。

8 2μC 的电荷量使得电容的电势差上升到了 100V。(a) 求电容器的电容；(b) 求要使电压下降到 20V 需要转移多少电荷量；(c) 电荷量增长到 4μC 时，电容两端的电势差为多少？

9.3 节

9 一个陶瓷平板电容每个极板的面积为 0.2m²，且极板间距为 0.5mm。计算电容。

10 计算平板电容器的电容，当每个极板面积为 40cm²，板间距为 0.25mm，且电介质为
(a) 空气　　(b) 云母
(c) 陶瓷

11 平板电容的极板面积为 0.02m²，极板间距为 1cm，极板间的电介质为云母。如果该电容器极板间添加 120V 的电压，求：
(a) 电容
(b) 极板间的电场强度
(c) 每个极板上的电荷量

12 电容每个极板上的电荷量为 56μC。如果电通量密度为 2mC/m²，求极板面积。

13 求电容内的电场强度，若极板间电压为 75V，电介质厚度为 0.2mm。

14 某平板电容尺寸为 1.2cm×1.6cm，极板间距为 0.15nm。如果极板被云母隔开，计算电容。

15 某电容的电介质为空气时，其电容为 4μF。

而当该电容极板间填充某电介质材料时，它的电容变为 12μF。求该电介质材料的电介质常数。

16　空气电容器的电容为 10nF。如果极板间距增长为原来的两倍，且极板间用云母（$\varepsilon_r=5.0$）作为电介质，求电容器的新电容。

17　两个相同的平板电容器 C_1 和 C_2，其中 C_1 为空气介质，C_2 为磁介质。比较两个电容器的电容。

18　某 5μF 的电容由铝箔卷成，中间用 0.2mm 厚的干燥纸质隔开。计算每层铝箔的面积。

9.5 节

19　四个 30mF 的电容连接时的总电容为多少：(a) 并联；(b) 串联？

20　两个电容（20μF 和 30μF）连接到 100V 的电源上。求每个电容存储的能量，电容连接方式分别为 (a) 并联；(b) 串联。

21　如图 9-52 所示电路中 *a*-*b* 两端之间的等效电容为 30μF。计算 *C* 的值。

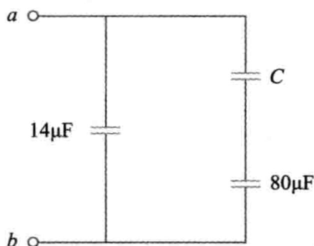


图 9-52　习题 21 的电路图

22　如图 9-53 所示，求每个电路的等效电容。

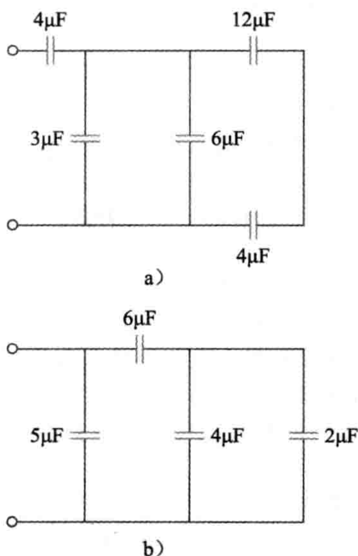


图 9-53　习题 22 的电路图

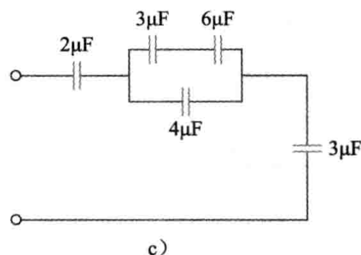


图 9-53 （续）

23　求如图 9-54 所示电路的 C_{eq}。

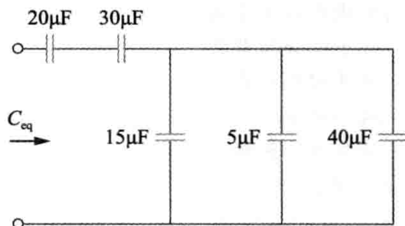


图 9-54　习题 23 的电路图

24　求如图 9-55 所示电路中 *a*-*b* 两端的等效电容。所有的电容单位均为 μF。

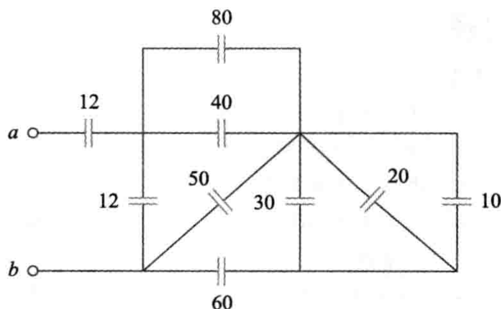


图 9-55　习题 24 的电路图

25　计算如图 9-56 所示电路的等效电容，图中所有电容单位均为 mF。

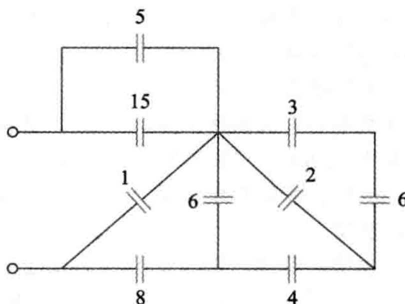


图 9-56　习题 25 的电路图

26　电路如图 9-57 所示，求 (a) 每个电容的端电压；(b) 每个电容储存的能量。

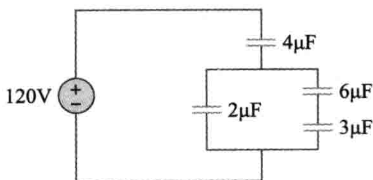


图 9-57 习题 26 的电路图

27 三个电容 $C_1=5\mu F$，$C_2=10\mu F$，$C_3=20\mu F$ 相并联，两端连接一个 150V 的电源。试求：(a) 总电容；(b) 每个电容的电荷量；(c) 并联电路中储存的总能量。

28 习题 27 中的三个电容与 200V 电源相串联。计算：(a) 总电容；(b) 每个电容的电荷量；(c) 串联电路中储存的总能量。

29 一个 $20\mu F$ 的电容和一个 $50\mu F$ 的电容与一个 200V 的电压源相并联。(a) 求总的电容；(b) 求每个电容储存的电荷量的幅度；(c) 计算每个电容的端电压。

30 如图 9-58 所示，$10\mu F$ 的电容的端电压为 20V。(a) 电压源 V_s 是多少？(b) 求电容的总电荷量。

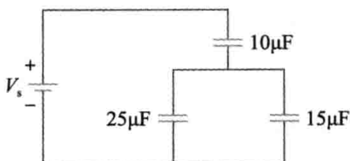


图 9-58 习题 30 的电路图

31 三个电容器相串联，等效电容为 2.4nF。如果 $C_1=2C_2$，且 $C_3=10C_1$，求 C_1、C_2 和 C_3 的值。

32 一个 $10\mu F$、$40\mu F$ 和 $60\mu F$ 的电容以及一个 120V 的电源组成的一个串联电路。计算 $40\mu F$ 电容的端电压。

33 求如图 9-59 所示电路中串联-并联的电容的等效电容。

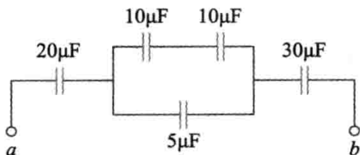


图 9-59 习题 33 的电路图

34 如图 9-60 所示，A 端和 B 端之间连接一个 120V 的直流电源。求电容中储存的总能量。

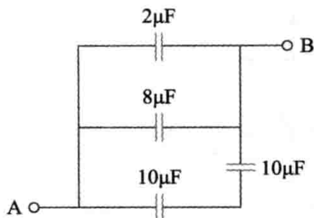


图 9-60 习题 34 的电路图

35 计算如图 9-61 所示电路的等效电容。

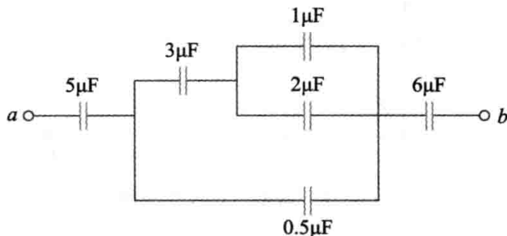


图 9-61 习题 35 的电路图

36 某 $80\mu F$ 的电容器与 $40\mu F$ 的电容相并联，再与 $30\mu F$ 的电容串联。(a) 求总电容；(b) 若 24V 的电源连接到以上的串联电容中，计算每个电容的端电压。

9.6 节

37 在 5s 内，40mF 电容的端电压由 160V 上升到 220V。计算流经电容的平均电流。

38 如果在某 $20\mu F$ 的电容两端连接电压源，波形如图 9-62 所示，试求流经电容的电流 $i(t)$。

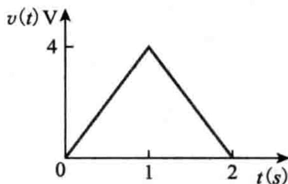


图 9-62 习题 38 的电路图

39 某 $20\mu F$ 的电容与某 $40\mu F$ 的电容，且端接一个随时间变化的电压源。如果在某一瞬间电源提供的总电流为 5A，那么每个电容的瞬时电流是多少？

40 某 $30\mu F$ 的电容的端电压波形如图 9-63 所示。画出流过其的电流波形。

41 某 2mF 的电容的电压波形如图 9-64 所示。求流经电容的电流波形。

42 求如图 9-65 所示电路在直流条件下，电容的端电压。

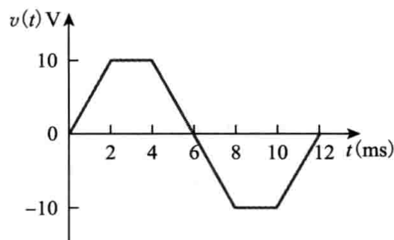


图 9-63 习题 40 的电路图

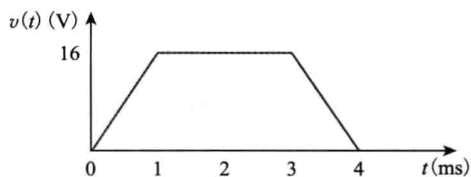


图 9-64 习题 41 的电路图

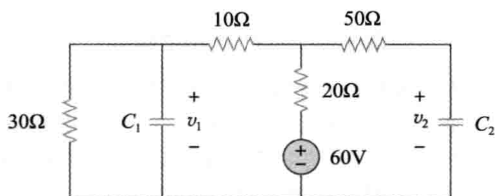


图 9-65 习题 42 的电路图

43 100μF 电容上的端电压如图 9-66 所示。求流过该电容的电流 $i(t)$。

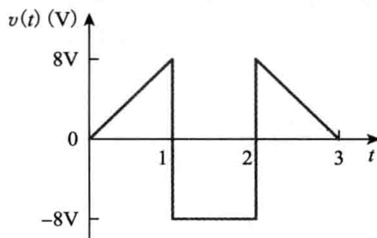


图 9-66 习题 43 的电路图

9.7 节

44 求如图 9-67 所示 RC 电路的时间常数。

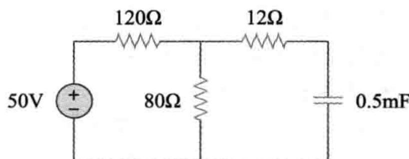


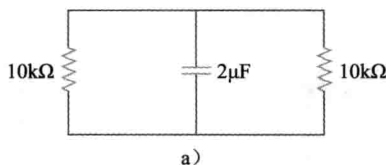
图 9-67 习题 44 的电路图

45 求如图 9-68 所示每个电路的时间常数。

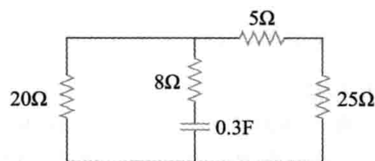
46 计算以下每个 RC 电路的时间常数：

(a) $R=56\Omega$，$C=2\mu F$；

(b) $R=6.4M\Omega$，$C=50pF$。



a）



b）

图 9-68 习题 45 的电路图

47 如图 9-69 所示电路中的开关已经闭合了很长时间，且在 $t=0$ 时打开。求 $t\geqslant 0$ 时$v(t)$。

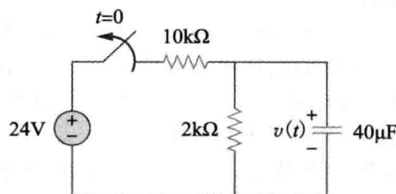


图 9-69 习题 47 和习题 67 的电路图

48 考虑如图 9-70 所示电路 $v(t)=10e^{-4t}$V 且 $i(t)=0.2e^{-4t}$A，$t>0$。

(a) 求 R 和 C；

(b) 求电路的时间常数。

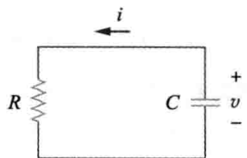


图 9-70 习题 48 的电路图

49 在如图 9-71 所示电路中，$v(0)=20$V。求 $t>0$时 $v(t)$。

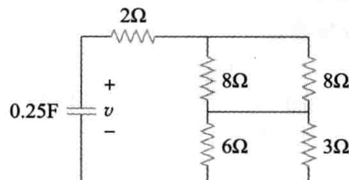


图 9-71 习题 49 的电路图

50 已知 $i(0)=3$A，求 $t>0$ 时如图 9-72 所示电路中的 $i(t)$。

51 如图 9-73，开关在 $t=0$ 时闭合。求 $t>0$ 时的 $v_C(t)$ 和 $i_C(t)$。

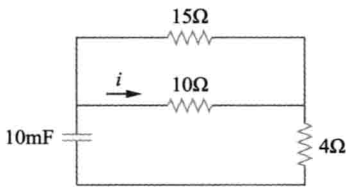


图 9-72　习题 50 的电路图

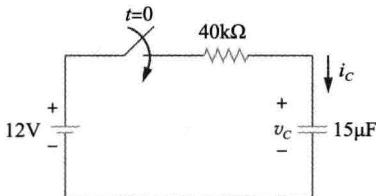


图 9-73　习题 51 的电路图

52　如图 9-74，开关处于 1 处已经过了很长时间。如果在 $t=0$ 时将开关打到 2 处，求 v_C 和 i_C。

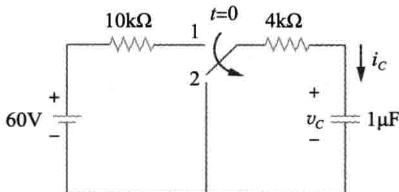


图 9-74　习题 52 的电路图

53　电路如图 9-75，开关已经打开很长时间，在 $t=0$ 时刻开关闭合。写出 v_C 的表达式。

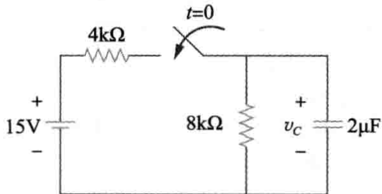


图 9-75　习题 53 的电路图

54　500pF 的电容通过 200kΩ 电阻放电，电容电压由 120V 下降到 80V 需要多长时间？

55　求 40μF 的电容通过 100kΩ 电阻进行放电，电容电压由 40V 下降到 10V 需要多长时间。

56　1nF 的电容和 200kΩ 的电阻与 80V 的直流电源相串联。电容由 0 充电到 40V 需要多长时间？

57　如图 9-76 所示电路，求开关闭合后，电容放电到 20V 需要经过的时间。

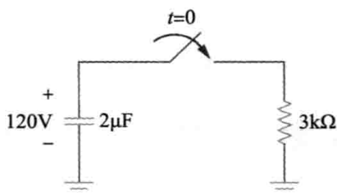


图 9-76　习题 57 的电路图

58　2μF 的电容与 6MΩ 的电阻以及 24V 的干电池相串联。如果电容在 $t=0$ 时未充电，求：(a) 时间常数；(b) $t=34\text{s}$ 时电荷量与最终电荷量的比值；(c) $t=34\text{s}$ 时电流与初始电流的比值。

59　电路如图 9-77 用来对两个电容充电。求：(a) 开关闭合很长时间之后每个电容的电荷量；(b) 开关闭合很长时间后每个电容的端电压；(c) 电荷量和电压达到终值的一半需要的时间。

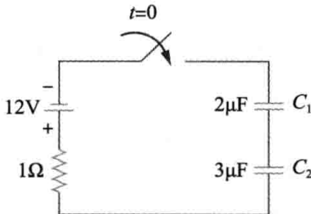


图 9-77　习题 59 的电路图

60　0.2μF 的电容电压初值为 $v_C(0)=10\text{V}$。$t>0$ 时，电容的端电压为 $v_C(t)=k\text{e}^{-\beta t}\text{V}$，流经电容的电流为 $i_C(t)=2\text{e}^{-\beta t}\text{mA}$。求常数 k 和 β 的值。

61　如图 9-78 所示电路中电容充电到 12V。开关打开后电容电压需要多长时间才能下降到零？

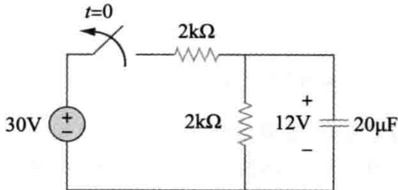


图 9-78　习题 61 的电路图

62　120nF 的电容与 400kΩ 电阻串联。求电容的充电时间。

9.8 节

63　使用 PSpice 求 $t>0$ 时的 $v(t)$，电路如图 9-79所示。

64　如图 9-80，开关在 $t=0$ 时由 A 端打到 B 端。用 PSpice 求 $t>0$ 时的 $v(t)$。

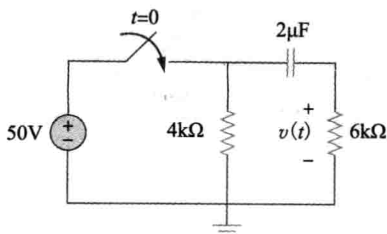


图 9-79 习题 63 的电路图

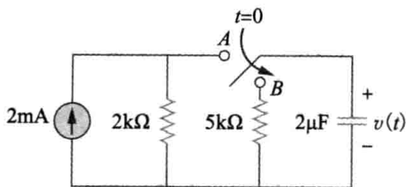


图 9-80 习题 64 的电路图

65 如图 9-81，用 PSpice 求 $t>0$ 时的 $v(t)$。

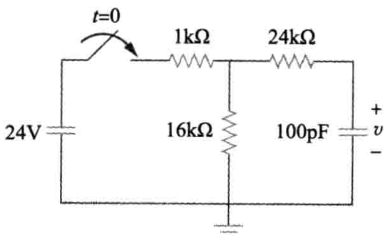


图 9-81 习题 65 的电路图

66 如图 9-82 所示，开关在 $t=0$ 时刻闭合。用 PSpice 求 $t>0$ 时的 $v(t)$。

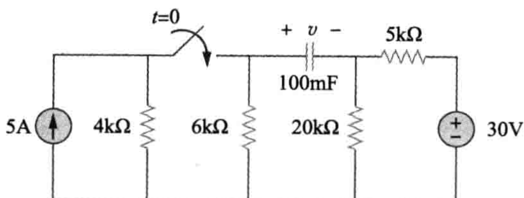


图 9-82 习题 66 的电路图

67 用 PSpice 求解习题 47。

68 如图 9-30（习题 9），用 Multisim 求 v_C。

69 用 Multisim 求如图 9-83 所示电路的 $v(t)$。

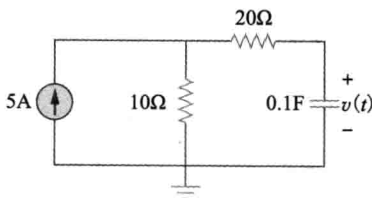


图 9-83 习题 69 的电路图

70 如图 9-84，电压源提供 0 到 10V 的方波信号，频率为 2000Hz。用 Multisim 求$v_o(t)$。

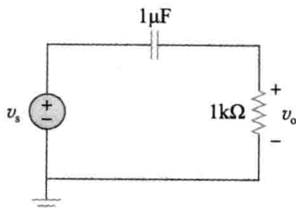


图 9-84 习题 70 的电路图

9.9 节

71 若你正使用欧姆表测试一个电容。在连接端子与电容并联时，发现读数移动到零且保持不变。电容可能出现了什么问题？

9.10 节

72 设计一个信号开关电路，其中 100μF 电容的时间常数需要设计为 3ms。电路需要的电阻为多少？

73 实验室有大量可用的 10μF 电容额定电压为 300V。设计一个 40μF 的电容组，使其额定电压为 600V，需要多少 10μF 的电容，你将怎样连接它们？

74 一个电容连接到直流电源时，它的电压在 4μs 内由 20V 上升到 35V，平均充电电流为 0.6A。求其电容的值。

75 在电容组由 10 个电容串并联而成。每串电容包含 8 个相串联的 1000μF 电容，每个电容充电为 100V。(a) 计算电容组的总电容；(b) 求电容组储存的总能量。

第10章
电　　感

婚姻就像围城：外面的人想进去；里面的人想出来。

——米歇尔·德·蒙田

历史人物

约瑟夫·亨利（Joseph Henry，1797—1878），美国物理学家，发现了电感并研制出电动机。

亨利生于纽约州的奥尔巴尼。他毕业于奥尔巴尼研究院，于1832～1846年在普林斯顿大学任教，讲授哲学，并且是史密森学会（Smithsonian Institution）的第一任会长。他在电磁学方面做了很多实验，研制出具有强大电磁力的能够举起数千磅重物的电磁体。有趣的是，约瑟夫·亨利在法拉第之前就发现了电磁感应现象，但却没有发表他的成果。电感的单位——亨利就是以他的名字命名的。



约瑟夫·亨利
(National Oceanic and Atmospheric Administration/Department of Commerce)

海因里希·楞次（Heinrich Lenz，1797—1878），俄国物理学家，发现了楞次定律，电磁学的基本定律。

楞次在多尔帕特（今爱沙尼亚共和国的塔尔都）出生并完成教育，在多尔帕特大学中学习了化学和物理学。1823～1826年他跟随俄国航海家O.E.柯且布完成了他的第三次环球科学考察。航行结束后，楞次在彼得堡大学任教并开始研究电磁学。经过反复多次的实验，楞次发现了电磁感应定律，定义了线圈感应电压的极性。1842年楞次独立于焦耳并更为精确地建立了电流与其所产生的热量的关系，后被称为焦耳定律。



海因里希·楞次
(AIP Emilio Segre Visual Archives, E. Scott Barr Collection)

10.1 引言

在本章之前已经介绍了两种无源元件：电阻和电容。本章将介绍第三种无源元件——电感。电感是一种在其磁场中储存能量的电子元件。电感是一种简单的电子元件——其最简单的形式仅仅是一个金属线圈。不过，这也说明由于金属线圈具有电磁特性，它能够做一些非常有意思的事情。电感被广泛应用于模拟电路中，虽然在实际应用中电感没有电容

那么常用，但是在高频电路中电感是很常见的。但由于电感很难制作于芯片中，因此在集成电路（integrated circuit，IC）中应用的很少。

本章将介绍基于法拉第定律和楞次定律的电磁感应；电感的储能特性；分析电感的种类以及多个电感的并联和串联；分析 RL 电路（包含电感和电阻的电路）及如何利用 PSpice 软件对其进行模拟和仿真；以继电器和汽车点火电路为例讨论电感的典型应用。

10.2 电磁感应

磁体周围存在着磁场，磁场可以认为是包含了力场线或者通量线，磁力的吸引和排斥都是沿着磁力线来进行的。当磁通量通过线圈或者导体时会产生感应电动势，这就是电磁感应现象（electromagnetic induction）。迈克尔·法拉第和约瑟夫·亨利各自都发现当导体周围的磁通量发生变化时，就会在该导体两端产生感应电压。由此得出了法拉第定律：

法拉第定律表明电路中产生的感应电压与电路中磁通量的变化率成正比。

数学表述式为

$$v = N\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = N \times 磁通量变化率 \tag{10-1}$$

其中，v=感应电压，单位为伏特（V）；N 表示线圈的匝数；$\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t$ 表示磁通量的变化率，单位为韦伯每秒（Wb/s）。如图 10-1 所示，只有当线圈中的磁通量变化时，线圈中才会产生感应电动势，也即 $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t \neq 0$。当磁通量不随时间变化时，则 $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t \neq 0$ 且 $v=0$。

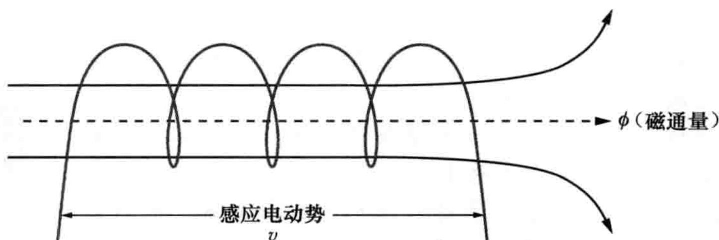


图 10-1 外部产生的磁通量与 N 匝线圈相交链

感应电动势的极性和感应电流的方向由楞次定律来确定：

楞次定律表明感应电流总是产生一个阻碍引起该电流变化的磁通量。

法拉第定律可以确定感应电动势的幅度，楞次定律可以确定其极性。

例 10-1 某线圈处于变化率为 30mWb/s 的磁场中，匝数为 20，试求线圈产生的感应电压。

解：

$$v = N\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = N \times 磁通量变化率 = 200 \times 30 \times 10^{-3} = 6(\mathrm{V})$$ ◀

练习 10-1 某线圈的磁通量在 2 秒内从 0 变化到 40mWb。若产生的感应电压为 2.5V，试求线圈的匝数。 **答案：** 125

10.3 电感简介

电感是能够在自身的磁场中储存能量的无源元件。电感在电子和电力系统中有许多应用，例如它可以用于供电电源、变压器、收音机、电视机、雷达以及电动机中。

任何电流导体都具有电磁感应特性，均可看成是电感。不过为了加强其电磁效应，实际的电感通常由许多圈金属导线绕成圆柱形线圈组成，如图 10-2 所示。所以，

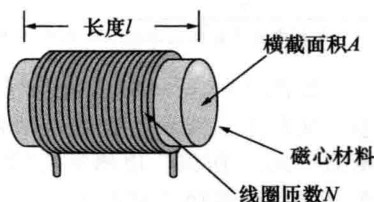


图 10-2 电感的典型形式

电感是由金属导线缠绕在磁心上所构成，其磁心可以为空气或者某些磁性材料。

(该定义适用于大多数电感，某些电感除外。) 电感符号看起来像是一卷线圈，如图 10-3 所示。


图 10-3 理想电感的电路符号

如果有电流通过电感，则电感两端的电压与电流对时间的变化率呈正比。根据无源符号规则[㊀]，电感器两端的电压可由下式得到：

$$\boxed{v = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = L \times \text{电流变化率}} \tag{10-2}$$

其中，L 为比例常数，称为电感器[㊁]的电感 (inductance)。$\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ 为流经电感的电流对时间的瞬时变化率。电感的单位是亨利 (henry，H)，是为纪念美国发明家约瑟夫·亨利 (1797—1878) 而以他的名字命名的。

电感是电感器阻碍流经其电流的变化能力的度量，单位为亨利 (H)。

电感器的电感取决于它的物理尺度与结构。由电磁场理论可以推导出不同形状电感器的电感计算公式，也可以从电子工程手册中查阅。例如，对于图 10-2 所示的电感 (螺线管线圈电感[㊂])，其电感为：

$$L = \frac{\mu_0 \mu_r N^2 A}{l} \tag{10-3}$$

其中，

N=线圈匝数

l=螺线管的长度，单位为米

A=横截面积，单位为平方米

μ_0=空气或者真空的磁导率$=4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{H/m}$

μ_r=磁心的相对磁导率

磁导率 ($\mu=\mu_0\mu_r$) 反映了磁性材料提供磁通量的能力。换言之，是描述在磁性材料中建立磁通量难易程度的材料特性。相对磁导率 (μ_r) 为材料磁导率 (μ) 与真空磁导率 (μ_r) 的比值。对于空气和非磁性材料如铜、金以及银，其相对磁导率 $\mu_r=1$。表 10-1 给出了一些常用材料的相对磁导率的值。由式 (10-3) 可见，增加线圈匝数、选用高磁导率的材料作为磁心、扩大螺线管的横截面积、缩短线圈长度都能够增加电感量。

㊀ 注意：由式 (10-2) 可以看出，电感两端要存在电压，则其电流必须随时间变化。因此，当电感流过恒定电流时，其电压 $v=0$。

㊁ 注意：电压 v 和电流变化率 $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ 都是瞬时 (instantaneous) 的：这表示与特定的时间点相关，因此采用斜体 v 和 i。

㊂ 注意：螺线管线圈电感是由金属导线缠绕在金属磁心上 (见图 10-2) 构成。当电流流过该线圈时，在线圈周围就会产生磁场。螺线管线圈电感实际应用非常广泛。

表 10-1 一些常用材料的相对磁导率*

材料	相对磁导率（μ_r）	材料	相对磁导率（μ_r）
空气	1	软铁	5000
钴	250	硅钢	7000
镍	600	非磁性材料	1

*表中给出的值为典型值，但由于大多数材料有很多不同的种类，所以该值会因材料产地的不同而异。

如图 10-3 所示的电路符号中假定电感为理想电感。与电容类似，电感也不是理想状态。实际上，线圈由金属导线制成，因此会具有非常小且有限的电阻（R_w）所以，电感的实际等效模型如图 10-4 所示。同时，由于导电线圈各匝之间被隔开，所以会存在一个小的寄生电容（C_s）如图 10-4 所示。除非明确提出，否则 R_w 和 C_s 都可以忽略不计。只有在超高频应用时 C_s 才会显得非常重要。本书中假定电感为理想电感。

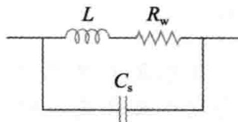


图 10-4 实际电感器的电路符号

例 10-2 流经某 100mH 电感的电流在 2ms 内由 300mA 变化到 500mA，试求该电感两端的电压。

解： 由于，$v=L\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ 且 $L=100\mathrm{mH}=0.1\mathrm{H}$，所以有

$$v=0.1\times\frac{(500-300)\times10^{-3}}{2\times10^{-3}}=10(\mathrm{V})$$ ◀

练习 10-2 如果某 2mH 线圈的电流在 0.4s 内由 0 上升到 8A，试求其感应电压。

答案： 40mV

例 10-3 某空气介质螺线管线圈的直径为 1.2cm，长度为 18cm。如果其匝数为 500，试计算其电感。假定空气磁导率为 $4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{H/m}$。

解： 线圈的面积可得

$$A=\pi(d/2)^2=\pi(0.6\times10^{-2})^2=1.131\times10^{-4}\,\mathrm{m}^2$$

由于螺线管线圈的磁心为空气，其磁导率等于真空的磁导率。因此，有

$$L=\frac{N^2\mu A}{l}=\frac{500^2\times4\pi\times10^{-7}\times1.131\times10^{-4}}{18\times10^{-2}}=0.1974(\mathrm{mH})$$ ◀

练习 10-3 某电感长为 15cm，匝数为 40，横截面积为 $0.02\mathrm{cm}^2$，磁导率为 $0.3\times10^{-4}\,\mathrm{H/m}$，试求其电感。

答案： 6.4mH

10.4 能量存储和直流稳态

电感会在其磁场中储存能量。要求电感储存的能量（$W=Pt=vit$），先假定电感电流线性增长，且令流经电感的终值电流为 I_m。所以电流由 0 到 I_m 的平均值为 $0.5I_m$。因此，有：

$$W=v\times0.5I_m\times t \tag{10-4}$$

而由式（10-2），

$$v=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=L\times\text{电流变化率}$$

由于电流的变化率为常数，即

$$v=L\times\frac{I_m}{t}$$

将该式代入式（10-4），可得电感储存的能量为

$$W=L\times\frac{I_m}{t}\times0.5I_m\times t$$

即

$$\boxed{W = \frac{1}{2}LI_{\mathrm{m}}^2} \tag{10-5}$$

应该掌握电感的如下重要性质：

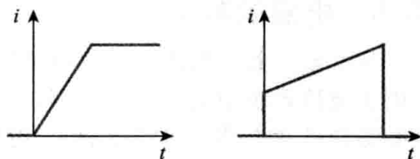
1）由式（10-2）可知，当电流恒定时，电感两端的电压为零，因此，在稳态情况下：

电感对直流电而言是短路的。

2）电感的一个重要特性是阻止流经它的电流变化。即

流经电感的电流是不能突变的。

根据式（10-2），当电压无穷大时，流经电感电流会不连续变化，这在实际中是不可能的，因此，电感会阻止流经它的电流发生突变。例如，流经电感的电流可以具有如图 10-5a 所示的形式，但不能具有如图 10-5b 所示的不连续形式。然而，电感两端的电压是可以突变的。



a）允许的电流形式　b）不允许的电流形式

图 10-5　流经电感器的电流

注意：电流突变是不可能的。

3）与理想电容一样，理想电感也不消耗能量。电感中所储存的能量可供以后提取使用。当在其磁场中存储能量时，电感从电路中吸收功率，当释放之前所存储的能量时，电感又会给电路提供功率。

4）实际的非理想电感含有一个非常重要的电阻性元件和电容性元件，如图 10-4 所示。

例 10-4 考虑如图 10-6a 所示的电路。在直流条件下，试求：(a) i，v_C 与 i_L；(b) 在电容和电感中存储的能量。

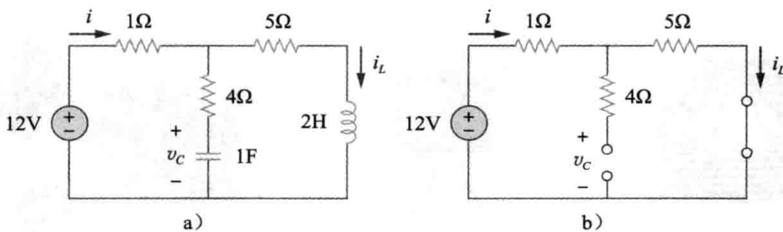


图 10-6　例 10-4 的电路原理图

解：(a) 在直流条件下，用开路代替电容，用短路代替电感，得到如图 10-6b 所示的电路。由图 10-6b 易知，

$$i = i_L = \frac{12}{1+5} = 2(\mathrm{A})$$

电压 v_C 与 5Ω 电阻两端的电压相同，因此，

$$v_C = 5i = 10(\mathrm{V})$$

(b) 电容中所存储的能量为

$$W_C = \frac{1}{2}Cv_C^2 = \frac{1}{2} \times 1 \times 10^2 = 50(\mathrm{J})$$

电感中所存储的能量为

$$W_L = \frac{1}{2}Li_L^2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 2^2 = 4(\text{J})$$ ◀

练习 10-4 试确定图 10-7 所示电路在直流条件下的 v_C，i_L 以及电容和电感中所存储的能量。

答案： 3V；3A；9J；1.125J

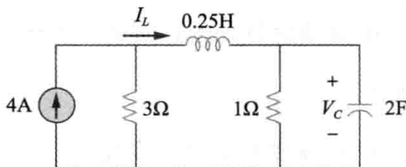


图 10-7 练习 10-4 的电路原理图

10.5 电感的种类

与电容类似，商用电感也有不同电感量和不同类型之分。实际电感的典型电感量通常从用于通信系统中的几微亨（μH）到用于电力系统中的几十亨利（H）。电感可以分为固定电感和可变电感（可调电感），电路符号如图 10-8 所示。固定电感和可变电感都可按照使用的磁心材料不同来分类，常用的磁心材料有空气、铁或者铁氧体，磁心的电路符号如图 10-9 所示。采用层间绝缘的复合钢板作为磁心可使漏磁最小化。磁心的选择取决于具体的应用以及电感的频率范围。铁心电感具有很大的电感且常用于音频或者电力供给应用中，电感通常为几亨利。空心电感或者铁氧体电感常用于射频应用中，常见电感为几微亨。电感也可以称为电感线圈（coil）或扼流圈（choke）。常见的电感如图 10-10 所示，实验室类型的电感按十进箱（decade box）的形式制作，与精密电阻器、电感和电容类似，数值按照 10 的倍数变化。



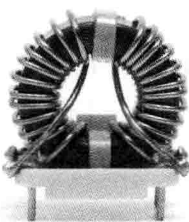
a）固定电感　b）可变电感

图 10-8 电路符号



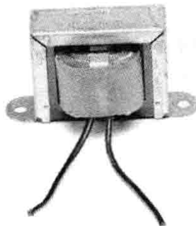
a）空心电感　b）铁心电感　c）铁氧体电感

图 10-9 电感的电路符号



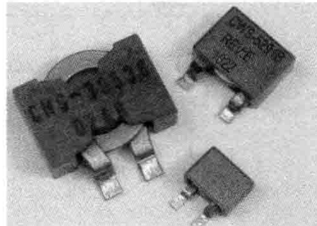
a）螺线管线圈电感

（© GIPhotoStock/ Photo Researchers）



b）铁心电感

（© The McGraw-Hill Companies, Inc./Cindy Schroeder,photographer）



c）贴片电感

（© Photo courtesy of Coil Winding Specialists,Inc.）

图 10-10 不同类别的电感器

小型电感类似于电阻器经常采用色码标注。常用的标准值有：0.1、0.12、0.15、0.18、0.22 及 0.27μH 和 1、1.2、1.5、2.2、2.7H 等。

10.6 电感的串联与并联

在实际电路中会遇到电感的串联或者并联的情况，所以学习如何求取多个电感的串联或并联等效电路就显得十分重要。

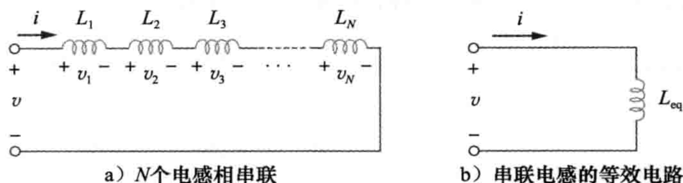
首先，考虑如图 10-11a 所示的 N 个电感串联的情况。其等效电路如图 10-11b 所示。

流经这些电感的电流是相同的，于是对图中回路应用KVL可得：

$$v = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_N \tag{10-6}$$

其中，$v_k = L_k \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$。电感的串联等效与电阻串联等效的方法完全相同。因而，有

$$\boxed{L_{eq} = L_1 + L_2 + L_3 + \cdots + L_N} \tag{10-7}$$



a）N个电感相串联　　b）串联电感的等效电路

图10-11　串联电感

因此，

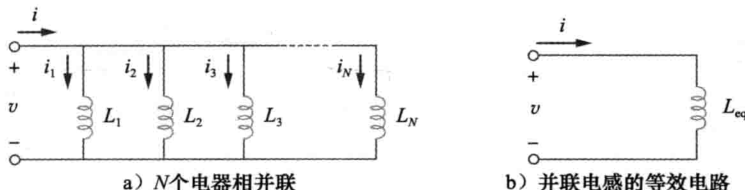
多个串联电感的等效电感等于各个电感之和。

由此可见，串联电感的合并方式与串联电阻的合并方式完全相同。L_k 的端电压相当于是电压分压器，即

$$v_k = \frac{L_k}{L_{eq}} v \tag{10-8}$$

下面考虑如图10-12a所示的 N 个电感并联的情况。其等效电路如图10-12b所示。各电感器两端具有相同的电压，应用KCL可得：

$$i = i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_N \tag{10-9}$$



a）N个电器相并联　　b）并联电感的等效电路

图10-12　并联电感

由于电感是并联，且其并联的合并方式与电阻并联合并方式完全相同，所以有

$$\boxed{\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \cdots + \frac{1}{L_N}} \tag{10-10}$$

对于两个并联电感（$N=2$）而言，式（10-10）变为

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$

即

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \tag{10-11}$$

注意：式（10-11）仅适用于两个电感的情况。

并联电感的等效电感等于各个电感倒数之和的倒数。

例10-5 试求图10-13所示电路的等效电感。

解： 10H，12H和20H的三个电感是串联的，因此可将它们合并为一个42H的电感。

该 42H 电感与 7H 电感又是并联的，可得合并后的电感为

$$\frac{7\times 42}{7+42}=6(\mathrm{H})$$

而该 6H 电感又与 4H 和 8H 电感相串联，所以，

$$L_{eq}=4+6+8=18(\mathrm{H})$$ ◀

练习 10-5 试计算图 10-14 所示电感阶梯网络的等效电感。 **答案：** 25mH

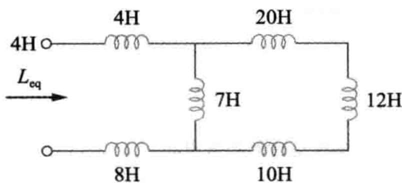


图 10-13 例 10-5 的电路图

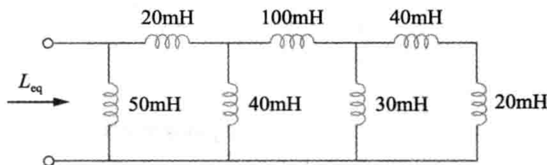


图 10-14 练习 10-5 的电路图

例 10-6 在如图 10-15 所示电路中，$i(t)=4(2-e^{-10t})$mA，如果 $i_2(0)=-1$mA，试求：(a) $i_1(0)$；(b) L_{eq}。

解： (a) 由 $i(t)=4(2-e^{-10t})$mA 可得 $i(0)=4(2-1)=4$mA。由于 $i=i_1+i_2$，所以，

$$i_1(0)=i(0)-i_2(0)=4-(-1)=5(\mathrm{mA})$$

(b) 等效电感为

$$L_{eq}=2+4\,/\!/\,12=2+3=5(\mathrm{H})$$ ◀

练习 10-6 在如图 10-16 所示电路中，$i_1(t)=0.6e^{-2t}$A，如果 $i(0)=1.4$A，试求 $i_2(0)$。 **答案：** 0.8A

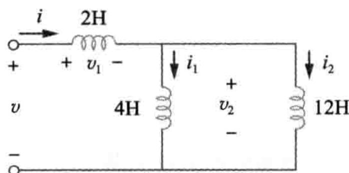


图 10-15 例 10-6 的电路原理图

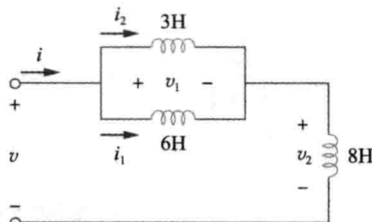


图 10-16 练习 10-6 的电路原理图

10.7 *RL* 暂态电路

RL 电路是只包含电阻和电感的电路。典型的 *RL* 电路由一个电阻和一个电感的串联组成，如图 10-17 所示。下面，来确定电路的响应。假定该响应即为流经电感的电流$i(t)$，以强化电感电流不能够突变这个概念。在 $t=0$ 时，电感的初始电流为 I_0，即

$$i(0)=I_0 \tag{10-12}$$

对图 10-17 所示的闭合回路应用 KVL

$$v_L+v_R=0 \tag{10-13}$$

然后用微分表达式表示流过 *RL* 电路的电流

$$i(t)=I_0e^{-Rt/L} \tag{10-14}$$

该式表示 *RL* 电路的自由响应是由初始电流开始以指数形式衰减。电流响应在图 10-18 中给出。由式 (10-14) 可以证明 *RL* 电路的时间常数[⊖]为

⊖ 注意，电路的时间常数 τ 越小，响应衰减的速度越快。反之，时间常数越大，则响应的衰减速度越慢。对于任意的衰减速度，响应在 5τ 之后都会衰减到其初始值的百分之一以下（即达到了稳态）。

$$\boxed{\tau = \frac{L}{R}} \tag{10-15}$$

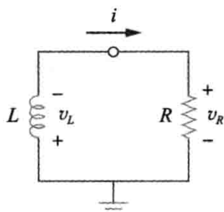


图 10-17　无源 RL 电路

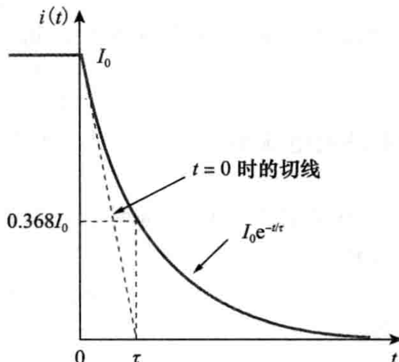


图 10-18　RL 电路的电流响应

> 小结
> 求解无源 RL 电路的关键：
> 1）求出流经电感的初始电流 $i(0)=I_0$。
> 2）求出电流的时间常数 τ。

其中 τ 的单位还是秒，而 R 的单位为欧姆，L 的单位为亨利。因此，式（10-14）可以写为

$$\boxed{i(t) = I_0 e^{-t/\tau}} \tag{10-16}$$

用式（10-16）表示的电流，可以得到电阻的端电压为

$$v_R(t) = iR = I_0 R e^{-t/\tau} \tag{10-17}$$

电感电流的响应 $i_L(t)=i(t)=i(0)e^{-t/\tau}$可由这两个参数得到。电感电流 i_L 确定后，其他变量（如电感电压 v_L 电阻电压 v_R，和电阻电流 i_R）就可以得到了。注意，在通常情况下，式（10-17)中的 R 为从电感两端来看的戴维南等效电阻[⊖]。

例 10-7　如图 10-19 所示电路中的开关已经闭合很长一段时间。在 $t=0$ 时，开关打开。试计算 $t>0$ 时$i(t)$。

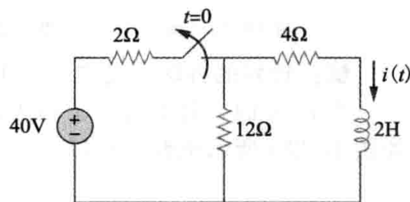


图 10-19　例 10-7 的电路图

解：当 $t>0$ 时，开关闭合，由于电路已经达到稳态，此时电感对于直流相当于短路，得到如图 10-20a 所示电路。要得到图 10-20a 中的 i_1，先将并联的 4Ω 和 12Ω 电阻合并得到

$$\frac{4\times12}{4+12} = 3(\Omega)$$

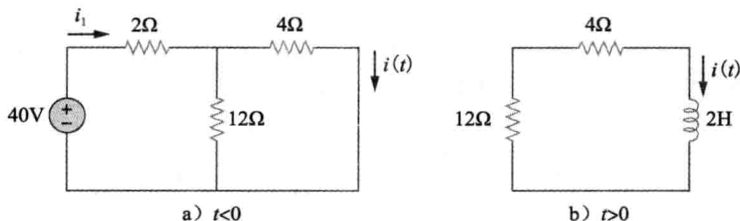


图 10-20　图 10-19 的求解电路图

⊖ 注意：当电路有一个单独的电感和多个电阻以及受控源时，可以从电感两端来看得到戴维南等效电阻，从而构成一个简单的 RL 电路。同样，戴维南等效定理也可以用于多个电感合并构成一个单独的等效电感的电路。

因此

$$i_1 = \frac{40}{2+3} = 8(\mathrm{A})$$

然后图 10-20a 中，利用分流原理由 i_1 得到 $i(t)$

$$i(t) = \frac{12}{12+4} i_1 = 6(\mathrm{A}), \quad t < 0$$

因为流过电感的电流不会发生突变，所以有

$$i(0) = 6\mathrm{A}$$

当 $t>0$ 时，开关打开，电压源断开，就得到了如图 10-20b 所示的无源 RL 电路。合并电阻，可以得到

$$R_{\mathrm{eq}} = 12 + 4 = 16(\Omega)$$

时间常数为

$$\tau = \frac{L}{R_{\mathrm{eq}}} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}(\mathrm{s})$$

因此

$$i(t) = i(0)\mathrm{e}^{-t/\tau} = 6\mathrm{e}^{-8t}(\mathrm{A})$$ ◀

练习 10-7 对图 10-21 所示电路，求 $t>0$ 时的 $i_0(t)$。 **答案：** $1.4118\mathrm{e}^{-3t}\mathrm{A}$，$t>0$

例 10-8 电路图如图 10-22 所示。假定开关已经打开很长时间，求在所有时间的 v_0 和 i。

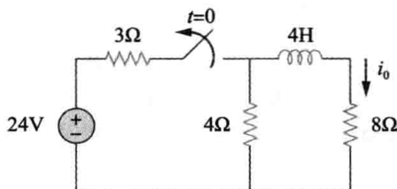


图 10-21 练习 10-7 的电路图

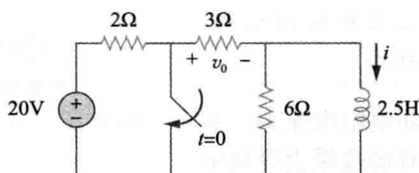


图 10-22 例 10-8 的电路图

解： 较好的方法，是先求得电感电流 i，然后再由它求取其他变量。

当 $t<0$ 时，开关打开。因为电感对于直流相当于短路，因此 6Ω 电阻被短路，可得到如图 10-23a 所示电路。所以

$$i(t) = \frac{20}{2+3} = 4(\mathrm{A}), \quad t < 0$$

$$v_0(t) = 3i(t) = 12(\mathrm{V}), \quad t < 0$$

因此有 $i(0)=4\mathrm{A}$。

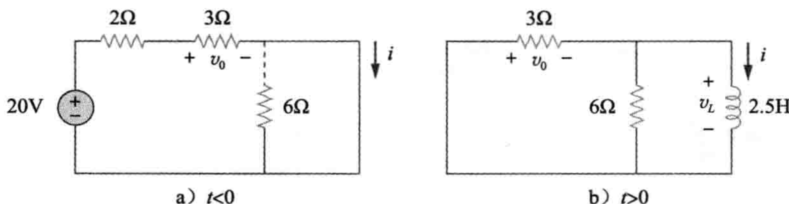


图 10-23 图 10-22 的求解电路图

当 $t>0$ 时，开关闭合，因而电压源短路，得到如图 10-23b 所示的无源 RL 电路。从电感两端来看

$$R_{\mathrm{Th}} = 3 \mathbin{/\!/} 6 = 2(\Omega)$$

得到时间常数

$$\tau = \frac{L}{R_{\mathrm{Th}}} = \frac{2.5}{2} = 1.25(\mathrm{s})$$

因此

$$i(t) = i(0)\mathrm{e}^{-t/\tau} = 4\mathrm{e}^{-t/1.25} = 4\mathrm{e}^{-0.8t}(\mathrm{A}), \quad t > 0$$

所以，对于所有时间有

$$i(t) = \begin{cases} 4\mathrm{A}, & t < 0 \\ 4\mathrm{e}^{-0.8t}\mathrm{A}, & t > 0 \end{cases}$$

这里注意电感电流在 $t=0$ 时是连续的，图 10-24 中给出了 $i(t)$ 的波形。◀

练习 10-8　电路如图 10-25 所示。假定开关已经闭合很长一段时间，确定该电路对于所有时间 t 的 $i(t)$。

答案：$i(t) = \begin{cases} 4\mathrm{A}, & t < 0 \\ 4\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{A}, & t > 0 \end{cases}$

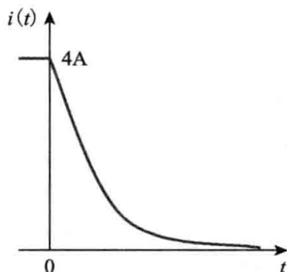


图 10-24　$i(t)$ 的图形

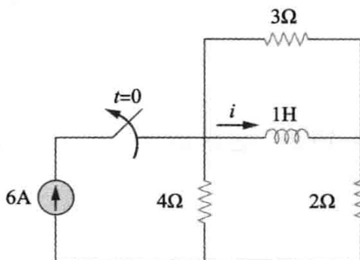


图 10-25　练习 10-25 的电路图

10.8 计算机分析

10.8.1 PSpice

如同 9.8 节中使用 PSpice 仿真 RC 电路一样，也可以使用 PSpice 仿真 RL 电路。PSpice 可以用于获取 RL 电路的暂态响应。附录 C 中的 C.4 节中给出了在 Winodws 中如何使用 PSpice 进行暂态分析的简介。读者在学习本节之前最好先回顾 C.4 节。

如果必要的话，首先使用直流 PSpice 分析确定初始条件。然后用这些初始条件。在 PSpice 暂态分析中获取暂态响应。在进行直流分析时，最好将所有的电感短路，当然这不是必须的。

例 10-9　使用 PSpice 求如图 10-26 所示电路在 $t>0$ 时的响应 $i(t)$。

解：使用 PSpice，首先画出电路原理图，如图 10-27 所示。然后命名闭合开关的部件名（part name）为 Sw_tclose。不需要指定电感的初始值，因为 PSpice 会由电路中确定。画完电路之后，选择 PSpice/New Simulation Profile，就会打开 New Simulation 对话框。输入 exam109 作为文件名，然后单击 Create，就会打开 Simulation Setting 对话框。

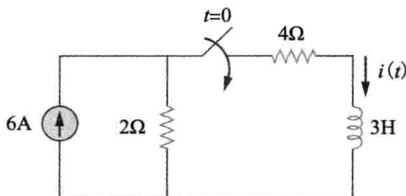


图 10-26　例 10-9 的电路图

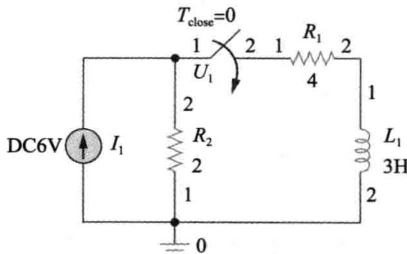


图 10-27　图 10-26 的电路原理图

在 Simulation Setting 中，在 Analysis Type 下选择 Time Domain（暂态），且在 Run to time 下选择 $5\tau=2.5\mathrm{s}$。单击 Apply 然后单击 OK 按钮。保存完电路之后，选择 PSpice/Run 来仿真电路。在弹出的窗口中，选择 Trace/Add Trace 且显示 I(L1) 作为电感上流过的电流。$i(t)$的图形如图 10-28 所示。

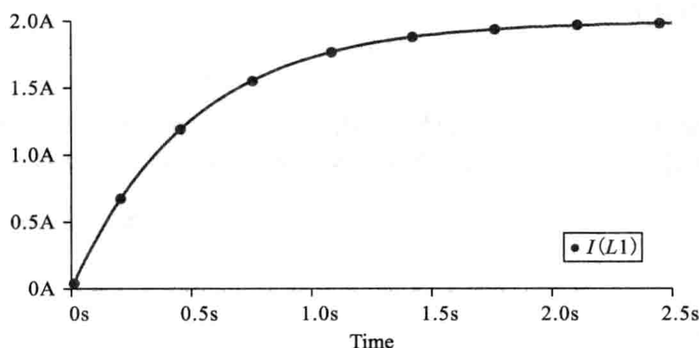


图 10-28 例 10-9，图 10-26 所示电路的响应 ◀

练习 10-9 电路如图 10-29 所示。开关已经打开很长时间，且在 $t=0$ 时闭合。用 PSpice 求 $i(t)$。

答案： $i(t)$ 的曲线如图 10-30 所示

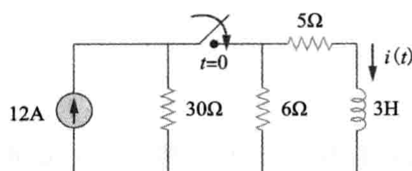


图 10-29 例 10-9 的电路图

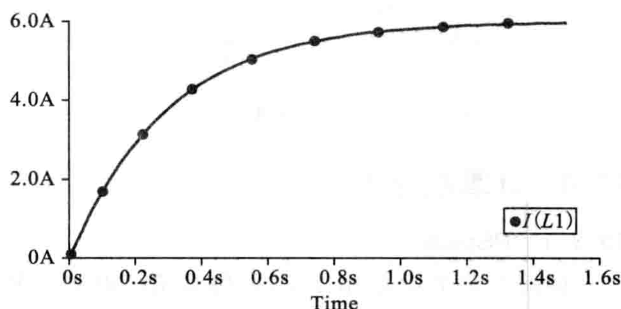


图 10-30 练习 10-9 的响应曲线

10.8.2 Multisim

与 9.7 节中仿真 RC 电路一样，Multisim 也可以用于仿真 RL 电路（建议在学习本节之前先阅读 D.3 节）。Multisim 的唯一问题是没有直接画出电流图形的方法，需要对相应的电压波形应用欧姆定律才能确定电流。

例 10-10 使用 Multisim 求图 10-31 所示电路的 v_0。

解： 首先创建如图 10-32 所示的电路。其中，时间常数为

$$\tau=\frac{L}{R}=\frac{10^{-3}}{2\times10^{3}}=0.5\mu\mathrm{s}$$

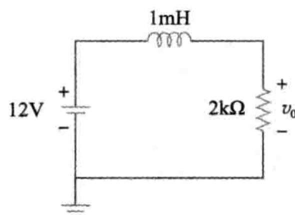


图 10-31 例 10-10 的电路图

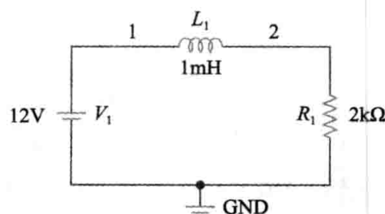


图 10-32 图 10-31 所示电路的仿真电路图

所以 $5\tau=2.5\mu\mathrm{s}$。选择 Simulation/Analyses/Transient Analysis，以输入模拟参数。

在打开的 Transient Analysis 对话框中，在 Initial Condition 下选择 Set to Zero。将 TSTART 设置为 0 或者 0.000001，且将 TSTOP 设置为 2.5μs 或者 0.0000025s。在 Output 中，将 $V(2)$ 从左边的列表移动到右边的列表，则仿真之后，节点 2 的电压即可以显示出来。最后，选择 Simulate。输出如图 10-33 所示。

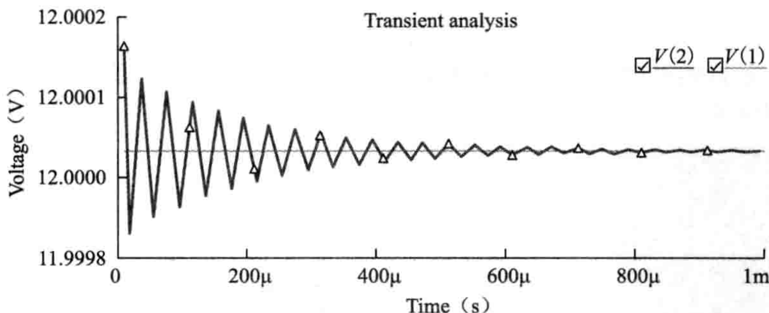


图 10-33 图 10-31 所示电路的响应 ◀

练习 10-10 参考如图 10-34 所示的 RL 电路。使用 Multisim 来确定 $v(t)$。

答案： 参见图 10-35

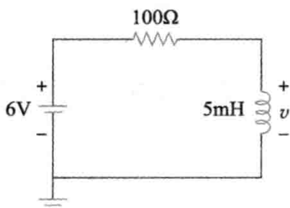


图 10-34 练习 10-10 的电路图

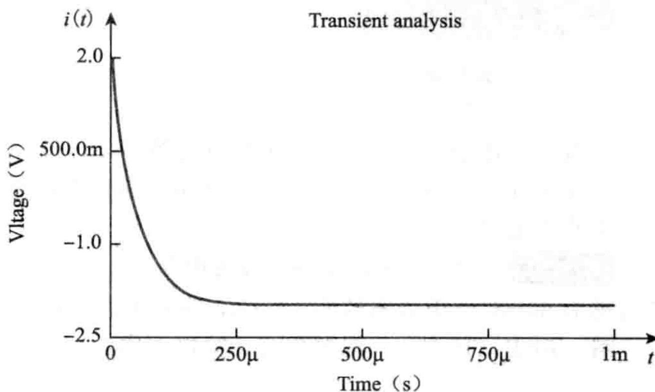


图 10-35 练习 10-10 的响应曲线

†10.9 应用实例

多数电感（线圈）通常都是分立形式且趋于大体积和高成本。（但用于开关电源和 EMI/RFI[⊖] 滤波器的电感除外）鉴于这一原因，电感不像电容和电阻那样应用广泛，且其实际应用有限。不过，有些实际应用中电感是无可替代的。电感常用于继电器、延迟电路、传感器、摄像机头、电话电路、调谐电路、无线电和电视接收机、电源、滤波器、电动机、麦克风和扬声器等。本节中将讨论两个简单的电感应用实例。

10.9.1 延迟电路

电磁控制的开关称为继电器（relay），典型的继电器如图 10-36所示。继电器是一种电磁设备，用于打开或者闭合控制另一个电路的开关。典型的继电器电路如图 10-37a 所示。注意继电器使用电磁体，它是由金属线圈缠绕铁心组成的。当给线圈通以电流，线圈开始加压时，它就被磁化了——即术语电磁体。线圈电路为一个 RL 电路如图 10-37b 所示，其

⊖ EMI 表示电磁干扰，而 RFI 表示射频干扰。

中 R 和 L 分别为线圈的电阻和电感。当图 10-37a 中的开关 S_1 闭合，线圈电路被磁化。线圈电流逐渐增加并产生磁场。最后，磁场强度增大到能够拉动另一个电路中的活动触头，将 S_2 关闭。此时，继电器为吸合状态（pulled in）。两个开关 S_1 和 S_2 关闭的时间间隔 t_d 称为继电器延迟时间（relay delay time）。求 t_d 的公式为

$$t_d = \tau \ln \frac{i(0) - i(\infty)}{i(t_d) - i(\infty)} \tag{10-18}$$

其中 ln 表示自然对数，$i(0)$ 为电感电流的初值，$i(\infty)$ 为电感电流的终值，$i(t_d)$ 为 $t=t_d$ 时的电感电流。

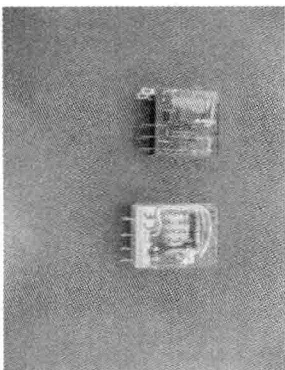
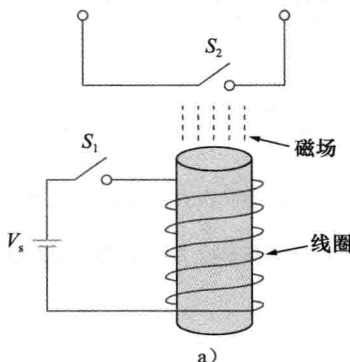


图 10-36 典型的继电器



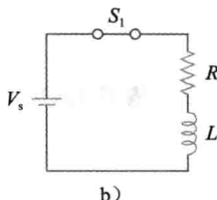


图 10-37 继电器电路

继电器在用小电气信号控制大的电流或者电压时非常有用，如由断裂的继电器场（collapsing relay field）产生高电流/电压。继电器还用于早期的数字电路，且至今仍用于高功率开关电路中。

例 10-11 某特定继电器的线圈的电压由 12V 的干电池供给。如果线圈的内阻为 150Ω 且电感为 30mH，吸合电流为 50mA，计算继电器的延迟时间。

解： 用式（10-18），首先需要计算以下参数

$$i(0) = 0, \quad i(\infty) = \frac{12}{150} = 80(\text{mA})$$

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{30 \times 10^{-3}}{150} = 0.2(\text{ms})$$

如果 $i(t_d) = 50\text{mA}$，那么

$$t_d = 0.2\ln\left(\frac{0-80}{50-80}\right) = 0.1962(\text{ms}) = 196.2(\mu\text{s})$$ ◀

练习 10-11 某继电器的电阻为 200Ω，电感为 500mH。当继电器线圈上流过的电流达到 350mA 时，继电器就接触关闭（contact close）。在给线圈加压 110V 后到接触关闭要经过多长时间？

答案： 2.529ms

10.9.2 自动点火电路

电感具有阻止电流快速变化的特性，这使其常用于产生电弧或者火花。自动点火系统就是利用了这一特性。

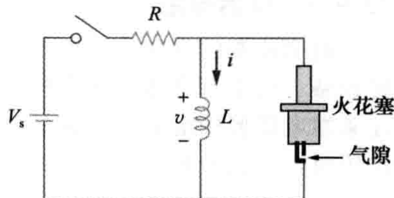


图 10-38 汽车点火系统电路

汽车的发动机要求在每个汽缸中的油气混合物能够在适当的时间被点燃。这一点由火花塞的方式完成，如图 10-38 所示。火花塞包含了一对被气隙隔开的电极。

通过在电极间产生巨大的电压（千伏以上），在气隙间形成火花，从而点燃燃料。但是如何从供电仅为12V的汽车电池获取如此巨大的电压呢？这是通过电感（火花线圈）L的方式获得的。因为电感两端的电压为$v=L\Delta i/\Delta t$，所以可能在很短时间内，创建一个急剧变化的电流，使$\Delta i/\Delta t$很大。点火时，图10-38中的开关是闭合的，流过电感的电流逐渐增大，且达到终值$i=V_s/R$，其中$V_s=12V$。此外，电感充电的时间是电路时间常数的五倍（$\tau=L/R$），即

$$t_{\text{charge}} = 5\frac{L}{R} = 5\tau \tag{10-19}$$

在处于稳态时，i为常数，所以$\Delta i/\Delta t=0$且电感的电压为$v=0$。当开关突然打开时，在电感两端会产生巨大的电压。根据定义，开关瞬时打开i就会趋向于0（产生一个快速断裂的磁场），从而在气隙间产生火花或者弧。火花持续产生直到电感中储存的能量由火花电量释放出来。当独自使用电感电路时，同样的效应可以在实验室里造成非常严重的电击，所以要小心操作。

例10-12 内阻为4Ω，电感为6mH的螺线管，用于类似于如图10-38所示电路的汽车点火电路中。如果电池提供的电压为12V，试确定：

（a）当开关闭合时螺线管流过的终值电流；

（b）线圈中储存的能量；

（c）气隙间的电压，假定开关打开花费的时间为1μs。

解：（a）螺线管流过的终值电流为

$$I = \frac{V_s}{R} = \frac{12}{4} = 3(\text{A})$$

（b）线圈中储存的能量为

$$w = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\times 6\times 10^{-3}\times 3^2 = 27(\text{mJ})$$

（c）气隙间的电压为

$$v = L\frac{\Delta I}{\Delta t} = 6\times 10^{-3}\times\frac{3}{1\times 10^{-6}} = 18(\text{kV})$$ ◀

练习10-12 某汽车点火系统的火花线圈的电感为20mH，内阻为5Ω，当提供12V的电压时，计算：

（a）线圈完全充电需要的时间；（b）线圈中储存的能量；（c）如果开关打开花费的时间为2μs，气隙间的电压。 **答案：**（a）20ms；（b）57.6mJ；（c）24kV

10.10 本章小结

1）法拉第定律确定了电路中电感电压与电路中交链磁通量变化率的关系。

$$v = N\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$$

楞次定律确定了感应电压的极性。

2）电感L是表明电子电路元件阻碍流过其电流改变的属性，电感的计量单位为亨利（H）。

3）电感两端的电压正比于流经其电流的变化率，即

$$v = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

4）如果流经电感的电流保持不变，则电感的端电压为零。因此电感对于直流电源相当于短路。

5）流经电感的电流不能突变。

6）流经电感的电流上升时，电感在其磁场中储存能量，反之，则会释放能量。储存的能量为

$$W = \frac{1}{2}Li^2$$

7）电感有不同的种类和尺寸。

8）电感串联和并联的合并与电阻的串联和并联合并的方式相同。

9）在 RL 电路中，时间常数为 $\tau=L/R$。如果电流的初始值为 I_0，则流过电感的电流为

$$i(t) = I_0 e^{-t/\tau}$$

10）学习了如何使用 PSpice 和 Multisim 模拟 RL 电路。

11）本章中的两个 RL 电路的用实例为继电器和汽车点火电路。

复习题

1 与线圈感应电压相关的为
(a) 线圈的内阻 (b) 线圈的初始能量
(c) 线圈的电感 (d) 电流的变化率

2 在以下哪种情况下空心电感的电感将增大？
(a) 导线直径增大
(b) 长度增大
(c) 匝数增多
(d) 用更高磁导率的材料代替空心

3 5H 电感的电流在 0.2s 内变化了 3A。则电感两端产生的电压为
(a) 75V (b) 8.888V
(c) 3V (d) 1.2V

4 如果 10mH 电感的电流由 0 增长到 2A，该电感中储存的能量是多少？
(a) 40mJ (b) 20mJ
(c) 10mJ (d) 5mJ

5 电感并联合并与电阻并联合并相同。
(a) 正确 (b) 错误

6 串联的电感的总电感计算的方法相同于
(a) 电阻的串联 (b) 电阻的并联
(c) 电容的串联 (d) 以上均不是

7 如果 40mH 和 60mH 的电感相串联，合并后的等效电感为
(a) 2400mH (b) 100mH
(c) 80mH (d) 24mH

8 如果 40mH 和 60mH 的电感相并联，合并后的等效电感为
(a) 24mH (b) 80mH
(c) 100mH (d) 2400mH

9 图 10-39 中电流 i 的终值（稳态）为
(a) 2.8A (b) 2A
(c) 1.75A (d) 0A

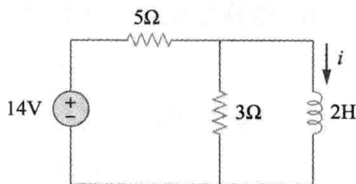


图 10-39 复习题 9 的电路图

10 如果 RL 电路中 $R=2\Omega$，$L=8\text{mH}$，则电路的时间常数为
(a) 16ms (b) 8ms
(c) 4ms (d) 0.25ms

答案：1 (c)，(d)，2 (a)，(c)，(d)，3 (a)，4 (b)，5 (a)，6 (a)，7 (b)，8 (a)，9 (a)，10 (c)

习题

10.2 节

1 确定当磁通量在 2ms 内由 0.6μWb 变化为 0.8μWb 时，300 匝线圈的感应电压。

2 250 匝线圈的磁通量变化率为 2Wb/s。计算感应电压。

3 当磁通量在 5ms 内由 0.3 变化到 0.8mWb 时，线圈产生了 5V 的感应电压。计算线圈的匝数。

4 400 匝线圈的磁通量在 1s 内由 2Wb 变化为 7Wb，则感应电压是多少？

5 交链磁通量变化率为 40mWb/s。如果线圈为 60 匝，确定线圈两端的感应电压。

6 500 匝的线圈在 5μs 内处于 500Wb 的磁通量中。计算线圈的感应电压。

10.3 节

7 流过 0.25H 电感的电流如图 10-40 所示。画

出电感电压的波形。

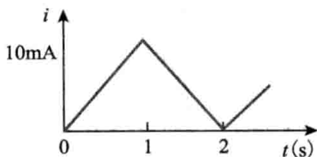


图 10-40 习题 7 的电路图

8 4H 电感的电流 i 关于 t 的波形如图 10-41 所示。画出 v 对于 t 的图形。

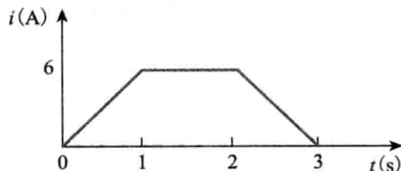


图 10-41 习题 8 的电路图

9 40mH 的电感匝数变为原来的两倍，而保持其长度、横截面积和磁心材料不变。则新的电感值是多少？

10 流经电感电流的变化率为 50mA/s，而感应电压为 10mV。计算电感器的电感。

11 线圈中电流变化率为 0.2A/s 时，线圈的感应电压为 6V，计算线圈的电感。

12 流经电感的电流在 1s 内由 0 上升至 4A。如果感应电压为 6.5V，确定：(a) 电流的变化率；(b) 电感器的电感。

13 求 200mH 线圈电流变化率为 240mA/s 时的感应电压。

14 如图 10-42 所示的电流流经 20mH 的电感。画出感应电压的图形。

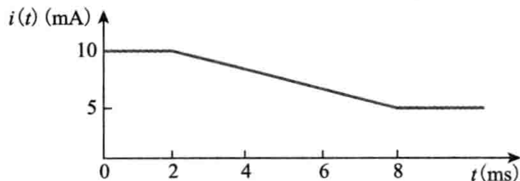


图 10-42 习题 14 的电路图

15 连接在线圈两端的伏特表读数为 26mV。如果每 1.5ms 电流增加 12mA。确定线圈的电感。

16 螺线管的磁心为空气，直径为 1.2cm 且长度 8cm。如果线圈的电感为 800μH，确定需要的匝数。

17 空心线圈长度为 4cm，直径为 2cm。若想得到 50μH 的电感线圈需要缠绕多少匝？

18 4mH 的电感匝数为 500。需要添加多少匝才能将电感提升为 6mH？

19 如图 10-43 所示的环形线圈，其横截面积为圆形。确定能得到 400mH 电感的线圈匝数。假定横截面积为 3.5cm^2，平均路径长度为 54.2cm，铸钢磁心的磁导率为 $7.6\times10^{-4}\text{H/m}$。

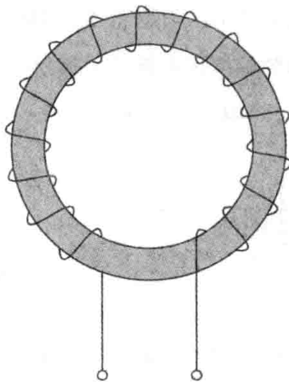


图 10-43 习题 19 的电路图

20 两个空心线圈具有相同的横截面积，但是第二个线圈的匝数为第一个的三倍，而长度为第一个线圈的一半。确定两个电感间的关系。

21 与 4H 连接的伏特表的读数为 2.5V。确定线圈中电流随时间变化得多快。

10.4 节

22 如果 10H 电感中通以 2A 的电流，那么电感中储存的能量是多少？

23 如果 400mH 的电感要储存 0.25J，需要多大的电流？

24 确定 60mH 的电感中流经 2A 的电流时储存了多少能量。

25 对如图 10-44 的电路，电压和电流都已经达到了终值，求 v、i_1 和 i_2。

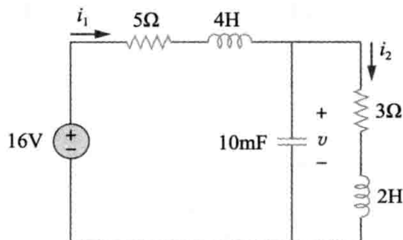


图 10-44 习题 25 的电路图

26 在直流稳态条件下，求如图 10-45 所示电路中的 v_C、i_L 和电感及电容中储存的能量。

27 在直流稳态条件下，求如图 10-46 所示电路

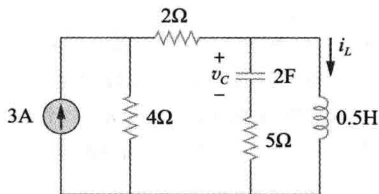


图 10-45 习题 26 的电路图

中电容的端电压和流经电感的电流。

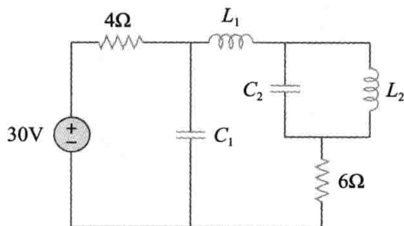


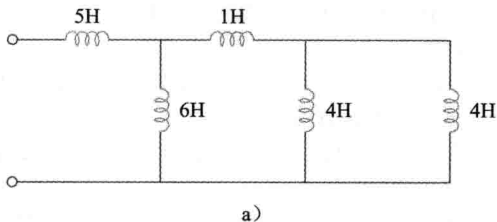
图 10-46 习题 27 的电路图

10.6 节

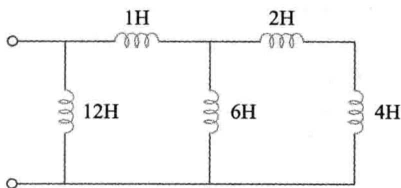
28 五个电感相串联，每个电感为 80mH。总电感是多少？

29 200μH 和 800μH 电感相并联。等效总电感是多少？

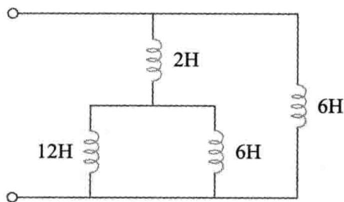
30 求如图 10-47 所示电路中每个电路的等效电感。



a)



b)



c)

图 10-47 习题 30 的电路图

31 求如图 10-48 所示电路的 L_{eq}。

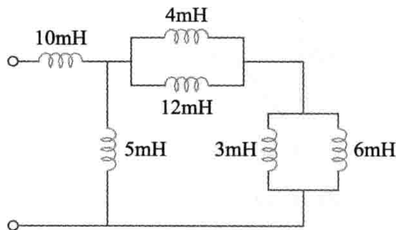


图 10-48 习题 31 的电路图

32 确定图 10-49 所示电路端口 a-b 之间的 L_{eq}。

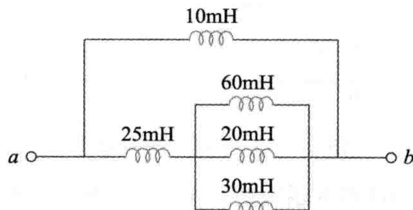


图 10-49 习题 32 的电路图

33 求如图 10-50 所示电路端口 a-b 间的 L_{eq}。

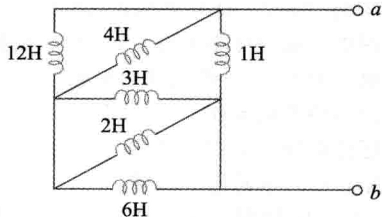


图 10-50 习题 33 的电路图

34 求从图 10-51 所示电路端口 a-b 向内看的等效电感。

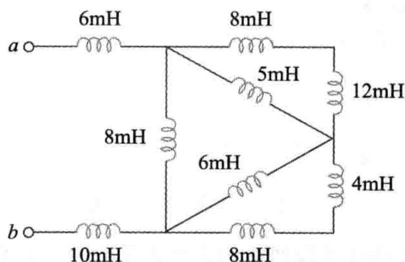


图 10-51 习题 34 的电路图

35 求如图 10-52 所示电路的 L_{eq}。

36 确定如图 10-53 所示电路的等效电感 L_{eq}。

10.7 节

37 用以下的 R、L 和 C 值，计算 $e^{-tR/L}$ 的值。

(a) $R=1\Omega$，$L=5H$，$t=1s$

(b) $R=2\Omega$，$L=10H$，$t=1s$

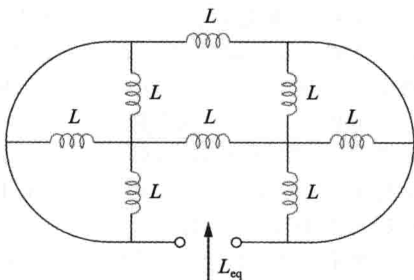


图 10-52 习题 35 的电路图

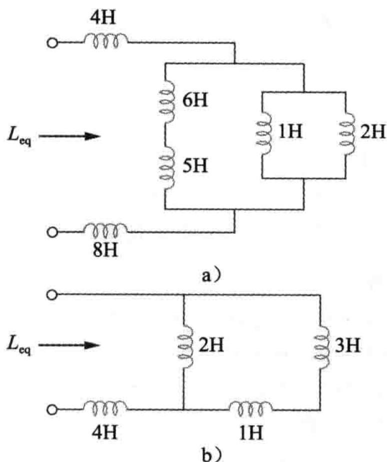


图 10-53 习题 36 的电路图

(c) $R=5\Omega$，$L=5\text{H}$，$t=2\text{s}$

38 开关打开之前，3A 的电流瞬时流过 4H 的线圈。如果开关打开时，线圈与 2Ω 电阻器串联，确定 5s 后的电流。

39 如图 10-54 所示电路中的开关已经关闭了很长时间。在 $t=0$ 时，开关打开。计算 $t>0$ 时的 $i(t)$。

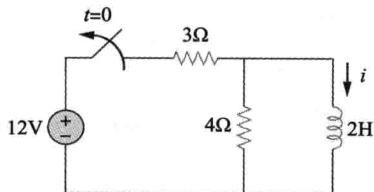


图 10-54 习题 39 的电路图

40 对图 10-55 所示的电路，计算时间常数。

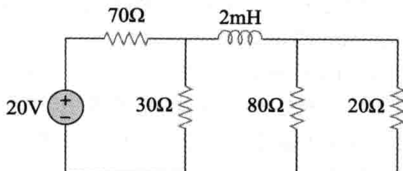


图 10-55 习题 40 的电路图

41 求如图 10-56 所示电路的时间常数。

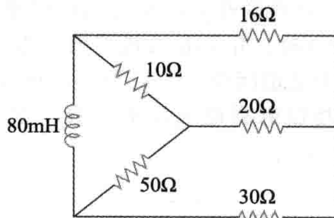


图 10-56 习题 41 的电路图

42 求如图 10-57 中每个电路的时间常数。

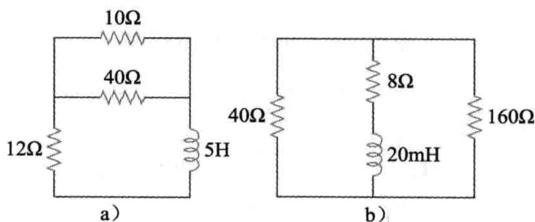


图 10-57 习题 42 的电路图

43 考虑如图 10-58 所示的电路。若 $i(0)=2\text{A}$ 且 $v(t)=0$ 求 $v_0(t)$。

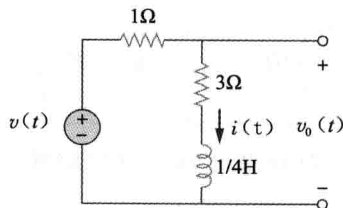


图 10-58 习题 43 的电路图

44 对图 10-59 所示的电路，确定 $i(0)=1\text{A}$ 且 $v(t)=0$ 时的 $v_0(t)$。

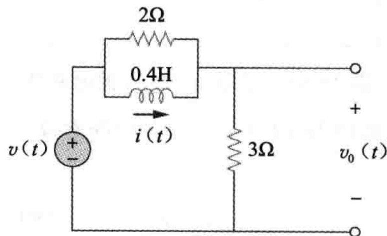


图 10-59 习题 44 的电路图

45 对于图 10-60 所示的电路，$t>0$，$i=30e^{-50t}$ A 且 $v(t)=120e^{-50t}$V。

(a) 确定时间常数。

(b) 求 L 和 R。

46 求 $t>0$ 时的 $i(t)$ 和 $v(t)$，电路如图 10-61。假定 $i(0)=10\text{A}$。

47 考虑如图 10-62 所示的电路图。给定 $v_o(0)=$

2V，求 $t>0$ 时的 v_o 和 v_x。

48　图 10-63 中的开关打到 A 端已经很长时间。在 $t=0$ 时，开关由 A 端打到 B 端。该开关是断开之前闭合（make-before-break）类型的，所以电感电流没有间断。求 $t>0$ 时的 $i(t)$。

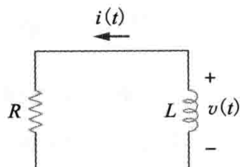


图 10-60　习题 45 的电路图

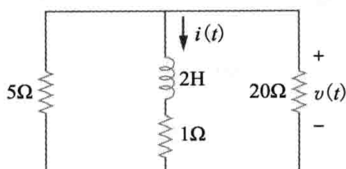


图 10-61　习题 46 和 53 的电路图

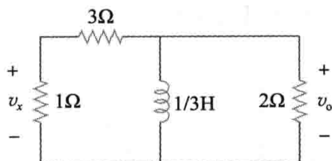


图 10-62　习题 47 的电路图

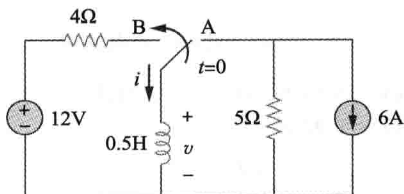


图 10-63　习题 48 和 54 的电路图

49　求如图 10-64 所示电路的时间常数。

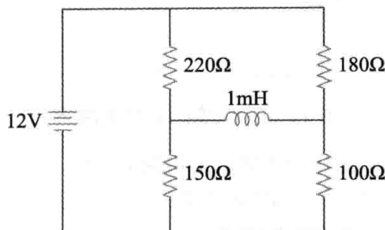


图 10-64　习题 49 的电路图

50　50mH 的电感具有 2Ω 的金属内阻。计算该电感电流达到峰值时需要多长的时间。

51　一个 RL 电路连接了一个 6V 的电压源且 $R=120\Omega$。如果需要 $40\mu s$ 的时间使电流能够由 0 上升到 5mA，计算：(a) 终值电流；(b) 电感 L；(c) 时间常数。

52　如图 10-65 所示的 RL 电路，开关 S_2 打开，而开关 S_1 闭合保持一个时间常数的时间。然后将 S_2 闭合，S_1 打开。

(a) 确定 S_2 闭合，S_1 打开时，电阻的初始电流。

(b) 求电流减小为其初始值一半时所需要的时间。

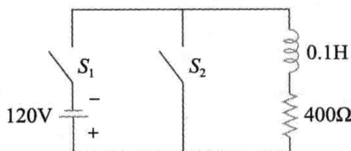


图 10-65　习题 52 的电路图

10.8 节

53　用 PSpice 求习题 46 中的 $i(t)$。

54　用 PSpice 求解习题 48。

55　图 10-66 中的开关在 $t=0$ 时打开。用 PSpice 确定 $t>0$ 时的 $v(t)$。

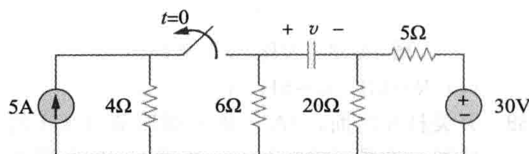


图 10-66　习题 55 的电路图

56　图 10-67 中的开关在 $t>0$ 时由 a 端移动到 b 端。用 PSpice 求 $t>0$ 时的 $i(t)$。

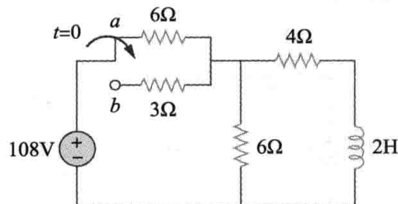


图 10-67　习题 56 的电路图

57　图 10-68 中电路，开关已经处于 a 端很长时间，但是在 $t=0$ 时立即移动到 b 端。用 Multisim 确定 $i_o(t)$。

58　用 Multisim 确定图 10-69 所示电路的 $v_o(t)$。

59　图 10-70 所示电路中的电压源 v_s 产生频率为 2kHz，幅度为 0 到 12V 的周期方波信号。用 Multisim 求 $v_o(t)$。

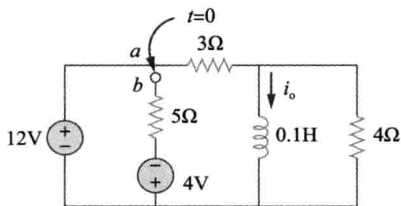


图 10-68 习题 57 的电路图

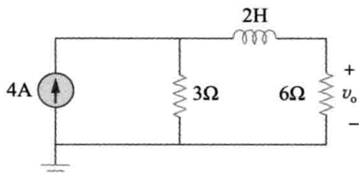


图 10-69 习题 58 的电路图

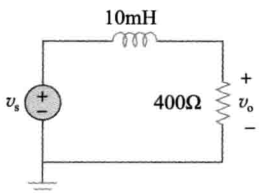


图 10-70 习题 59 的电路图

10.9 节

60 160mH 的线圈内阻为 8Ω。给线圈加上电压，求电流上升为终值的百分之六十需要的时间。

61 120V 的直流发电机给发动机供电，发动机线圈的电感为 50mH，内阻为 100Ω。如图 10-71 所示，一个 400Ω 的消磁电阻与发动机相并联以避免发动机损坏，系统处于稳态。求断路器启动后 100ms 时，流过消磁电阻的电流。

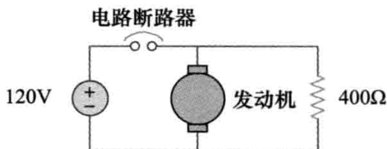


图 10-71 习题 61 的电路图

62 如果输出为电感的端电压，且 $\tau << T$（如，$\tau < 0.1T$），其中 T 为输入脉冲的宽度，则 *RL* 电路可以用于微分器。如果 *R* 为固定 200Ω，确定对 T=10μs 的脉冲进行微分时，需要的 *L* 的最大值。

63 某生物学学生用如图 10-72 所示电路学习“青蛙踢动”。她注意到当开关闭合时青蛙踢动很小，而当开关打开时，青蛙则剧烈踢动了 5s。将青蛙模拟为一个电阻，然后计算它的电阻。假定青蛙需要 10mA 的电流才能剧烈踢动。

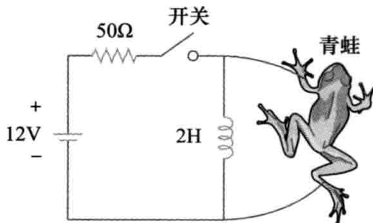


图 10-72 习题 63 的电路图

第二部分

交流电路

第11章 交流电压和电流

自然、时间和耐心是三大良医。

——谚语

历史人物

海因里希·鲁道夫·赫兹（Heinrich Rudorf Hertz，1857—1894），德国实验物理学家，证明了电磁波与光线遵循相同的基本定律。他的研究工作证实了詹姆斯·克拉克·麦克斯韦（James Clerk Maxwell）于1864年提出的著名理论以及电磁波存在的预言。

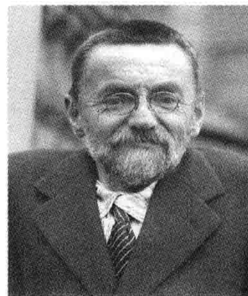


海因里希·鲁道夫·赫兹
（© The Huntington Library，Burndy Library，San Marino，California）

赫兹出生在德国汉堡的一个富裕的家庭，进入柏林大学学习，师从著名物理学家赫尔曼·冯·亥姆霍兹（Hermann von Helmholtz）攻读博士学位。之后在卡尔斯鲁厄大学担任教授，并开始了对电磁波的探索和研究。赫兹成功地产生并探测到电磁波，并最早证明了光是一种电磁能量。1887年，赫兹首先发现了分子结构中电子的光电效应。虽然赫兹的一生仅有短暂的37年岁月，但他发现了电磁波，为电磁波成功应用于收音机、电视机和其他通信系统铺平了道路。后人将频率的单位以他的名字命名，以此纪念赫兹做出的杰出贡献。

查尔斯·普洛特斯·斯坦梅茨（Charles Proteus Steinmetz，1865—1923），德裔奥地利数学家和工程师，在交流电路分析中引入了相量方法（下一章详细介绍），并以他在磁滞理论方面的出色研究工作而闻名于世。

斯坦梅茨出生在德国布雷斯劳，一岁时就失去了母亲。正当他在布雷斯劳大学即将完成数学领域的博士论文的时候，他因其政治活动而被迫离开德国。他移居瑞士后不久又去了美国，并于1893年受雇于通用电气公司。同年，他首次发表了利用复数分析交流电路的论文。他一生出版了多部教科书，其中《交流现象的理论与计算》（1897年由麦格劳-希尔（McGraw-Hill）出版社出版）正是基于这篇论文的一部著作。1901年，斯坦梅茨成为美国电气工程协会（即后来的美国电气电子工程协会，IEEE）主席。



查尔斯·普洛斯特·斯坦梅茨
（© Bettmann/Corbis）

11.1 引言

到目前为止，前面各章内容仅限于讨论直流电路，即由恒定电源或时不变电源激励的电路。限制电路的激励源为直流，既是为了简单起见，同时也是出于教学和历史发展的考虑。从历史发展的角度来看，直到19世纪末，直流电压都是提供电力的主要方式。十九世纪末，直流电与交流电之争开始显现，双方都有相应的电气工程师作为支持者。但由于交流电在发电和长距离传输方面比直流电更高效、经济，最终以交流电系统的胜利而告

终。因此，本教材按照历史事件的发展历程，首先介绍了直流电源的相关内容。

下面开始介绍电源电压或电源电流随时间变化的电路分析问题，本章专门讨论正弦时变激励，简单来说，即激励为正弦信号。正弦电流通常被称为*交流电流*（alternating current，ac）。这种电流按照规律的时间间隔反转极性，并交替地呈现出正值和负值。由正弦电流源或电压源驱动的电路称为*交流电路*（ac circuits）。

正弦量是指具有正弦或余弦函数形式的信号。

人们之所以对正弦交流电路产生了兴趣，原因有很多方面。首先，自然界本身呈现出典型的正弦特性。例如，钟摆的运动、乐器弦的振动、海洋表面的波动、欠阻尼二阶系统的自由响应等均呈现出正弦波动的特性，这仅仅是自然界中的一小部分实例。其次，正弦信号易于产生和传输。世界各国产生和提供给家庭、工厂、实验室等的电压皆为正弦交流形式。再次，正弦信号是通信领域和电力工业系统中的主要信号传输形式。另外，正弦信号在周期信号分析中起着重要的作用。最后，正弦信号在数学上易于处理。正是基于上述原因，正弦信号是电路分析中一个极其重要的信号。

本章从交流发电机出发，随后介绍正弦信号和相位关系的基本知识，之后引入平均值和方均根值的概念，最后讨论利用示波器展开时间域测量的问题。

11.2　交流发电机

电池能够在相当长一段时间内保持固定的终端电压，因此记忆中的直流电压一般都是由电池产生的。然而电池不适合为家庭生活和工业生产提供所需要的大量能量。前一章讨论了法拉第法则，利用电磁感应现象可以产生交流电压，典型的交流发电机示意图如图 11-1 所示，金属线圈在静态磁场中旋转，由于线圈旋转产生的电压正负交替出现，因此称为交流电压，数学上可以表示为

$$v = V_m \sin\theta \qquad (11\text{-}1)$$

其中，V_m 为最大值，θ 为线圈旋转的角度（用弧度表示）。任意时间点的电压值 v 称为瞬时值（instantaneous value）。瞬时值通常用小写字母 $v(t)$ 来表示。如图 11-2 所示，峰值 V_p 为最大值⊖，即 $V_p=V_m$。峰峰值 V_{pp} 是电压正峰值与负峰值之间的电压差值，即 $V_{pp}=2V_p$。

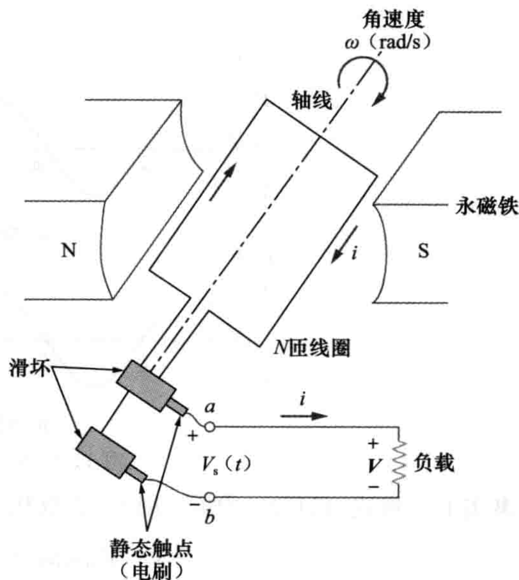


图 11-1　交流发电机

例 11-1 某交流电压表示为 $40\sin(10^3 t)$ V。

(a) 试计算 0.2ms 时的瞬时值。(b) 试计算峰峰值。

解：(a) 当 $t=0.2$ms 时，

$$v = 40\sin 10^3 \times 0.2 \times 10^{-3} = 40\sin 0.2 = 7.947(\text{V})$$

(b) 峰峰值为

$$V_{pp} = 2 \times 40 = 80(\text{V})$$

◀

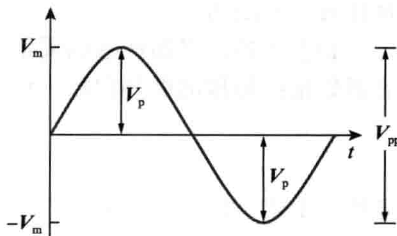


图 11-2　交流电压

⊖ 如果有直流偏离量，则 $V_p \neq V_m$。

练习 11-1 某交流发电机产生 $25\sin(10^6 t)$V 的电压。

(a) 试计算峰值电压。(b) 试计算 3μs 的瞬时值。 **答案：**(a) 25V；(b) 3.528V

11.3 正弦量

如果用 ωt 代替公式（11-1）中的 θ，则正弦电压可以表示为

$$v(t) = V_m \sin\omega t \tag{11-2}$$

其中，

V_m＝正弦电压的幅度或振幅（amplitude）；

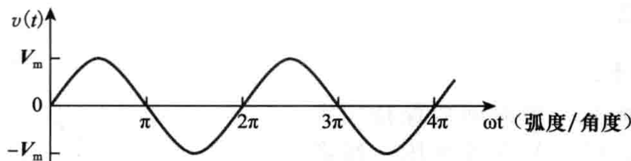
ω＝角频率（angular frequency），单位为 rad/s；

t＝时间，单位为 s；

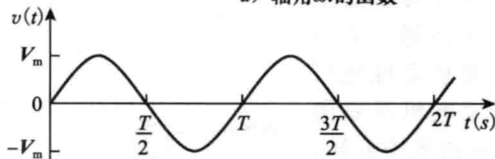
ωt＝正弦电压的辐角（argument）。

该正弦电压 $v(t)$ 与其辐角 ωt 之间的函数关系如图 11-3a 所示，$v(t)$ 与时间 t 之间的函数关系如图 11-3b 所示。显然地，该正弦波每隔 T 秒就会重复一遍，因此称 T 为该正弦波的周期（period）。由图 11-3 所示的两个波形可知，$\omega T = 2\pi$，即：

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}} \tag{11-3}$$



a）辐角ωt的函数



b）时间t的函数

图 11-3 $V_m\sin(\omega t)$ 的波形图

事实上，将式（11-2）中的 t 用 $t+T$ 取代，即可证明 $v(t)$ 每隔 T 秒重复一次，即：

$$\begin{aligned} v(t+T) &= V_m \sin\omega(t+T) = V_m \sin\left(\omega t + \omega\frac{2\pi}{\omega}\right) \\ &= V_m \sin(\omega t + 2\pi) = V_m \sin\omega t = v(t) \end{aligned}$$

因此，$v(t+T) = v(t)$，也就是说，在 t 和 $t+T$ 两个时刻，v 取值相同，因此称 $v(t)$ 是周期性的（periodic）。

如上所述，周期函数的周期 T 是指一个完整循环的时间或者说每个循环的秒数，周期的倒数是指每秒的循环次数，称为正弦波的频率（frequency）f。因此，

$$\boxed{f = \frac{1}{T}} \tag{11-4}$$

显然，由式（11-3）与式（11-4）可以得到：

$$\boxed{\omega = 2\pi f} \tag{11-5}$$

其中，ω 的单位为弧度每秒（rad/s），f 的单位为赫兹⊖（Hz）。

⊖ 历史摘记：频率 f 的单位是以德国物理学家海因里希 R. 赫兹（1857—1894）的名字命名的。

由图 11-3 可知，横轴可以表示时间，角度或者弧度。因此，需要给出角度和弧度之间的关系，360 度的旋转对应于 2π 弧度，即

$$2\pi\text{rad} \equiv 360° \tag{11-6a}$$

或者，

$$1\text{rad} \equiv \frac{360°}{2\pi} = 57.3° \tag{11-6b}$$

度数和弧度之间的转换公式为

$$\boxed{\text{弧度} = \left(\frac{\pi}{180°}\right) \times \text{角度}} \tag{11-7}$$

$$\boxed{\text{角度} = \left(\frac{180°}{\pi}\right) \times \text{弧度}} \tag{11-8}$$

表 11-1 给出了不同度数与相应的弧度值。

表 11-1 部分度数和其对应的弧度

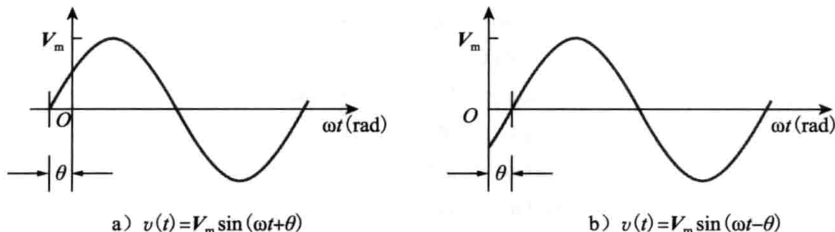
度数（°）	弧度（rad）	度数（°）	弧度（rad）
0	0	180	π
30	$\pi/6$	225	$5\pi/4$
45	$\pi/4$	270	$3\pi/2$
60	$\pi/3$	315	$7\pi/4$
90	$\pi/2$	360	2π
135	$3\pi/4$		

如图 11-3 所示，若正弦波在 $t=0$ 时刻不为零值，则表明此正弦存在相移（phase shift），也称作相位（phase）或相角（phase angle）。正弦波可以向左或向右偏移，如图 11-4 所示，若正弦波向左偏移，如图 11-4a 所示，则有，

$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \theta) \tag{11-9a}$$

其中，θ 是相位偏移，单位为弧度或度。若正弦波向右移动，如图 11-4b 所示，则有

$$v(t) = V_m \sin(\omega t - \theta) \tag{11-9b}$$



a) $v(t)=V_m\sin(\omega t+\theta)$　　b) $v(t)=V_m\sin(\omega t-\theta)$

图 11-4 正弦波的相位偏移

例 11-2 试计算正弦信号 $v(t)=12\cos(50t+10°)$ 的幅度、相位、角频率、周期和频率。

解： 幅度为 $V_m=12\text{V}$

相位 θ 为 $=10°$

角频率为 $\omega=50\text{rad/s}$

周期为 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{50}=0.1257\text{s}$

频率为 $f=\frac{1}{T}=7.958\text{Hz}$ ◀

练习 11-2 给定正弦信号 $5\sin(4\pi t-60°)$，试计算其幅度、相位、角频率、周期和频率。

答案： 5；$-60°$；12.566rad/s；0.5s；2Hz

例 11-3 (a) 将角度 150°转化为弧度。(b) 将 4π/3 弧度转化为角度。

解：(a) 利用式 (11-7)，可得

$$弧度 = \left(\frac{\pi}{180^\circ}\right) \times 150^\circ = 2.618(\text{rad})$$

(b) 利用式 (11-8) 可得

$$角度 = \left(\frac{180^\circ}{\pi}\right) \times \frac{4\pi}{3} = 240^\circ$$

◀

练习 11-3 (a) 将度数 210°转化为弧度。(b) 将 5π/6 弧度转化为角度。

答案：(a) 3.6652rad；(b) 150 弧度

11.4 相位关系

现在将前一节正弦量的思想扩展到两个具有相同频率的正弦量。考察如图 11-5 所示的两个正弦电压信号 $v_1(t)$ 与 $v_2(t)$：

$$v_1(t) = V_m \sin\omega t \quad v_2(t) = V_m \sin(\omega t + \theta) \tag{11-10}$$

图 11-5 中 v_2 的起点在时间上先出现，因此，称 v_2 比 v_1 超前 (lead) θ 或者称 v_1 比 v_2 滞后 (lag)θ。如果 $\theta \neq 0$，则称 v_1 与 v_2 不同相 (out of phase)。如果 $\theta = 0$，则称 v_1 与 v_2 同相 (in phase)，即二者到达最小值和最大值的时刻完全相同。以上对 v_1 与 v_2 进行比较的条件是二者具有相同的频率，但不必具有相同的幅度。相位差角应该用小于 180°的角度来表示超前或者滞后，如果相位差恰好为 180°，则既不能称为超前也不能称为滞后。

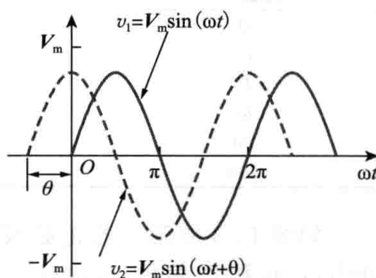


图 11-5 具有不同相位的两个正弦电压信号

到目前为止，正弦信号都是用正弦函数的形式表示的。同样，正弦信号也可以用余弦函数的形式表示。对两个正弦信号进行比较时，将二者同表示为幅度为正的正弦函数或余弦函数会比较方便。在表示正弦信号时通常会用到如下三角函数恒等式：

$$\begin{gathered}\sin(-\omega t) = -\sin(\omega t) \\ \cos(-\omega t) = \cos\omega t \\ \sin(\omega t \pm 180^\circ) = -\sin\omega t \\ \cos(\omega t \pm 180^\circ) = -\cos\omega t \\ \sin(\omega t \pm 90^\circ) = \pm\cos\omega t \\ \cos(\omega t \pm 90^\circ) = \mp\sin\omega t\end{gathered} \tag{11-11}$$

利用上述关系可以方便地将正弦函数转换为余弦函数，或者反之。

例 11-4 试计算 $v_1(t) = -10\cos(\omega t + 50^\circ)$ 与 $v_2(t) = 12\sin(\omega t - 10^\circ)$ 之间的相位角，并说明哪一个正弦信号超前。

解：下面采用两种方法计算相位。

方法 1：为了比较 v_1 与 v_2，必须将二者表达为相同的形式。如果用幅度为正的余弦函数表示，则有

$$v_1 = -10\cos(\omega t + 50^\circ) = 10\cos(\omega t + 50^\circ - 180^\circ)$$

即

$$v_1 = 10\cos(\omega t - 130^\circ) = 10\cos(\omega t + 230^\circ) \tag{11-4-1}$$

而且

$$v_2 = 12\sin(\omega t - 10^\circ) = 12\cos(\omega t - 10^\circ - 90^\circ)$$

即

$$v_2 = 12\cos(\omega t - 100°) \tag{11-4-2}$$

由式（11-4-1）与式（11-4-2）可以推出，v_1 与 v_2 之间的相位差为 30°，可以将 v_2 写成

$$v_2 = 12\cos(\omega t - 130° + 30°)$$

或

$$v_2 = 12\cos(\omega t + 260°) = 12\cos(\omega t + 230° + 30°) \tag{11-4-3}$$

比较式（11-4-1）与式（11-4-3）显然可知，v_2 比 v_1 超前 30°。

方法 2：将 v_1 利用正弦函数表示为

$$\begin{aligned} v_1 &= -10\cos(\omega t + 50°) = 10\sin(\omega t + 50° - 90°) \\ &= 10\sin(\omega t - 40°) = 10\sin(\omega t - 10° - 30°) \end{aligned}$$

而 $v_2 = 12\sin(\omega t - 10°)$。

比较二者可知，v_1 较 v_2 滞后 30°，与 v_2 较 v_1 超前 30°是一样的。◀

练习 11-4　试求 $i_1 = -4\sin(377t + 25°)$ 与 $i_2 = 5\cos(377t - 40°)$ 之间的相位角，并判断 i_1 是超前还是滞后于 i_2。

答案： 155°，i_1 超前于 i_2

11.5　平均值和有效值

对于任意周期函数 $f(t)$（可以是电压或者是电流）其周期为 T，则平均值定义为，

$$F_{\text{ave}} = \frac{1}{T} \times [\text{一个周期内曲线 } f(t) \text{ 包含的面积}] \tag{11-12}$$

需注意的是，在水平轴之上的面积是正值，而水平轴之下的面积是负值。

对于正弦波形，由于波形本身的对称特性，如图 11-6a 所示，因此一个周期内的净面积通常都是零。由图 11-6a 显然可见，正弦波半个周期内的每个正值，在下半个周期内都有相同的负值，二者互相抵消。因此，对于交流电压 $v(t) = V_m \sin\omega t$，则有

$$V_{\text{ave}} = 0 \tag{11-13}$$

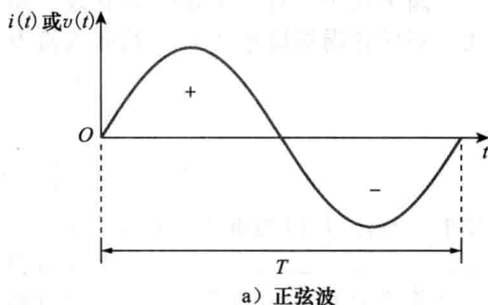
同样的，对于交流电流 $i(t) = I_m \sin\omega t$，则有

$$I_{\text{ave}} = 0 \tag{11-14}$$

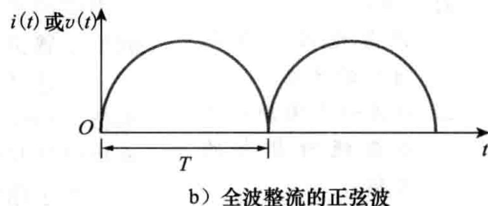
如图 11-6b 所示的全波整流（full-wave-rectified）的正弦波，对其套用式（11-12），可得

$$V_{\text{ave}} = 0.637V_m \tag{11-15}$$

$$I_{\text{ave}} = 0.637I_m \tag{11-16}$$



a）正弦波



b）全波整流的正弦波

图 11-6　正弦波的整流

周期性电流（或电压）的有效值（或 rms）是指产生的平均功率与该周期性电流（或电压）传递给电阻的平均功率相等的直流电流值（或电压值）。

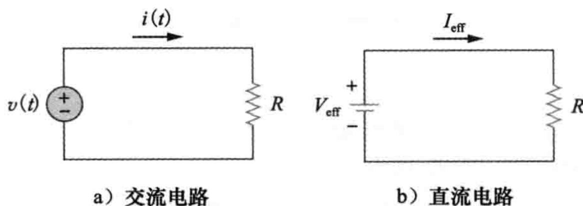
周期信号的另一个重要特性是有效值（effective value）或方均根值（root mean square, rms）值。有效值的概念源于对交流电压源或电流源传递给电阻性负载的功率效率进行测量的需要。

正弦电流或电压的有效值（或等效直流值）是幅度的 0.707。

正弦量的有效值可以看作等效的直流值。如图 11-7 所示电路中，图 a 中的电路为交流电路，而图 b 中的电路为直流电路。需要计算出与正弦电流 $i(t)$ 传递给电阻 R 的平均功

率相等的有效值电流 I_{eff}。在该交流电路中，电阻吸收的平均功率为

$$I_{eff}^2R = P_{ave} = \frac{1}{2}I_m^2R \tag{11-17}$$



a）交流电路　　b）直流电路

图 11-7 求解电流有效值的电路原理图

因此，对于正弦电流 $i(t)$ 有

$$\boxed{I_{eff} = I_{rms} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0.707I_m} \tag{11-18}$$

同样，对于正弦电流 $v(t)$ 有

$$\boxed{V_{eff} = V_{rms} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} = 0.707V_m} \tag{11-19}$$

给定电阻负载 R 的平均功率则为

$$P_{ave} = V_{eff}I_{eff} = \frac{V_{eff}^2}{R} = I_{eff}^2R \tag{11-20}$$

因此可见，与直流电路的平均功率相同。

因子 0.707 只对正弦信号有效。而对于其他周期函数，需要一个更为普遍的计算公式。对任意周期信号 $f(t)$，其有效值为

$$F_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\times[f(t)\text{ 平方曲线包含的面积}]}$$

$$F_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\mathrm{d}t} \tag{11-21}$$

其中，$f(t)$ 可以为电流或电压。式（11-21）表明，为了求得 $f(t)$ 的有效值，首先要求出其平方值 $f^2(t)$，之后求 $0<t<T$ 区间的平均值，也就是曲线所包含的面积除以 T（这给出了平方的均值）。最后计算该平均值的平方根。因此，为了计算式（11-21），应按照以左下侧的步骤进行。

> 计算有效值或 rms 值的步骤：
> 1）计算电压（或电流）的平方。
> 2）计算一个周期内平方曲线所包含的面积。
> 3）将所得的面积除以周期 T。
> 4）计算上步结果的平方根。

上述计算有效值的过程表明有效值的另一个名称，方均根值（root-mean-square value），简称 rms 值。名词有效值和方均根值是同义词。

对于给定的正弦电压或正弦电流而言，由于其平均值为零，所以通常用它的最大值（即峰值或幅度值）或 rms 值来表示之。电力工业公司一般用 rms 值而不是峰值标称相量电压和电流的大小，例如，民用电压 120V 就是电力公司供电电压的 rms 值。在功率分析中，利用有效值表示电压与电流是非常方便的。另外，模拟电压表与电流表的读数分别为被测电压或电流的 rms 值。

例 11-5 流经电阻的电流为 $i(t)=4\sin(377t+30°)$A，同时电阻两端的电压为 $v(t)=60\sin(377t+30°)$V，试计算此电阻消耗的平均功率。

解：电流和电压的有效值为

$$I_{rms}=\frac{I_m}{\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2.828(\mathrm{A})$$

$$V_{rms}=\frac{V_m}{\sqrt{2}}=\frac{60}{\sqrt{2}}=42.43(\mathrm{V})$$

则功率为

$$P_{ave}=V_{rms}I_{rms}=42.43\times 2.828=120(\mathrm{W})$$ ◀

练习 11-5　8Ω 电阻两端的电压为 $v(t)=50\sin(628t+25°)\mathrm{V}$，试计算电压的有效值和此电阻消耗的功率。　**答案**：35.35V；156.25W

例 11-6　计算图 11-8 所示信号的平均值和有效值。

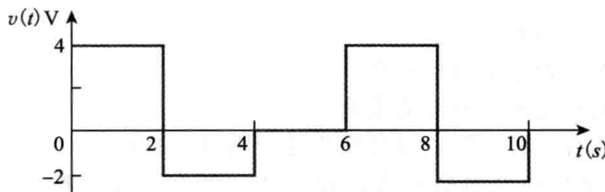


图 11-8　例 11-6 的波形图

解：首先观测到该信号每 6 秒重复一遍，即周期为 $T=6\mathrm{s}$。利用式（11-12）计算平均值可得

$$V_{ave}=\frac{1}{T}\times[\text{一周期内曲线 } v(t) \text{ 的线下面积}]$$

$$=\frac{1}{6}\times[4\times 2+(-2)\times 2+0\times 2]=\frac{4}{6}=0.6667(\mathrm{V})$$

利用前面给出的四个步骤计算有效值，首先将 $v(t)$ 平方，如图 11-9 所示，其次，计算一个周期内 $v^2(t)$ 曲线所包含的面积，即

$$\text{面积}=16\times 2+4\times 2+0\times 2=40$$

再次，将求得的面积除以 T，即 40/6，最后求平方根，因此

$$V_{rms}=\sqrt{\frac{40}{6}}=2.582(\mathrm{V})$$

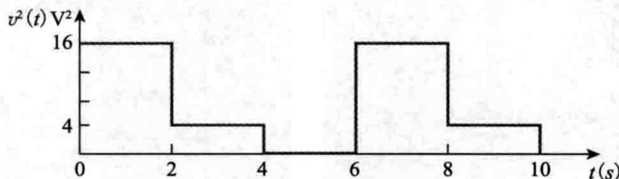


图 11-9　图 11-8 中曲线 $v(t)$ 平方后的波形图 ◀

练习 11-6　参见图 11-10，(a) 计算 $i(t)$ 的周期，(b) 计算其平均值，(c) 计算其有效值。

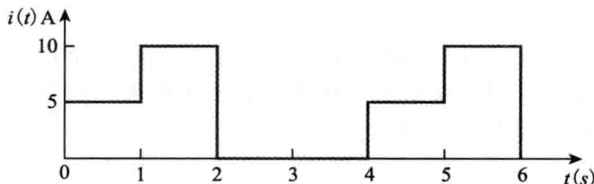


图 11-10　练习 11-10 的波形图

答案：(a) 4s；(b) 3.75A；(c) 5.59A

11.6　示波器

由于示波器可以将电路在不同时段的电信号显示出来，因此成为测试电路最有用的仪器。示波器也是电器测量过程中广泛使用的电子仪器，从电视机维修技师到医学研究者每个人都会用到它。在电子设备修理，或电子设备故障检测排除过程中，示波器同样也是必不可少的。

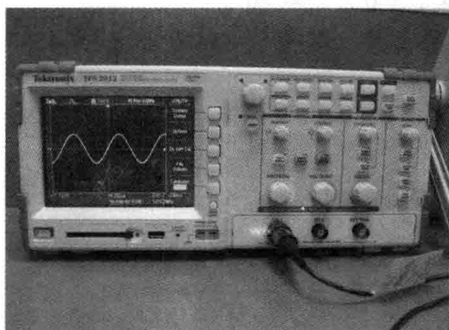
示波器可以直接测量电压，但若要测量电流，则需要一个电流到电压的转换器（电阻）。

从本质来说示波器是一个图形显示设备，它将电信号作为图像显示出来，从显示的图像中可以获得电信号的许多信息。例如：

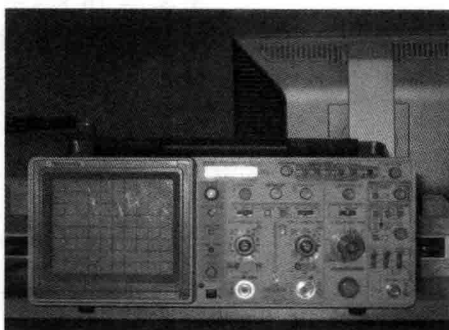
- 确定信号的时间和电压值
- 计算信号的频率
- 测量信号的直流值或平均值
- 显示故障元件是否造成信号失真
- 确定信号中的直流成分或交流成分
- 显示信号是否有噪声干扰，以及噪声是否随时间变化

除了屏幕上绘有网格以及具有更多的控制按钮外，示波器看来起来很像一台小电视机。多数示波器具有双踪显示能力，也就是说可以同时显示两路波形。

同大多数的测试仪器一样，示波器有模拟和数字两种类型，如图 11-11 所示，它们的不同之处在于在显示之前输入信号的处理方式不同。模拟示波器将测量得到的电压作用于被电子束包围的极板，在由电压产生的电场的作用下射向示波器屏幕的电子束成比例地上下偏转，从而在屏幕上描绘出波形的变化。也就是将波形用图像的形式显示出来。相比之下，数字示波器将波形电压采样，并利用模拟到数字转换（ADC）将测量的电压值转化为数字信息。然后利用数字信息在屏幕上重建波形。在许多应用场合，模拟示波器或数字示波器皆适用。然而，由于数字示波器具有扩展功能，例如波形存储，波形测量和计算等功能，因此数字示波器更受青睐。



a）数字示波器



b）模拟示波器

图 11-11　示波器

（© Sarhan M.Musa）

示波器可以测量电压和信号的频率。垂直通道上每刻度的单位是伏特，水平通道上每刻度的单位为秒。因此，可以直接从垂直通道读取电压数值。而测量频率时，首先要从水平通道上获取周期信息。周期可以用下式计算，

$$T = (\text{刻度}/\text{循环}) \times (\text{时间}/\text{刻度}) \tag{11-22}$$

因此信号的频率为，

$$f = \frac{1}{T}$$

尽量熟练掌握示波器的相关操作，平时工作中多观察多练习，它很快就会成为好帮手。

11.7 真有效值表

如前所述，功率是电压和电流的乘积。直流电路中由于电压和电流都是固定值，功率的测量相对简单。但是在交流电路中，电压和电流是从 0 到最大值，然后回到 0，再到最大值，连续不断变化的。因此，电压和电流的有效值要小于它们的最大值。有效值（方均根值，rms 值）是最大值的 0.707 倍。

真有效值表通过集成电路计算复杂信号的真有效值，如方波或经半波整流或截断的交流信号。它外观与普通数字万用表非常相似，但是价格要更贵一些。许多数字万用表只能读取正弦波形的有效值。而真有效值表可以读取任意波形的有效值，而不仅限于正弦波。真有效值表的量程更加广泛，读数时需要参考操作手册中指明的量程范围。图 11-12 所示为一个真有效值表。



图 11-12 真有效值表
(© Sarhan M.Musa)

11.8 本章小结

1）交流电压的产生基于法拉第电磁感应法则。

2）正弦信号是具有正弦函数或余弦函数形式的信号，其一般表达式为

$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \phi)$$

其中，V_m 为幅度（或振幅），$\omega = 2\pi f$ 为角频率，$\omega t + \phi$ 为辐角，ϕ 为相位。

3）周期信号的平均值等于信号和横轴在一个周期内所包围的代数面积除以周期。

4）周期信号的有效值（或 rms）是它的等效直流值，它提供于给定电阻的功率与原信号提供给该电阻的功率相等。

5）示波器是时间域的伏特计，可以用来研究、测量和显示时变波形的参数。

6）真有效值表可以测量任意波形的有效值。

复习题

1 下列对于直流的描述哪些是正确的？
(a) 电流只按照一个方向流动。
(b) 电流呈周期性变化。
(c) 电压呈阶梯状上升或下降。
(d) 直流是长距离功率传输的有效方式。
(e) 直流适用于所有场合。

2 函数经过固定区间后不断重复的现象被称为：
(a) 相量 (b) 谐振的
(c) 周期的 (d) 无功的

3 下列哪个频率有更小的周期？
(a) 1krad/s (b) 1kHz

4 周期为 5ms 的正弦波的频率是：
(a) 5Hz (b) 100Hz
(c) 200Hz (d) 2kHz

5 频率为 60Hz 的正弦波，在 2 秒内经过了几个周期？
(a) $\frac{1}{30}$个周期 (b) 60 个周期
(c) 120 个周期 (d) 600 个周期

6 若 $v_1 = 30\sin(\omega t + 10°)$ V 和 $v_2 = 20\sin(\omega t + 50°)$ V，下列叙述哪个是正确的？
(a) v_1 超前 v_2 (b) v_2 超前 v_1
(c) v_2 滞后 v_1 (d) v_1 滞后 v_2

7 $10\sin(\omega t - 30°)$ 的平均值是：
(a) 0 (b) 5
(c) 7.07 (d) 10
(e) 14.14

8 $10\sin(\omega t - 30°)$ 的有效值是：
(a) 0 (b) 5
(c) 7.07 (d) 10
(e) 14.14

9 示波器可以直接用来测量电流。

(a) 正确 (b) 错误

10 示波器不能测量的物理量是：

(a) 电压 (b) 频率

(c) 相位变化 (d) 功率

答案：1 (a)，2 (c)，3 (b)，4 (c)，5 (c)，6 (b)，(d)，7 (a)，8 (c)，9 (b)，10 (d)

习题

11.2 节

1 正弦波的峰值为 1.2V，计算峰峰值。

2 某交流电压为 $v=120\sin(2000t)$ V，计算：(a) 峰值电压，(b) 峰峰值，(c) 当 $t=1$ms 时的瞬时值。

3 给定 $i(t)=24\cos(377t)$ mA，试问当$t=0$，10 和 40ms 时 $i(t)$ 的值。

4 某交流电流可表示为 $i(t)=I_m\sin(754t)$ A，若 $t=2$ms是电流值为 10A，试计算电流的峰值。

5 给定正弦电压 $v=10\sin(337t)$ V，试计算当 $t=2$ms、14.5ms 和 25.2ms 的电压瞬时值。

11.3 节

6 将下列角度转化为弧度。

(a) 22.5 (b) 65

(c) 122 (d) 270

7 将下列弧度转化为角度。

(a) $\pi/5$ (b) $6\pi/7$

(c) 2.368 (d) 4.5

8 试计算下列频率值对应的周期。

(a) 50Hz (b) 600Hz

(c) 2kHz (d) 1MHz

9 试计算下列周期对应的频率值。

(a) 0.4s (b) 2ms

(c) 30μs

10 试计算下列波形的幅度和频率。

(a) $5\sin(2\pi t)$ (b) $10\sin(377t)$

(c) $30\sin(10^6 t)$ (d) $0.04\sin(42.56t)$

11 如图 11-13 所示的波形，

(a) 计算周期

(b) 计算频率

(c) 图中显示了几个循环？

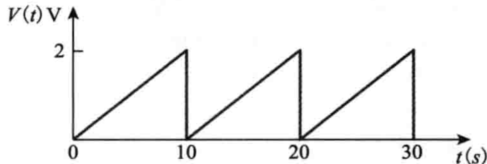


图 11-13 习题 11 的波形图

12 一个频率为 60Hz 的周期波形，需要多长时间可以完成 10 个循环？

13 一个周期波在 2 秒内完成了 100 个循环，试计算这个波形的频率。

14 交流发电机在 2ms 内完成了一个循环，试计算它的频率。

15 方波经过 40ms 时间间隔电压值为 +20V，又经过 40ms 电压值为 −20V，然后不断重复此过程，试计算该方波的频率。

16 交流信号的频率加倍，试说明该信号的周期如何变化。

17 周期为 4ms 的波其角频率是多少。

18 如图 11-14 所示的具有三角波形的电流，试计算：(a) 周期，(b) 频率，(c) 角频率，(d) 峰值，(d) 峰峰值。

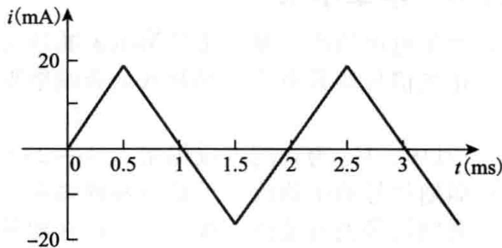


图 11-14 习题 18 的电流波形

19 某电路中，电压源为 $v_s(t)=12\sin(10^3t+24°)$ V。

(a) 该电压的角频率是多少？

(b) 该电源的频率是多少？

(c) 计算电压的周期。

(d) 计算当 $t=2.5$ms 时 v_s 的值。

20 电路中电流源为 $i_s(t)=8\cos(500\pi t-25°)$ A。

(a) 该电流的幅度是多少？

(b) 角频率是多少？

(c) 计算电流的频率。

(d) 计算当 $t=2$ms 时 i_s 的值。

21 将下列函数表示为余弦形式：

(a) $4\sin(\omega t-30°)$

(b) $-2\sin(6t)$

(c) $-10\sin(\omega t+20°)$

22 将下列函数表示为正弦形式：

(a) $2\cos(\omega t)$

(b) $10\cos(\omega t+20°)$

(c) $-70\cos(\omega t+30°)$

23　(a) 将 $v(t)=8\cos(7t+15°)$ 用正弦形式表示。

(b) 将 $i(t)=-10\sin(3t-85°)$ 转化为余弦形式。

24　正弦波电压 $v=A\sin\theta$ 当 $\theta=30°$ 时其瞬时值为 8V，试计算当 $\theta=120°$ 时的波形值。

25　给定电压波形为 $v=200\sin(521t+25°)$，试计算：(a) 该波形的幅度值，(b) 频率，(c) 周期，(d) 相位。

11.4 节

26　给定 $v_1(t)=20\sin(\omega t+60°)$ 和 $v_2(t)=60\cos(\omega t-10°)$，试确定这两个正弦量间的相位差，并指出哪一个是滞后的。

27　对下列各组正弦量，确定哪个是超前的，超前多少？

(a) $v(t)=10\cos(4t-60°)$ 和 $i(t)=4\sin(4t+50°)$

(b) $v_1(t)=4\cos(377t+10°)$ 和 $v_2(t)=-20\cos(377t)$

(c) $x(t)=13\cos(2t)+5\sin(2t)$ 和 $y(t)=15\cos(2t-11.8°)$

28　对下列各组正弦量，确定哪个是超前的，哪个是滞后的，超前多少？滞后多少？

(a) $v=20\sin(\omega t-30°)$ 和 $i=2\sin(\omega t-90°)$

(b) $v=20\sin(\omega t+15°)$ 和 $i=2\sin(\omega t+60°)$

(c) $v=20\sin(\omega t+45°)$ 和 $i=2\sin(\omega t-45°)$

11.5 节

29　峰峰值为 10V 的正弦波，其方均根值是多少？

30　电流一个周期的完整波形如图 11-15 所示，试计算其平均值。

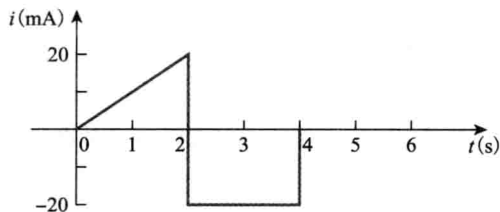


图 11-15　习题 30 的波形图

31　计算下列正弦量的方均根值。

(a) $v=10\sin(377t)$ V

(b) $i=2\sin(200t+30°)$ mA

32　若正弦波 $V_{rms}=6V$，试问它的幅度是多少？

33　计算图 11-16 所示周期信号的平均值和方均根值。

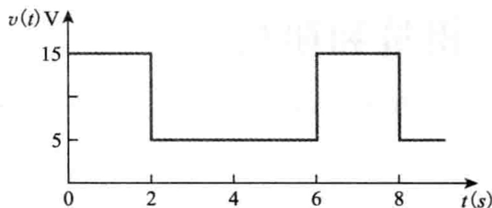


图 11-16　习题 33 的波形图

34　计算图 11-17 所示波形的方均根值。

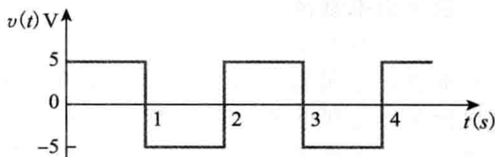


图 11-17　习题 34 的波形图

35　计算图 11-18 所示波形的有效值。

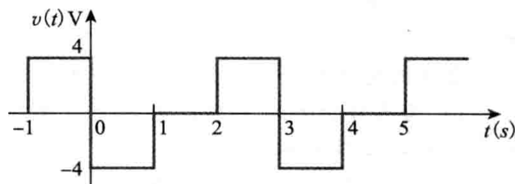


图 11-18　习题 35 的波形图

36　计算图 11-19 所示电流波形的平均值和方均根值。

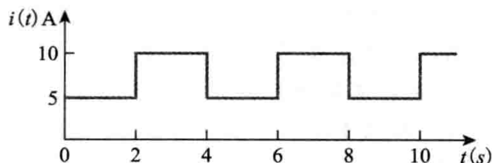


图 11-19　习题 36 的波形图

37　一台水果榨汁机与 120Vrms 的电源相连接，且额定功率为 1.6kW。试计算：(a) 搅拌器的阻值，(b) 电流的方均根值。

38　计算机从 120V 电源得到 3.2A 的电流，计算：(a) 电流的平均值，(b) 电流的方均根值，(c) 电流平方的平均值，(d) 电流的幅度值。

11.6 节

39　试说明怎样使用示波器测量电压和频率。

40　示波器水平扫描每刻度为 0.2ms，若显示出信号的一个周期占用 4 个水平刻度，试计算该信号的频率。

第12章

相量和阻抗

领导之道，就是取得在管理科学看来不可能的成就的艺术。

——科林·鲍威尔（Colin Powell）

拓展职业生涯

职业道德规范

工程师是对全世界人民的经济和社会福祉有着重要贡献的一个职业。作为这个重要职业的成员，工程师被期待展现出最高标准的正直和诚实。遗憾的是，工程学专业课程非常之多，以至于许多学校没有余力开设道德规范课程。因此，这里将电气电子工程协会（IEEE）的职业道德准则列出，让读者了解工程职业所应具备的道德行为。



工程技师在工作

（© Getty RF）

作为IEEE组织的成员，应该认识到技术会影响全世界的生活品质，愿意承担对职业、同行、社会的责任和义务，接受最高的道德和职业行为准则的约束，并且承诺：

1）负责任地制定与公众的安全、健康和幸福相一致的工程决策，及时地披露可能危及公众和环境的各种因素；

2）无论何时都应尽可能避免实际的或已察觉到的利益冲突，当确定其存在时，明确告知当事各方；

3）基于已有数据资料坦诚地实事求是地陈述声明或预算；

4）拒绝一切形式的贿赂；

5）加深对技术本身的理解，提高领会其应用范围与预期效果的能力；

6）保持与提高自身技术竞争力，只在训练合格或具备经验时，或是在充分了解有关限制之后，才能承担他人的技术任务；

7）对技术工作，坦诚地征求、接受意见和提出批评，承认与改正错误，并尊重他人的贡献；

8）公平地对待所有人，不分种族、宗教、性别、年龄或国籍；

9）避免由于伪造或诬告的行为伤害他人以及其财产、声誉和工作；

10）在同事和合作者的职业发展中予以帮助，并在遵循本道德准则的条件下支持他们。

——资料由IEEE提供，©2011 IEEE

资料经IEEE许可转载

12.1 引言

第11章详细介绍了正弦信号的有关知识。正弦信号可以很容易地用相量（phasor）来表示，相量比正弦函数和余弦函数处理起来更为方便。

相量是一个表示正弦量的幅度和相位的复数。

正弦信号由三个要素（幅度、相位和频率）确定。通常电路中的电压和电流具有相同的频率，因此，可以用一个只含有两个度量（正弦量的幅度和相位）的数值来表示电压和电流，例如相量。

相量为分析由正弦电源激励的线性电路提供了一种简单的方法，否则这类电路的求解将非常耗时。利用相量求解交流电路的概念是由斯坦梅茨[㊀]于 1893 年首次提出的。本章提到的知识方法（欧姆定律、KCL、KVL、分流原理、分压原理和类似的定理）都是直流电路分析方法的扩展。唯一的不同点是交流量是复数，而直流量是实数。虽然交流电路的复数运算比较复杂，但是不会改变电路的基本原理。

12.2　相量和复数

在完整地定义相量并将其用于电路分析之前，需要彻底地复习有关复数的知识。

复数[㊁] z 的直角坐标形式为

$$z = x + \mathrm{j}y \tag{12-1}$$

其中，$\mathrm{j}=\sqrt{-1}$，x 是 z 的实部，y 是 z 的虚部[㊂]。

复数 z 也可以表示为极坐标形式：

$$z = r\underline{/\phi} \tag{12-2}$$

其中，r 为 z 的模值，ϕ 为 z 的相位。至此，我们得到复数 z 的两种表示形式：

$$\begin{aligned} z &= x + \mathrm{j}y（直角坐标形式）\\ z &= r\underline{/\phi}（极坐标形式）\end{aligned} \tag{12-3}$$

直角坐标形式与极坐标形式之间的关系如图 12-1 所示，图中 x 轴表示复数 z 的实部，y 轴表示复数 z 的虚部。给定 x 与 y，即可得到 r 与 ϕ：

$$r=\sqrt{x^2+y^2}, \quad \phi=\arctan\frac{y}{x} \tag{12-4}$$

（在计算式（12-4）中的 ϕ 值时必须谨慎小心。详见附录 B。）另一方面，如果已知 r 与 ϕ 也可以求得 x 与 y：

$$x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi$$

于是，复数 z 可以写作：

$$\boxed{z = x + \mathrm{j}y = r\underline{/\phi} = r(\cos\phi + \mathrm{j}\sin\phi)} \tag{12-5}$$

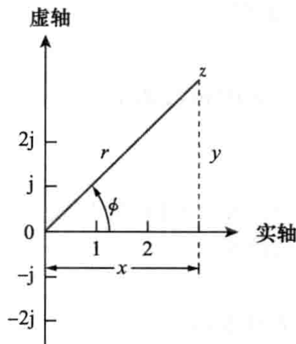


图 12-1　复数 $z=x+\mathrm{j}y=r\underline{/\phi}$ 的表示方法

复数的加减运算利用直角坐标表示更为方便，而乘除运算则用极坐标更好。给定复数，

$$z = x + \mathrm{j}y = r\underline{/\phi} \quad z_1 = x_1 + \mathrm{j}y_1 = r_1\underline{/\phi_1}$$
$$z_2 = x_2 + \mathrm{j}y_2 = r_2\underline{/\phi_2}$$

则有如下运算公式非常有用。

加法：

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + \mathrm{j}(y_1 + y_2) \tag{12-6a}$$

减法：

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + \mathrm{j}(y_1 - y_2) \tag{12-6b}$$

乘法：

㊀ 查尔斯·普洛特斯·斯坦梅茨（Charles Proteus Steinmetz，1865—1923）是一位德裔奥地利数学家和电气工程师。

㊁ 附录 B 提供了一个有关复数的简明教程。

㊂ 数学上，符号 i 用来表示虚数。然而，在工程中由于 i 表示时变电流，因而用符号 j 代替 i。

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \underline{/(\phi_1 + \phi_2)} \tag{12-6c}$$

除法：

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \underline{/(\phi_1 + \phi_2)} \tag{12-6d}$$

倒数：

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} \underline{/-\phi} \tag{12-6e}$$

平方根：

$$\sqrt{z} = \sqrt{r} \underline{/\phi/2} \tag{12-6f}$$

共轭复数：

$$z^* = x - \mathrm{j}y = r \underline{/-\phi} \tag{12-6g}$$

由式（12-6e）可以看出：

$$\frac{1}{\mathrm{j}} = -\mathrm{j} \tag{12-7a}$$

和

$$\mathrm{j}^2 = -1 \tag{12-7b}$$

［可以从 $\mathrm{j}=\sqrt{-1}$ 得出式（12-7b）］。以上均为复数的基本性质，有关复数的其他特性参见本书附录 B。

相量表示的依据是欧拉（Euler）公式。欧拉公式就是利用复数的极坐标形式来表示 z，也就是，

$$\boxed{\mathrm{e}^{\pm \mathrm{j}\phi} = \cos\phi \pm \mathrm{j}\sin\phi} \tag{12-8}$$

上式表明可以将 $\cos\phi$ 与 $\sin\phi$ 分别看作 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}$ 的实部与虚部，即：

$$\cos\phi = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}) \tag{12-9a}$$

$$\sin\phi = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}) \tag{12-9b}$$

其中，Re 与 Im 分列表示求实部运算（real part）和求虚部运算（imaginary part）。已知正弦信号

$$v(t) = V_\mathrm{m}\sin(\omega t + \phi),$$

可将其表示为

$$v(t) = V_\mathrm{m}\sin(\omega t + \phi) = \mathrm{Im}(V_\mathrm{m}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\phi)}) = \mathrm{Im}(V_\mathrm{m}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})$$

因此，

$$\boxed{v(t) = \mathrm{Im}(\mathbf{V}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})} \tag{12-10}$$

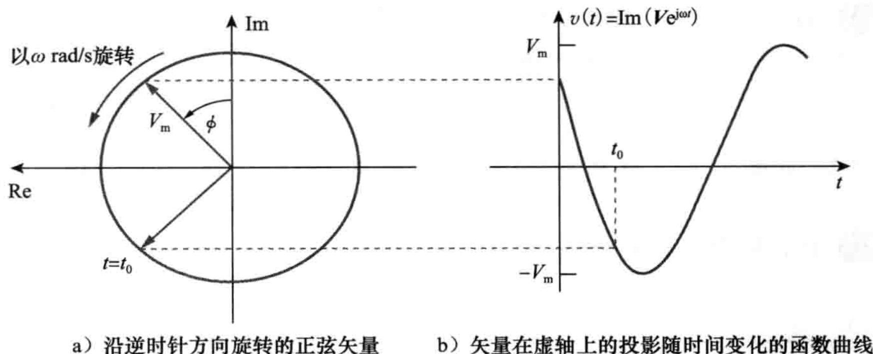
其中，

$$\mathbf{V} = V_\mathrm{m}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi} = V_\mathrm{m} \underline{/\phi} \tag{12-11}$$

于是，$\mathbf{V}$ 称为正弦信号 $v(t)$ 的*相量表示*（phasor representation）。换句话说，相量就是正弦信号的幅度与相位的复数表示。相量还可以看作是省略了时间依赖关系的正弦信号的等效数学表达。

理解式（12-10）的一种方法是在复平面上画出正弦矢量（sinor）$\mathbf{V}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}=V_\mathrm{m}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\theta)}$，随着时间的增加，该正弦矢量在半径为 V_m 的圆周上，沿逆时针方向以角速度 ω 做圆周运动，如图 12-2a 所示。$v(t)$ 可以看作正弦矢量 $\mathbf{V}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ 在虚轴上的投影，如图 12-2b 所示。正弦矢量在 $t=0$ 时刻的值就是正弦信号 $v(t)$ 的相量 $\mathbf{V}$，正弦矢量也可以看作一个旋转相量。所以，只要将正弦信号表示为一个相量，其中便隐含了 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ 项。因此，在进行相量运算时，切记相量的频率 ω 是非常重要的，否则，就会出现严重的错误。

由式（12-10）表明，要得到给定相量 $\mathbf{V}$ 的正弦信号，只需用时间因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ 乘以该相量



a）沿逆时针方向旋转的正弦矢量　　b）矢量在虚轴上的投影随时间变化的函数曲线

图 12-2　$\mathbf{V}e^{j\omega t}$ 的表示方法

后取虚部即可。相量作为一个复数，同样可以表示为直角坐标形式、极坐标形式或指数形式。由于相量有模值和相位（即“方向”），因此与矢量具有类似的特性，常用黑体字母表示。例如，相量 $\mathbf{V}=V_m\angle\phi$ 与 $\boldsymbol{I}=I_m\angle-\phi$ 的图形表示如图 12-3 所示。这种相量的图形表示法称为相量图（phasor diagram）。

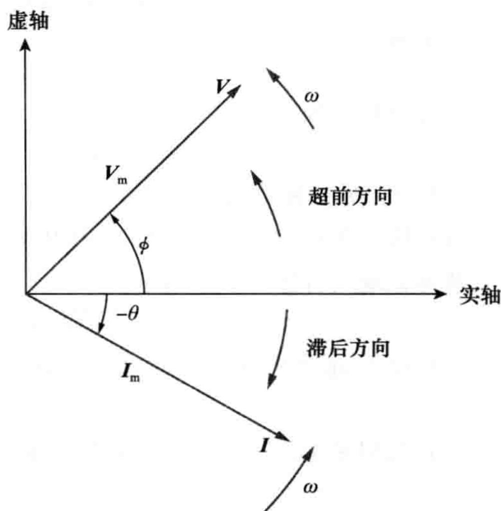


图 12-3　$\mathbf{V}=V_m\angle\phi$ 与 $\boldsymbol{I}=I_m\angle-\theta$ 的相量图表示

式（12-10）和式（12-11）表明，求取与正弦信号相对应的相量时，首先要将正弦信号表示为正弦函数形式，以便将正弦信号写成复数的虚部，然后去掉时间因子 $e^{j\omega t}$，其余部分即正弦信号对应的相量。该转换关系可以归纳为

$$\boxed{\underset{\text{时域表示}}{v(t)=V_m\sin(\omega t+\phi)}\Leftrightarrow\underset{\text{相量域表示}}{\mathbf{V}=V_m\angle-\phi}}\tag{12-12}$$

注意，在式（12-12）中去除了频率（或时间）因子 $e^{j\omega t}$，由于 ω 是常量，所以在相量域表示中没有明确写出频率。然而，电路的响应仍然取决于频率 ω。

$v(t)$ 与 $\mathbf{V}$ 之间的区别可归纳如下：

1）$v(t)$ 是瞬时或时间域表示，而 $\mathbf{V}$ 是频域或相量域表示。

2）$v(t)$ 是与时间有关的，而 $\mathbf{V}$ 与时间无关（读者常常会忘记这一区别）。

3）$v(t)$ 总是实数没有复数项，而 $\mathbf{V}$ 通常为复数。

最后，必须牢记的是，相量分析仅适用于频率恒定的情况。即只有当两个或多个正弦信号具有相同的频率时，才能应用相量进行运算。

最后，本章讨论的复数代数运算用 TI-89 Titanium 计算器可以非常简单地处理。计算器中输入复数 $x+jy$，直角坐标形式可输入（x，y）或极坐标形式输入（$r\angle\phi$）。在极坐标形式中，按下模式键（MODE）来进行模式设置，它可以选择角度 ϕ 是弧度（radian）还是度数（degree），并确定最终的计算结果是直角坐标形式还是极坐标形式。一旦模式选择完毕，应按下回车键（ENTER）。例如，如果我们选择直角坐标形式（RECTANGULAR）作为复数形式，不管输入的是什么形式，显示的复数都是直角坐标形式。

例 12-1 如果 $z_1=3+j5$ 和 $z_2=6-j8$，试计算（a）z_1+z_2；（b）z_1z_2。

解：（a）$z_1+z_2=(3+j5)+(6-j8)=9-j3$

（b）$z_1z_2=(3+j5)(6-j8)=18-j24+j30-j^2 40=18+j6+40=58+j6$ 其中 $j^2=-1$

◀

练习 12-1 如果 $z_1=2-j4$ 和 $z_2=4+j7$，试计算（a）z_1-z_2 （b）z_1/z_2。

答案：（a） $-2-j11$；（b） $-0.3077-j0.4615$

例 12-2 试计算如下复数的值：

（a）$(40\underline{/50^\circ}+20\underline{/-30^\circ})^{1/2}$

（b）$\dfrac{10\underline{/-30^\circ}+(3-j4)}{(2+j4)(3-j5)}$

解：（a）可以利用两种方法计算复数值。

方法 1：手算，利用极坐标与直角坐标之间的转换关系可得：

$$40\underline{/50^\circ}=40(\cos 50^\circ+j\sin 50^\circ)=25.71+j30.64$$

$$20\underline{/-30^\circ}=20[\cos(-30^\circ)+j\sin(-30^\circ)]=17.32-j10$$

相加后得到：

$$40\underline{/50^\circ}+20\underline{/-30^\circ}=43.03+j20.64=47.72\underline{/25.63^\circ}$$

取其平方根后得到：

$$(40\underline{/50^\circ}+20\underline{/-30^\circ})^{1/2}=\sqrt{47.72}\underline{/25.63^\circ/2}=6.91\underline{/12.82^\circ}$$

方法 2：另一种方法，利用 $TI-89$Titianium 计算器。因为期望最终结果为极坐标形式，因此按下 MODE 。选择 POLAR 作为复数形式，然后重复按下 ENTER。

然后在输入行输入如下数字：

$$\sqrt{((40\underline{/50^\circ})+(20\underline{/-30^\circ}))}$$

之后按下 ◆ ENTER ，结果显示为

$$6.908\underline{/12.81}$$

（b）利用极坐标与直角坐标转换关系，可得：

$$\frac{10\underline{/-30^\circ}+(3-j4)}{(2+j4)(3-j5)}=\frac{8.66-j5+(3-j4)}{(2+j4)(3+j5)}=\frac{11.66-j9}{-14+j22}$$

$$=\frac{14.73\underline{/-37.66^\circ}}{26.08\underline{/122.47^\circ}}=0.565\underline{/-160.13^\circ}$$

另一种方法，可以利用利用 TI-89 Titianium 计算器，输入数字，

$$((10\underline{/-30^\circ})+(3-4*i))/((2+4*i)*(3+5*i))$$

然后按下 ◆ ，结果显示为 ENTER

$$0.5648\underline{/-160.134}$$

◀

练习 12-2 试计算下列复数的值：

（a）$[(5+j2)(-1+j4)-5\underline{/60^\circ}]^*$

（b）$\dfrac{10+j5+3\underline{/40^\circ}}{-3+j4}+10\underline{/30^\circ}$

答案：（a） $-15.5-j13.67$，（b） $8.293+j2.2$

例 12-3 试将下列正弦信号转换为相量：

（a）$v(t)=4\sin(30t+20^\circ)$

（b）$i(t)=6\cos(50t-40^\circ)$

解：（a）$v(t)$ 的相量为

$$\mathbf{V}=4\underline{/20^\circ}$$

（b）首先利用式（11-11）将余弦形式转化为正弦形式，则：

$$i(t)=6\cos(50t-40^\circ)=6\sin(50t-40^\circ+90^\circ)=6\sin(50t+50^\circ)$$

于是 $i(t)$ 的相量为

$$\boldsymbol{I}=6\angle 50^\circ$$

注意，相量是用极坐标形式表示的复数。◀

练习 12-3　试以相量来表示下列正弦量：

（a）$i(t)=4\sin(10t+10^\circ)$ A

（b）$v(t)=-7\cos(2t+40^\circ)$ V　　**答案：**（a）$4\angle -10^\circ$A，（b）$7\angle -50^\circ$V

例 12-4　试求如下相量所表示的正弦信号：

（a）$\boldsymbol{I}=-3+\mathrm{j}4$A

（b）$\mathbf{V}=\mathrm{j}8\mathrm{e}^{-\mathrm{j}20^\circ}$V

解：（a）$\boldsymbol{I}=-3+\mathrm{j}4=5\angle 126.87^\circ$，将其转换到时域，则有，

$$i(t)=5\sin(\omega t+126.87^\circ)(\mathrm{A})$$

（b）由于 $\mathrm{j}=1\angle 90^\circ$，所以，

$$\boldsymbol{V}=\mathrm{j}8\angle -20^\circ=(1\angle 90^\circ)\quad(8\angle -20^\circ)=8\angle(90^\circ-20^\circ)=8\angle 70^\circ(\mathrm{V})$$

将其转到时域，可得：

$$v(t)=8\sin(\omega t+70^\circ)(\mathrm{V})$$ ◀

练习 12-4　试求对应于如下相量的正弦信号：

（a）$\mathbf{V}=-10\angle 30^\circ$

（b）$\boldsymbol{I}=\mathrm{j}(5-\mathrm{j}12)$　**答案：**（a）$v(t)=10\sin(\omega t+210^\circ)$；（b）$i(t)=13\sin(\omega t+22.62^\circ)$

例 12-5　已知 $i_1(t)=4\cos(\omega t+30^\circ)$ 和 $i_2(t)=5\sin(\omega t-20^\circ)$，试计算上述两信号之和。

解：本题可用于说明相量的一个重要应用——用于计算同频正弦信号之和。电流$i_1(t)$不为标准的正弦形式，将余弦函数转换为正弦函数的方法是加上 90°，于是得到

$$i_1(t)=4\cos(\omega t+30^\circ)=4\sin(\omega t+30^\circ+90^\circ)$$

因此，相量为

$$\boldsymbol{I}_1=4\angle 120^\circ$$

$i_2(t)$ 已经为标准形式，因此其相量为

$$\boldsymbol{I}_2=5\angle -20^\circ$$

如果令 $i=i_1+i_2$，则有：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{I}&=\boldsymbol{I}_1+\boldsymbol{I}_2=4\angle 120^\circ+5\angle -20^\circ\\&=-2+\mathrm{j}3.464+4.698-\mathrm{j}1.71=2.698+\mathrm{j}1.754\\&=3.218\angle 33.03^\circ(\mathrm{A})\end{aligned}$$

将上述结果转换到时域，得到

$$i(t)=3.218\cos(\omega t+33.03^\circ)\ (\mathrm{A})$$ ◀

练习 12-5　如果 $v_1=-10\sin(\omega t+30^\circ)$ V，$v_2=20\cos(\omega t-45^\circ)$ V，试计算 $v=v_1+v_2$。

答案：$v(t)=10.66\sin(\omega t+59.05^\circ)$ V

12.3　电路元件的相量关系

至此我们已经掌握了如何在相量域或频域中表示电压或电流，读者自然会问，如何将相量方法应用于包含无源元件 R，L，C 的电路中呢？所需要做的就是将电路中各个元件的电压-电流关系由时域转换到相量域，仍然设定电压电流遵循无源符号规则。

首先从电阻器开始，如果流过电阻器 R 的电流为 i，则由欧姆定律可知其两端的电压为

$$v = iR = RI_m\sin(\omega t + \phi) \tag{12-13}$$

该电压的相量形式为

$$\mathbf{V} = RI_m\underline{/\phi} \tag{12-14}$$

而电流的相量表示为 $\mathbf{I}=I_m\underline{/\phi}$，因此，

$$\mathbf{V} = R\mathbf{I} \tag{12-15}$$

上式表明，电阻在相量域中的电压-电流关系依然服从欧姆定律，与时域的情况相同，图 12-4 给出了相量域中电阻的电压-电流关系。由式（12-15）可知，电阻的电压与电流是同相的，如图 12-5 的相量图所示。

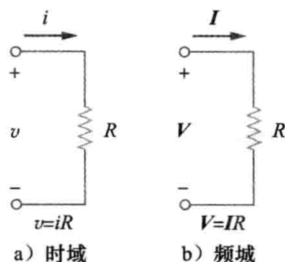


图 12-4 电阻的电压-电流关系

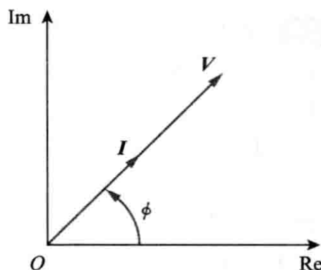


图 12-5 电阻的相量图

对于电感而言，假定流过电感的电流为 $i(t)=I_m\sin(\omega t+\phi)$，则电感两端的电压为

$$v = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \omega LI_m\cos(\omega t + \phi) \tag{12-16}$$

由三角公式可知 $\cos A=\sin(A+90°)$，于是电感两端的电压可以写为

$$v = \omega LI_m\sin(\omega t + \phi + 90°) \tag{12-17}$$

将其转换为相量，得到：

$$\mathbf{V} = \omega LI_m e^{j(\phi+90°)} = \omega LI_m e^{j\phi}e^{j90°} = \omega LI_m\underline{/\phi e^{j90°}} \tag{12-18}$$

由于 $I_m\underline{/\phi}=\mathbf{I}$，且由式（12-8）可知 $e^{j90°}=j$，因此，

$$\boxed{\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I}} \tag{12-19}$$

上式表明，电感两端电压的幅度为 ωLI_m，相位为 $\phi+90°$。电压与电流的相位差为 90°，并且电流滞后于电压 90°。电感的电压-电流关系如图 12-6 所示，图 12-7 所示为两者的相量图。

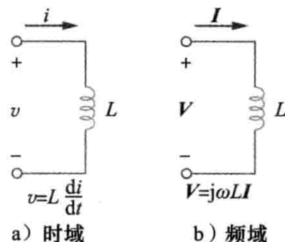


图 12-6 电感的电压-电流关系

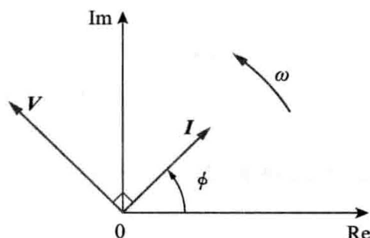


图 12-7 电感的相量图，$\mathbf{I}$ 滞后于 $\mathbf{V}$ 90°

对于电容 C 而言，假定电容两端的电压为 $v(t)=V_m\sin(\omega t+\phi)$，则流过电容的电流为

$$i = C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{12-20}$$

按照分析电感的步骤，可以得到：

$$\mathbf{I} = j\omega C\mathbf{V}$$

或者，

$$\boxed{\boldsymbol{V} = \boldsymbol{I}/\mathrm{j}\omega C} \tag{12-21}$$

上式表明，电压与电流的相位相差 90°，具体来说就是电流超前于电压 90°。图 12-8 给出了电容的电压-电流关系，而图 12-9 所示则为二者的相量图。表 12-1 总结了电路无源元件的时域与相量域表示。注意，除非特别说明，计算结果应该与问题保持相同的形式：相量对应相量，正弦量对应正弦量，直角坐标对应直角坐标，极坐标对应极坐标。

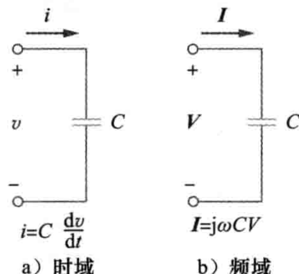


图 12-8　电容的电压-电流关系

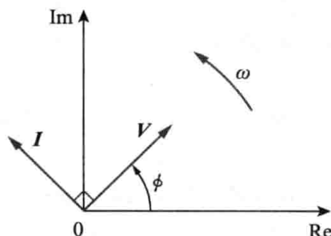


图 12-9　电容的相量图，$\boldsymbol{I}$ 超前于 $\boldsymbol{V}$ 90°

为了便于记忆电感和电容的相量域电流和电压关系，只需记住“ELI the ICE man”。

E＝电压（Voltage，emf）；I＝电流（Current）；L＝电感器（Inductor）；C＝电容器（Capacitor）

ELI（感性电路）——电压超前电流

ICE（容性电路）——电流超前电压

表 12-1　电压-电流关系总结

元件	时域	频域
R	$v=Ri$	$\boldsymbol{V}=R\boldsymbol{I}$
L	$v=L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$	$\boldsymbol{V}=\mathrm{j}\omega L\boldsymbol{I}$
C	$i=C\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$	$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{I}/\mathrm{j}\omega C$

例 12-6　将电压 $v(t)=12\sin(60t+45°)$ 作用在 0.1H 电感两端，试计算流过该电感的稳态电流。

解：对于电感而言，$\mathrm{V}=\mathrm{j}\omega L\boldsymbol{I}$，其中 $\omega=60\mathrm{rad/s}$，并且 $\boldsymbol{V}=12\underline{/45°}\mathrm{V}$。因此，

$$\boldsymbol{I} = \frac{\boldsymbol{V}}{\mathrm{j}\omega L} = \frac{12\underline{/45°}}{\mathrm{j}60\times 0.1} = \frac{12\underline{/45°}}{6\underline{/90°}} = 2\underline{/-45°}(\mathrm{A})$$

将该电流转换到时域，得到：

$$i(t) = 2\sin(60t-45°)(\mathrm{A})$$ ◀

练习 12-6　将电压 $v(t)=6\cos(100t-30°)$ 作用在 50μF 电容两端，试计算流过该电容的电流。

答案：$30\cos(100t+60°)$ mA

12.4　阻抗和导纳

前一节中讨论了三个无源元件在相量域的电压-电流关系为

$$\boldsymbol{V} = R\boldsymbol{I},\quad \boldsymbol{V} = \mathrm{j}\omega L\boldsymbol{I},\quad \boldsymbol{V} = \boldsymbol{I}/\mathrm{j}\omega C \tag{12-22}$$

利用相量电压与相量电流之比表示上述方程可得：

$$\frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{I}} = R,\quad \frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{I}} = \mathrm{j}\omega L,\quad \frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{I}} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} \tag{12-23}$$

由以上三个表达式，则可得到任意一种无源元件欧姆定律的相量形式，即：

$$\boxed{\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{V}/\boldsymbol{I}\quad \text{或}\quad \boldsymbol{V} = \boldsymbol{Z}\boldsymbol{I}} \tag{12-24}$$

其中，$\boldsymbol{Z}$ 是一个与频率有关的量，称为阻抗（impedance），单位为欧姆。

电路的阻抗是指相量电压 $\boldsymbol{V}$ 与相量电流 $\boldsymbol{I}$ 之比，单位为欧姆（Ω）。

阻抗表示电路对正弦电流的阻碍程度。尽管阻抗是两个相量之比，但它本身不是相

量，因为阻抗没有相对应的按照正弦规律变化的量。

由式（12-23）可以很容易地得到电阻、电感与电容的阻抗，列于表 12-2。由表 12-2 可知：电感的阻抗 $\mathbf{Z}_L = \mathrm{j}\omega L$，电容的阻抗 $\mathbf{Z}_C = -\mathrm{j}/\omega C$。下面考虑角频率的两个极端情况，当 $\omega = 0$（即为直流源）时，$\mathbf{Z}_L = 0$，$\mathbf{Z}_C \to \infty$，这也证实了以前学过的知识，电感对直流相当于短路，电容对直流相当于开路；当 $\omega \to \infty$（即高频情况）时，$\mathbf{Z}_L \to \infty$，$\mathbf{Z}_C = 0$，表明对高频而言，电感相当于开路，电容相当于短路。图 12-10 说明了上述两种极端情况。

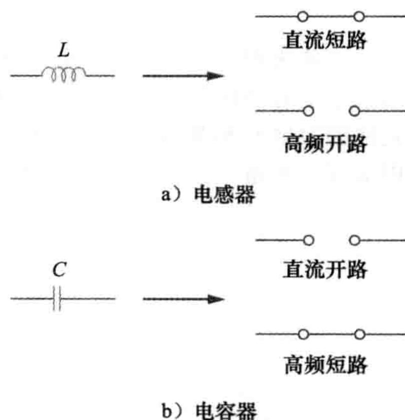


图 12-10 直流与高频时的等效电路

表 12-2 无源元件的阻抗与导纳

元件	阻抗	导纳
R	$\mathbf{Z}=R$	$\mathbf{Y}=1/R$
L	$\mathbf{Z}=\mathrm{j}\omega L$	$\mathbf{Y}=1/\mathrm{j}\omega L$
C	$\mathbf{Z}=1/\mathrm{j}\omega C$	$\mathbf{Y}=\mathrm{j}\omega C$

阻抗作为一个复数，可以用直角坐标形式表示为

$$\mathbf{Z} = R + \mathrm{j}X \tag{12-25}$$

其中，$R = \mathrm{Re}(\mathbf{Z})$ 为电阻（restistance），$X = \mathrm{Im}(\mathbf{Z})$ 为电抗（reactance）。电抗 X 可以为正值，也可以为负值。如果 X 为正值，则称阻抗为感性的，如果 X 为负值，则称阻抗为容性的。因此，由于电感的电流滞后于电感两端的电压，所以阻抗 $\mathbf{Z}=R+\mathrm{j}X$ 称为是感性（inductive）阻抗或滞后阻抗。而由于流过电容的电流超前于电容两端的电压，所以阻抗 $\mathbf{Z}=R-\mathrm{j}X$ 则称为是容性（capacitive）阻抗或超前阻抗。阻抗、电阻、电抗的单位均为欧姆。阻抗也可以表示为极坐标形式：

$$\mathbf{Z} = |\mathbf{Z}|\angle\theta \tag{12-26}$$

比较式（12-25）与式（12-26）可以推出：

$$\boxed{\mathbf{Z} = R + \mathrm{j}X = |\mathbf{Z}|\angle\theta} \tag{12-27}$$

其中，

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}, \quad \theta = \arctan\frac{X}{R} \tag{12-28a}$$

且

$$R = |\mathbf{Z}|\cos\theta, \quad X = |\mathbf{Z}|\sin\theta \tag{12-28b}$$

有时候采用阻抗的倒数，即导纳（admittance）运算起来比较方便。电路的导纳 $\mathbf{Y}$ 为流过电路的电流相量与电路两端的电压相量之比，即：

$$\boxed{\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{V}}} \tag{12-29}$$

导纳 $\mathbf{Y}$ 定义为阻抗的倒数，单位为西门子（S）。

由式（12-23）可以得到电阻、电感与电容的导纳，同样列于表 12-2。

导纳 $\mathbf{Y}$ 作为一个复数，可以表示为

$$\boxed{\mathbf{Y} = G + \mathrm{j}B} \tag{12-30}$$

其中，$G=\mathrm{Re}(\mathbf{Y})$ 称为电导（conductance），而 $B=\mathrm{Im}(\mathbf{Y})$ 称为电纳（susceptance）。导纳、电导与电纳的单位均为西门子。由式（12-25）与式（12-30）可得：

$$G + \mathrm{j}B = \frac{1}{R + \mathrm{j}X} \tag{12-31}$$

分母有理化后得到：

$$G+\mathrm{j}B=\frac{1}{R+\mathrm{j}X}\cdot\frac{R-\mathrm{j}X}{R-\mathrm{j}X}=\frac{R-\mathrm{j}X}{R^2+X^2} \tag{12-32}$$

由实部、虚部分别对应相等，得到：

$$G=\frac{R}{R^2+X^2},\quad B=-\frac{X}{R^2+X^2} \tag{12-33}$$

由此可见，$G\neq 1/R$，这与纯电阻电路不同。当然，如果 $X=0$，则有 $G=1/R$。注意，式 (12-33) 中的符号表示阻抗 $\mathbf{Z}$ 的正虚部对应导纳 $\mathbf{Y}$ 的负虚部，反之亦然。

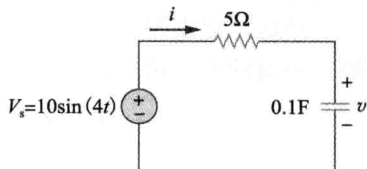


图 12-11　例 12-7 的电路原理图

例 12-7　试求如图 12-11 所示电路的 $v(t)$ 与 $i(t)$。

解：由电压源 $v_s(t)=10\sin 4t$，$\omega=4$，可得：

$$\mathbf{V}_s=10\underline{/0^\circ}\text{V}$$

则其阻抗为

$$\mathbf{Z}=R+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}=5+\frac{1}{\mathrm{j}4\times 0.1}=5-\mathrm{j}2.5(\Omega)$$

因此电流为

$$\mathbf{I}=\frac{\mathbf{V}_s}{\mathbf{Z}}=\frac{10\underline{/0^\circ}}{5-\mathrm{j}2.5}=\frac{10(5+\mathrm{j}2.5)}{(5-\mathrm{j}2.5)(5+\mathrm{j}2.5)}=\frac{10(5+\mathrm{j}2.5)}{5^2+2.5^2}$$
$$=1.6+\mathrm{j}0.8=1.789\underline{/26.57^\circ}(\text{A}) \tag{12-7-1}$$

电容器两端的电压为

$$\mathbf{V}=\mathbf{I}\mathbf{Z}_C=\frac{\mathbf{I}}{\mathrm{j}\omega C}=\frac{1.789\underline{/26.57^\circ}}{\mathrm{j}4\times 0.1}=\frac{1.789\underline{/26.57^\circ}}{0.4\underline{/90^\circ}}$$
$$=4.47\underline{/-63.43^\circ}(\text{V}) \tag{12-7-2}$$

将式 (12-7-1) 与式 (12-7-2) 中的 $\mathbf{I}$ 与 $\mathbf{V}$ 转换到时域，得到：

$$i(t)=1.789\sin(4t+26.57^\circ)(\text{A})$$
$$v(t)=4.47\sin(4t-63.43^\circ)(\text{V})$$

可以看出 $i(t)$ 超前于 $v(t)$ 90°，与预期结果相一致。◀

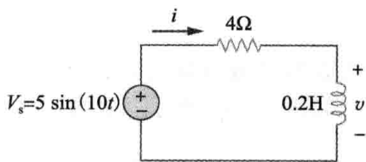


图 12-12　练习 12-7 的电路原理图

练习 12-7　试确定如图 12-12 所示电路中的 $v(t)$ 与 $i(t)$。

答案：2.236sin(10t+63.44°) V，1.118sin(10t−26.56°) A

12.5　阻抗合并

图 12-13 所示的是 N 个阻抗串联的形式。流过每个阻抗的电流为同一电流 $\mathbf{I}$，因此对该回路应用 KVL 可得，

$$\mathbf{V}=\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2+\cdots+\mathbf{V}_N=\mathbf{I}(\mathbf{Z}_1+\mathbf{Z}_2+\cdots+\mathbf{Z}_N) \tag{12-34}$$

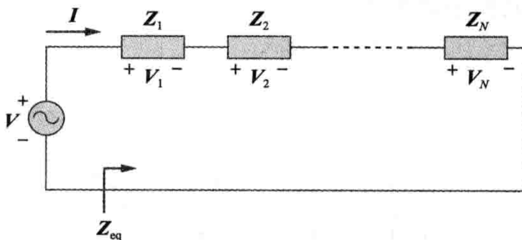


图 12-13　N 个阻抗串联

输入端的等效阻抗则为

$$\mathbf{Z}_{eq}=\mathbf{V}/\mathbf{I}=\mathbf{Z}_1+\mathbf{Z}_2+\cdots+\mathbf{Z}_N$$

即

$$\boxed{\mathbf{Z}_{eq}=\mathbf{Z}_1+\mathbf{Z}_2+\cdots+\mathbf{Z}_N} \tag{12-35}$$

上式表明串联阻抗的总阻抗或等效阻抗等于各个阻抗之和，与电阻串联的结论是相同的。

如图 12-14 所示，如果 $N=2$，流过阻抗的电流为

$$\boldsymbol{I}=\frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{Z}_1+\boldsymbol{Z}_2} \tag{12-36}$$

由于 $\boldsymbol{V}_1=\boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{I}$ 和 $\boldsymbol{V}_2=\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{I}$，则有

$$\boxed{\boldsymbol{V}_1=\frac{\boldsymbol{Z}_1}{\boldsymbol{Z}_1+\boldsymbol{Z}_2}\boldsymbol{V},\quad \boldsymbol{V}_2=\frac{\boldsymbol{Z}_2}{\boldsymbol{Z}_1+\boldsymbol{Z}_2}\boldsymbol{V}} \tag{13-37}$$

这就是分压原理（voltage divider rule）。

同理，可以得到 N 个并联阻抗的等效阻抗或等效导纳，如图 12-15 所示。并联的每个阻抗两端的电压都相同，因此对顶端节点应用 KCL 可得

$$\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}_1+\boldsymbol{I}_2+\cdots+\boldsymbol{I}_N=\boldsymbol{V}\left(\frac{1}{\boldsymbol{Z}_1}+\frac{1}{\boldsymbol{Z}_2}+\cdots+\frac{1}{\boldsymbol{Z}_N}\right) \tag{12-38}$$

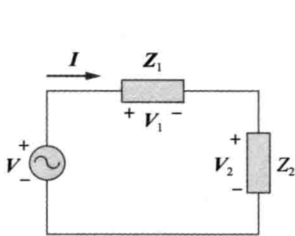


图 12-14 分压原理

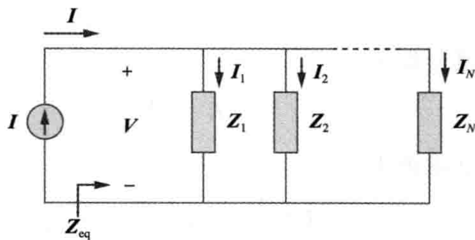


图 12-15 N 个阻抗并联

等效阻抗为

$$\frac{1}{\boldsymbol{Z}_{\text{eq}}}=\frac{\boldsymbol{I}}{\boldsymbol{V}}=\frac{1}{\boldsymbol{Z}_1}+\frac{1}{\boldsymbol{Z}_2}+\cdots+\frac{1}{\boldsymbol{Z}_N} \tag{12-39}$$

且等效导纳为

$$\boxed{\boldsymbol{Y}_{\text{eq}}=\boldsymbol{Y}_1+\boldsymbol{Y}_2+\cdots+\boldsymbol{Y}_N} \tag{12-40}$$

上式表明等效并联导纳的等效导纳等于各个导纳之和。

如图 12-16 所示，如果 $N=2$，等效阻抗则为

$$\boldsymbol{Z}_{\text{eq}}=1/\boldsymbol{Y}_{\text{eq}}=\frac{1}{\boldsymbol{Y}_1+\boldsymbol{Y}_2}=\frac{1}{1/\boldsymbol{Z}_1+1/\boldsymbol{Z}_2}=\frac{\boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{Z}_2}{\boldsymbol{Z}_1+\boldsymbol{Z}_2} \tag{12-41}$$

而且由于

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{I}\boldsymbol{Z}_{\text{eq}}=\boldsymbol{I}_1\boldsymbol{Z}_1=\boldsymbol{I}_2\boldsymbol{Z}_2$$

流过每个阻抗的电流为

$$\boldsymbol{I}_1=\frac{\boldsymbol{Z}_2}{\boldsymbol{Z}_1+\boldsymbol{Z}_2}\boldsymbol{I},\quad \boldsymbol{I}_2=\frac{\boldsymbol{Z}_1}{\boldsymbol{Z}_1+\boldsymbol{Z}_2}\boldsymbol{I} \tag{12-42}$$

这就是分流原理（current divider rule）。

电阻电路中的△-Y 和 Y-△转换同样适用于阻抗。参见图 12-17 所示的阻抗电路，其转换公式如下。

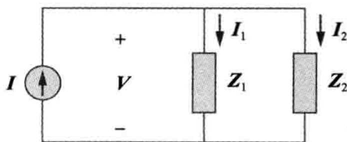


图 12-16 分流原理

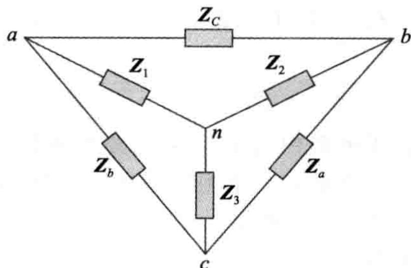


图 12-17 重叠绘制的 Y 形和△形网络

Y-△转换

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_a &= \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_3\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_1} \\ \mathbf{Z}_b &= \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_3\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_2} \\ \mathbf{Z}_c &= \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_3\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_3} \end{aligned} \tag{12-43}$$

△-Y 转换

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_1 &= \frac{\mathbf{Z}_b\mathbf{Z}_c}{\mathbf{Z}_a + \mathbf{Z}_b + \mathbf{Z}_c} \\ \mathbf{Z}_2 &= \frac{\mathbf{Z}_c\mathbf{Z}_a}{\mathbf{Z}_a + \mathbf{Z}_b + \mathbf{Z}_c} \\ \mathbf{Z}_3 &= \frac{\mathbf{Z}_a\mathbf{Z}_b}{\mathbf{Z}_a + \mathbf{Z}_b + \mathbf{Z}_c} \end{aligned} \tag{12-44}$$

当△形网络或 Y 形网络每条支路的阻抗均相等的时候，则称△形网络或 Y 形网络是平衡的（balanced）。

当△-Y 电路平衡时，式（12-43）和（12-44）可化简为

$$\mathbf{Z}_{\triangle} = 3\mathbf{Z}_{Y} \quad 或 \quad \mathbf{Z}_{Y} = \frac{1}{3}\mathbf{Z}_{\triangle} \tag{12-45}$$

其中，$\mathbf{Z}_Y = \mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_3$，$\mathbf{Z}_{\triangle} = \mathbf{Z}_a = \mathbf{Z}_b = \mathbf{Z}_c$。

正如本节所指出的，分压原理、分流原理、电路化简方法、阻抗等效以及 Y-△转换，皆适用于交流电路。在下一章中将会指出其他的直流电路分析技术，诸如叠加定理、节点分析法、网孔分析法、电源等效变换、戴维南定理和诺顿定理，也同样适用于交流电路。

例 12-8 试计算如图 12-18 所示电路的输入阻抗，假定电路的工作角频率为 $\omega=50\text{rad/s}$。

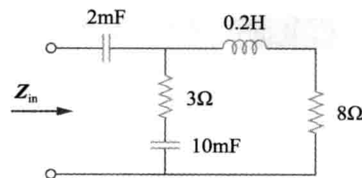


图 12-18 例 12-8 的电路原理图

解： 设 $\mathbf{Z}_1=2\text{mF}$ 电容的阻抗，$\mathbf{Z}_2=3\Omega$ 电阻与 10mF 电容串联的阻抗，$\mathbf{Z}_3=0.2\text{H}$ 电感与 8Ω 电阻串联的阻抗，则有：

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j50 \times 2 \times 10^{-3}} = -j10(\Omega)$$

$$\mathbf{Z}_2 = 3 + \frac{1}{j\omega C} = 3 + \frac{1}{j50 \times 10 \times 10^{-3}} = (3 - j2)(\Omega)$$

$$\mathbf{Z}_3 = 8 + j\omega L = 8 + j50 \times 0.2 = (8 + j10)(\Omega)$$

因此输入阻抗为

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{in} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 \,/\!/\, \mathbf{Z}_3 &= -j10 + \frac{(3-j2)(8+j10)}{11+j8} \\ &= -j10 + \frac{(44+j14)(11-j8)}{11^2+8^2} \\ &= (-j10 + 3.22 - j1.07)(\Omega) \end{aligned}$$

从而，

$$\mathbf{Z}_{in} = (3.22 - j12.07)(\Omega)$$

◀

练习 12-8 试确定如图 12-19 所示电路当 $\omega=10\text{rad/s}$ 时的输入阻抗。

答案：(32.376−j73.76)Ω

例 12-9 试计算如图 12-20 所示电路中的 $v_o(t)$。

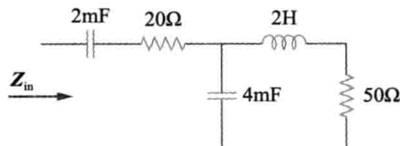


图 12-19 练习 12-8 的电路原理图

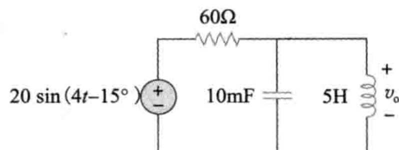


图 12-20 例 12-9 的电路原理图

解：为了在频域展开分析，首先必须将如图 12-20 所示的时域电路转换为如图 12-21 所示的相量域等效电路。因此，转换过程如下：

$v_s = 20\sin(4t-15°) \Rightarrow \mathbf{V}_s = 20\underline{/-15°}\text{V}, \omega = 4(\text{rad/s})$

$10\text{mF} \Rightarrow \dfrac{1}{j\omega C} = \dfrac{1}{j4\times 10\times 10^{-3}} = -j25(\Omega)$

$5\text{H} \Rightarrow j\omega L = j4\times 5 = -j20(\Omega)$

图 12-21 图 12-20 所示电路的频域等效电路

令：$\mathbf{Z}_1 = 60\Omega$ 电阻的阻抗，$\mathbf{Z}_2 = 10\text{mF}$ 电容器与 5H 电感的并联阻抗，则

$$\mathbf{Z}_1 = 60\Omega, \quad \mathbf{Z}_2 = -j25 \,/\!/\, j20 = \frac{-j25\times j20}{-j25+j20} = j100(\Omega)$$

由分压原理，可得

$$\mathbf{V}_o = \frac{\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1+\mathbf{Z}_2}\mathbf{V}_s = \frac{j100}{60+j100}(20\underline{/-15°})$$
$$= (0.8575\underline{/30.96°})(20\underline{/-15°}) = 17.15\underline{/15.96°}(\text{V})$$

将其转换到时域可得

$$v_o(t) = 17.15\sin(4t+15.96°)(\text{V})$$

◀

练习 12-9 试计算如图 12-22 所示电路中的 v_o。

答案：$v(t)=7.071\cos(10t-60°)$ (V)

例 12-10 试求出如图 12-23 所示电路中的电流 $\mathbf{I}$。

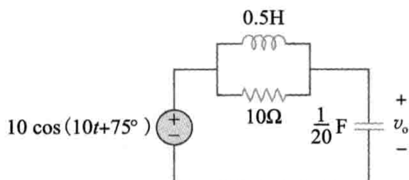


图 12-22 练习 12-9 的电路原理图

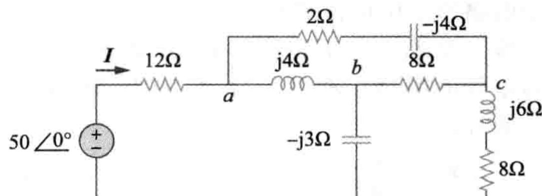


图 12-23 例 12-10 的电路原理图

解：电路中与节点 a、b、c 相连接的△形网路可以转换为 Y 形网络。转化后的电路如图 12-24 所示。利用式（12-44）可以求出该 Y 形网络中的各阻抗为

$$\mathbf{Z}_{an} = \frac{j4(2-j4)}{j4+2-j4+8} = \frac{4(4+j2)}{10} = (1.6+j0.8)(\Omega)$$

$$\mathbf{Z}_{bn} = \frac{j4(8)}{10} = j3.2(\Omega)$$

$$\mathbf{Z}_{cn} = \frac{8(2-j4)}{10} = (1.6-j3.2)(\Omega)$$

电源两端的总阻抗为

$$\mathbf{Z} = 12+\mathbf{Z}_{an}+(\mathbf{Z}_{bn}-j3)\,/\!/\,(\mathbf{Z}_{cn}+j6+8)$$
$$= 12+1.6+j0.8+(j0.2)\,/\!/\,(9.6+j2.8)$$
$$= 13.6+j0.8+\frac{j0.2(9.6+j2.8)}{9.6+j2.8+j0.2}$$

$$= 13.6 + j1 = 13.64\underline{/4.2^\circ}(\Omega)$$

所求的电流为

$$\boldsymbol{I} = \frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{Z}} = \frac{50\underline{/0^\circ}}{13.64\underline{/4.2^\circ}} = 3.666\underline{/-4.2^\circ}(\text{A})$$ ◀

练习 12-10　试求出如图 12-25 所示电路中的 $\boldsymbol{I}$。　**答案：** $6.364\underline{/4.22^\circ}A$

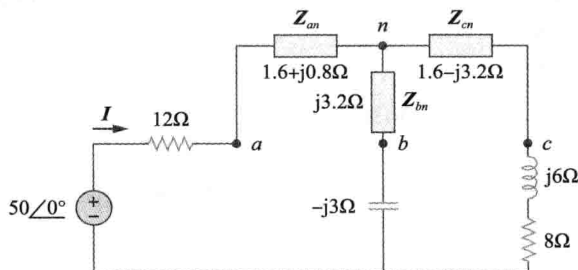


图 12-24　图 12-23 所示电路经△-Y 转换后的电路

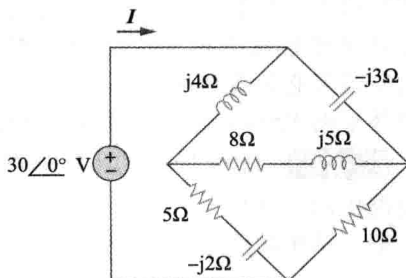


图 12-25　练习 12-10 的电路原理图

12.6　计算机辅助分析

本节介绍两种计算机软件 MATLAB 和 PSpice，利用它们可以处理本章相关内容。

12.6.1　MATLAB

MATLAB 软件可以画出正弦曲线，可以计算本章涉及的复数代数运算。例如，要画出 $0<t<2$ 区间内 $v(t)=10\sin(2\pi t-20^\circ)$ V 的曲线，可以使用下面的命令：

```
»t=0:0.01:2;        % start t from 0, increment by
                    0.01, and stop at 2
»ang=20*pi/180      % converts angle to radian;
»v=10*sin(2*pi*t - ang);
»plot(t,v)
```

得到的正弦曲线 $v(t)$ 如图 12-26 所示。

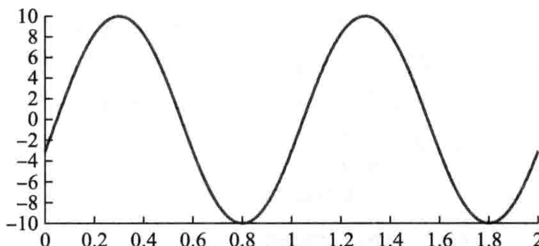


图 12-26　绘制的 $v(t)=10\sin(2\pi t-20^\circ)$ 曲线

MATLAB 可以处理复数运算，例如，计算例 12-1 中的复数运算可按照以下命令进行，

```
»z1= 3   + j*5;
»z2= 6   - j*8;
»z3= z1  + z2
z3 =
   9.0000  - 3.0000i
»z4=z1*z2
z4 =
   58.0000 + 6.0000i
```

验证了前面的计算结果。MATLAB 允许使用 i 或者 j 来表示 $\sqrt{-1}$。虽然在考试中不允许使用 MATLAB 作为计算工具，但可以用来检查平时的课堂作业。

12.6.2 PSpice

PSpice 软件可以进行相量分析。建议读者阅读附录 C 中 C.5 部分，掌握 PSpice 交流分析的概念。尽管 PSpice 交流分析包括交流扫描，但本节的分析仅针对单一频率的电路。在相量域或频域进行交流电路分析时，需要所有交流源必须有相同的频率，$f=\omega/2\pi$。用例具体说明 PSpice 进行相量分析的过程。

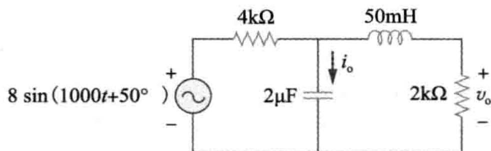


图 12-27 例 12-11 的电路原理图

例 12-11 利用 PSpice 计算如图 12-27 所示电路中的 v_o 和 i_o。

解： 从角频率 ω 可以得到频率 f 为

$$f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1000}{2\pi}=159.155(\text{Hz})$$

电路示意图如图 12-28 所示。电压源的部件名称为 VAC。双击 VAC 输入 ACMGA =8V 和 ACPHASE = 50。由于仅希望得到 v_o 和 i_o 的幅度和相位，设置 IPRINT 和 VPRINT1 的属性为：AC = yes，MAG = yes，PHASE=yes。电路绘制完毕后保存为文件 exam1211.dsn，并选择 PSpice/NEW Simulation Profile。从而产生新仿真（New Simulation）对话框，输入 exam1211 作为文件名并单击创建（Create）。得到仿真设置（Simulation Setting）对话框，分析类型（Anaylsisi type）选择交流扫描/噪声（AC Sweep/Noise）。由于是单一频率分析，输入 159.155 作为起始频率（Start Freq），159.155 作为终止频率（Final Freq），1 作为总数（Total Point）。保存示意图，选择 PSpice/Run 开始仿真，可以绘制处理窗口 Probe。然后重新回到示意图窗口并选择 PSpice/View Output File。输出文件中包含有电源频率以及虚拟元件 IPRINT 和 VPRINT1 的属性，即

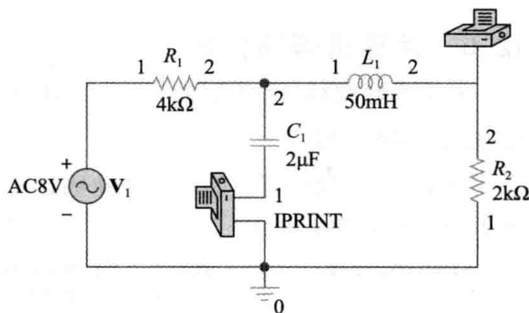


图 12-28 例 12-11 的电路示意图

```
FREQ        VM(3)           VP(3)
1.592E+02   9.412E-01       -2.077E+01

FREQ        IM(V_PRINT1)    IP(V_PRINT1)
1.592E+02   1.883E-03       7.067E+01
```

由输出文件，可以得到，

$$\mathbf{V}_o=0.941\angle-20.71^\circ\text{V},\quad \mathbf{I}_o=1.883\angle70.67^\circ(\text{mA})$$

它们即是所求电压和电流的相量，因此有

$$v_o(t)=0.941\sin(1000t-20.71^\circ)(\text{V})$$

和

$$i_o(t)=1.883\sin(1000t+70.67^\circ)(\text{mA})$$ ◀

练习 12-11 利用 PSpice 计算如图 12-29 所示电路中的 v_o 和 i_o。

答案： $0.2772\cos(3000t-153.7^\circ)$ V；$0.562\cos(3000t-77.13^\circ)$ mA

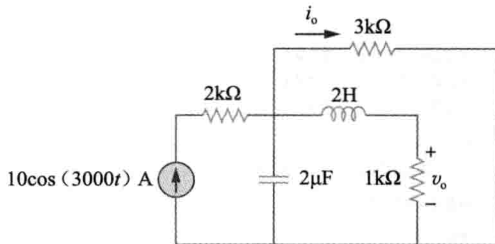


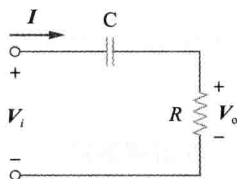
图 12-29 练习 12-11 的电路原理图

†12.7 应用

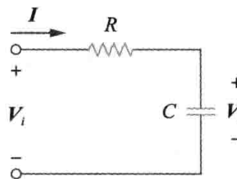
本书第 9 章与第 10 章已经介绍了 RC 和 RL 电路在直流电路中的应用实例，这些电路同样可以用于交流电路中，例如耦合电路、移相电路、滤波器、振荡电路、交流电桥电路和变压器等，具体应用不胜枚举。本节仅讨论两个简单应用实例：RC 移相电路与交流电桥电路。

12.7.1 移相器

移相电路通常用于校正电路中已经存在的不必要相移或者用于产生某种特定的效果。采用 RC 电路即可实现这一目的，因为该电路中的电容会使得电路电流超前于激励电压。两种常用的 RC 电路如图 12-30 所示（RL 电路或电抗电路也可以用作移相电路，实现同样的目的）。



a）输出超前



b）输出滞后

图 12-30　RC 串联移相电路

在图 12-30a 所示的电路中，电路电流 $\mathbf{I}$ 超前于激励电压 $\mathbf{V}_i$ 相位角 θ，其中 $0<\theta<90°$，且 θ 的大小取决于 R 和 C 的值。如果 $X_C=1/\omega C$，则电路的总阻抗为 $\mathbf{Z}=R+\mathrm{j}X_C$，且其相移为

$$\theta=\arctan\frac{X_C}{R} \tag{12-46}$$

上式表明，相移的大小取决于 R 与 C 的值以及工作频率。由于电阻两端的输出电压 V_o 与电流同相，所以 $\mathbf{V}_o$ 超前于（正相移）$\mathbf{V}_i$，如图 12-31a 所示。

如图 12-30b 所示电路中，输出为电容两端的电压。电流 $\mathbf{I}$ 超前于输入电压 $\mathbf{V}_i$ 相位角 θ，但是电容两端的输出电压 $\mathbf{V}_o$ 滞后于（负相移）输入电压 $\mathbf{V}_i$，如图 12-31b 所示。

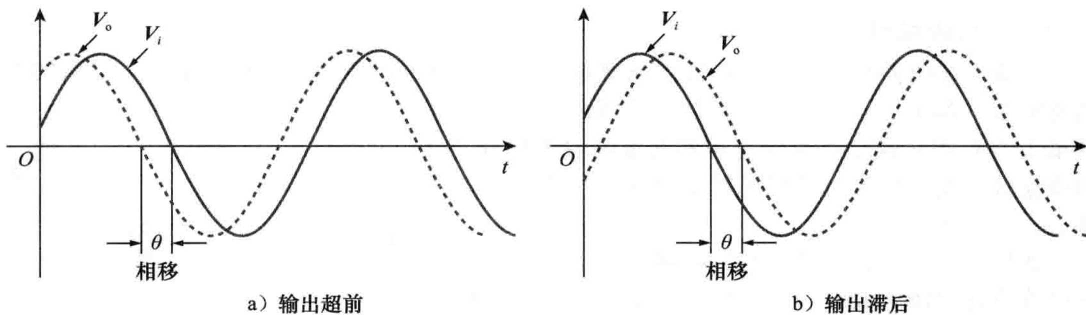


图 12-31　RC 电路中的相移

值得注意的是，如图 12-30 所示的简单 RC 电路也可以用作分压电路，因此，当相移 θ 趋近于 90°时，其输出电压 $\mathbf{V}_o$ 也趋近于零。正是基于以上原因，这类简单的 RC 电路仅在所需的相移量很小时才能使用。如果要求相移量大于 60°，则可以将简单的 RC 电路级联起来，从而使得级联后的总相移量等于单个相移之和。

例 12-12　试设计一个可以提供 90°超前相位的 RC 电路。

解： 如果在某特定频率处，选择电路元件具有相等的欧姆值，例如 $R=|X_c|=20\Omega$，则根据式（12-46）可知，相移量恰好为 45°。将如图 12-30a 所示的两个 RC 电路级联起来，可以得到如图 12-32 所示的电路，该电路提供了 90°的正相移或相位超前

90°，下面予以证明。利用阻抗的串一并联合并方法，可以得到图 12-32 所示电路的阻抗 $\boldsymbol{Z}$ 为：

$$\boldsymbol{Z} = 20 \,/\!/\, (20 - \mathrm{j}20) = \frac{20(20 - \mathrm{j}20)}{40 - \mathrm{j}20} = 12 - \mathrm{j}4(\Omega) \tag{12-12-1}$$

根据分压原理可得：

$$\boldsymbol{V}_1 = \frac{\boldsymbol{Z}}{\boldsymbol{Z} - \mathrm{j}20}\boldsymbol{V}_i = \frac{12 - \mathrm{j}4}{12 - \mathrm{j}24}\boldsymbol{V}_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\angle 45^\circ \boldsymbol{V}_i \tag{12-12-2}$$

且

$$\boldsymbol{V}_o = \frac{20}{20 - \mathrm{j}20}\boldsymbol{V}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\angle 45^\circ \boldsymbol{V}_1 \tag{12-12-3}$$

将式（12-12-2）代入式（12-12-3）可得，

$$\boldsymbol{V}_o = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\angle 45^\circ\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\angle 45^\circ \boldsymbol{V}_i\right) = \frac{1}{3}\angle 90^\circ \boldsymbol{V}_i$$

因此，输出超前输入 90°，但是其幅度仅为输入的 33%。 ◀

练习 12-12 试设计一个 RC 电路，实现输出相位较输入相位滞后 90°，如果 10V 的交流电压作用于该电路，试求输出电压为多少？

答案：电路的典型设计如图 12-33 所示，输出电压为 3.33V

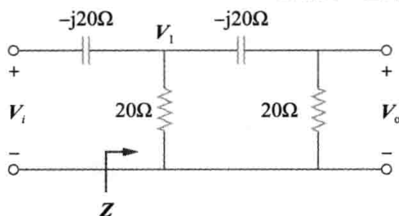


图 12-32 例 12-12 的电路图：90°超前相移的 RC 移相电路

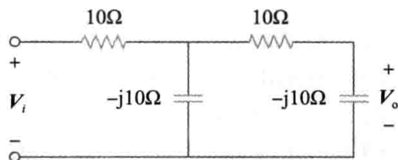


图 12-33 练习 12-12 的电路图

12.7.2 交流电桥

交流电桥电路用于测量电感器的电感量 L 或电容器的电容量 C，与测量未知电阻的惠斯通电桥（参见 6.5 节）形式类似、原理相同。但是在测量 L 与 C 时，需要用交流电源和交流电表来代替之前的检流计，交流电表可以是灵敏的交流安培表或交流伏特表。

如图 12-34 所示为交流电桥电路的一般形式，当没有电流流过交流电表时，该电桥是平衡的，意味着 $\boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{V}_2$。由分压原理可知：

$$\boldsymbol{V}_1 = \frac{\boldsymbol{Z}_2}{\boldsymbol{Z}_1 + \boldsymbol{Z}_2}\boldsymbol{V}_s = \boldsymbol{V}_2 = \frac{\boldsymbol{Z}_x}{\boldsymbol{Z}_3 + \boldsymbol{Z}_x}\boldsymbol{V}_s \tag{12-47}$$

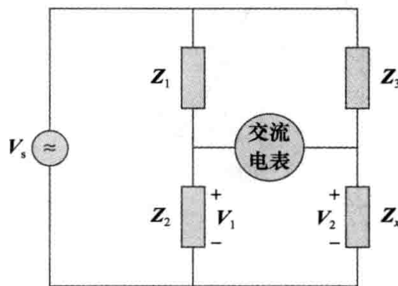


图 12-34 交流电桥的一般形式

因此，

$$\frac{\boldsymbol{Z}_2}{\boldsymbol{Z}_1 + \boldsymbol{Z}_2} = \frac{\boldsymbol{Z}_x}{\boldsymbol{Z}_3 + \boldsymbol{Z}_x} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{Z}_3 = \boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{Z}_x \tag{12-48}$$

即

$$\boxed{\boldsymbol{Z}_x = \frac{\boldsymbol{Z}_3}{\boldsymbol{Z}_1}\boldsymbol{Z}_2} \tag{12-49}$$

此即交流电桥电路的平衡方程，与式（6-3）表示的电阻电桥平衡方程类似，只是用 $\boldsymbol{Z}_x$ 取

代了 $\boldsymbol{R}_2$。

用于测量 L 与 C 的交流电桥电路如图 12-35 所示，其中 L_x 与 C_x 分别为待测的未知电感与电容，而 L_s 与 C_s 分别为标准电感与电容（其值已知，且具有很高的精度）。在图示两种情况下，通过改变两个电阻 R_1 与 R_2 的值使得交流电表读数为零，从而使电桥进入平衡状态。由式（12-49）可以得到：

$$L_x = \frac{R_2}{R_1}L_s \tag{12-50}$$

且

$$C_x = \frac{R_1}{R_2}C_s \tag{12-51}$$

注意，因为式（12-50）与式（12-51）中未出现频率 f，所以图 12-35 所示交流电桥的平衡并不依赖于交流电源的频率 f。

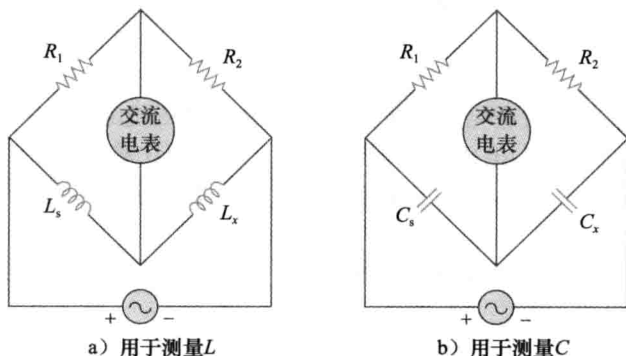


图 12-35 专用交流电桥电路

例 12-13 交流电桥电路如图 12-34 所示，其中 $\boldsymbol{Z}_1$ 为 1kΩ 电阻，$\boldsymbol{Z}_2$ 为 4.2kΩ 电阻，$\boldsymbol{Z}_3$ 为 1.5MΩ 电阻与 12pF 电容的并联组合，且当 $f=2\text{kHz}$ 时，该电桥达到平衡。试计算组成 $\boldsymbol{Z}_x$ 的串联元件。

解：由式（12-49）可得

$$\boldsymbol{Z}_x = \frac{\boldsymbol{Z}_3}{\boldsymbol{Z}_1}\boldsymbol{Z}_2 \tag{12-13-1}$$

其中，$\boldsymbol{Z}_x = R_x + \mathrm{j}X_x$，

$$\boldsymbol{Z}_1 = 1000\Omega, \quad \boldsymbol{Z}_2 = 4200\Omega \tag{12-13-2}$$

且

$$\boldsymbol{Z}_3 = R_3 \mathbin{/\!/} \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} = \frac{\dfrac{R_3}{\mathrm{j}\omega C_3}}{R_3 + 1/\mathrm{j}\omega C_3} = \frac{R_3}{1+\mathrm{j}\omega R_3 C_3}$$

由于 $R_3 = 1.5\text{M}\Omega$，$C_3 = 12\text{pF}$，所以

$$\boldsymbol{Z}_3 = \frac{1.5\times10^6}{1+\mathrm{j}2\pi\times2\times10^3\times1.5\times10^6\times12\times10^{-12}} = \frac{1.5\times10^6}{1+\mathrm{j}0.2262}$$

即

$$\boldsymbol{Z}_3 = (1.427 - \mathrm{j}03228)(\text{M}\Omega) \tag{12-13-3}$$

假定 $\boldsymbol{Z}_x$ 由串联元件组成，将式（12-13-2）与式（12-13-3）代入式（12-13-1），可以得到：

$$R_x + \mathrm{j}X_x = \frac{4200}{1000}(1.427 - \mathrm{j}0.3228)\times10^6 = (5.993 - \mathrm{j}1.356)(\text{M}\Omega)$$

将电阻和电抗分别与实部和虚部对应相等可得 $R_x=5.993\text{M}\Omega$，且容性电抗为

$$X_x=\frac{1}{\omega C}=1.356\times 10^6$$

即

$$C=\frac{1}{\omega X_x}=\frac{1}{2\pi\times 2\times 10^3\times 1.356\times 10^6}=58.69(\text{pF})$$ ◀

练习 12-13 交流电桥电路如图 12-34 所示，假定当 $\boldsymbol{Z}_1$ 为 4.8kΩ 电阻，$\boldsymbol{Z}_2$ 为 10Ω 电阻与 0.25μH 的电感，$\boldsymbol{Z}_3$ 为 12kΩ 的电阻，且当 $f=6\text{MHz}$ 时，该电桥达到平衡。试计算组成 $\boldsymbol{Z}_x$ 的串联元件。 **答案：** 25Ω 电阻与 0.625μH 的电感的串联

12.8 本章小结

1）相量是一个表示正弦信号幅度与相位的复数。给定正弦信号 $v(t)=V_m\sin(\omega t+\phi)$，其相量 $\boldsymbol{V}$ 表示为

$$\boldsymbol{V}=V_m\angle\phi$$

2）在交流电路中，在任何时刻电压相量与电流相量均存在固定的关系。如果 $v(t)=V_m\sin(\omega t+\phi_v)$ 表示元件两端的电压，而 $i(t)=I_m\sin(\omega t+\phi_i)$表示流过该元件的电流，则对于电阻元件而言，$\phi_i=\phi_v$，对于电容元件而言，$\phi_i$ 超前 $\phi_v 90°$，对于电感元件而言，ϕ_i 滞后 $\phi_v 90°$。

3）电路的基本定律（欧姆定律和基尔霍夫定律）同样适用于交流电路，其形式与直流电路中的基本定律相同，即：

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{ZI}$$

$$\sum \boldsymbol{I}_k=0(\text{KCL})$$

$$\sum \boldsymbol{V}_k=0(\text{KVL})$$

4）电路的阻抗 $\boldsymbol{Z}$ 等于该电路两端的电压相量与流过它的电流相量之比：

$$\boldsymbol{Z}=\frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{I}}=R(\omega)+\text{j}X(\omega)$$

其中，$R=\text{Re}(\boldsymbol{Z})$ 是电阻，$X=\text{Im}(\boldsymbol{Z})$ 为电抗。当 X 是正值时，称阻抗为感性的，当 X 是负值是，称阻抗是容性。

5）导纳 $\boldsymbol{Y}$ 是阻抗的倒数：

$$\boldsymbol{Y}=\frac{1}{\boldsymbol{Z}}=G(\omega)+\text{j}B(\omega)$$

串并联的阻抗合并方法与串并联电阻的合并方法相同，即串联时阻抗相加，并联时导纳相加。

6）电阻的阻抗为 $\boldsymbol{Z}=R$，电感的阻抗为 $\boldsymbol{Z}=\text{j}X=\text{j}\omega L$，电容的阻抗为 $\boldsymbol{Z}=-\text{j}X=1/\text{j}\omega C$。

7）分压/分流原理、阻抗/导纳的串联/并联合并、电路的化简以及 Y-△转换等方法均适用于交流电路的分析。

8）MATLAB 和 PSpice 是两个常用的分析交流电路的计算机软件工具。

9）交流电路可应用于移相电路和电桥电路中。

复习题

1 负角度−50°与下列哪个角度相等：

(a) 40° (b) 50° (c) 130° (d) 310°

2 复数 6+j6 等于：

(a) $6\angle 45^\circ$ (b) $36\angle 0^\circ$

(c) $8.485\angle 45^\circ$ (d) $8.485\angle 135^\circ$

3 (12+j5)+(3−j6) 等于：

(a) 15−j (b) 17−j3

(c) 18−j6 (d) 17−j3

4 $(10\angle 30)(2\angle -15^\circ)$ 可以表示为：

(a) $12\angle -45^\circ$ (b) $20\angle 15^\circ$

(c) $5\angle -55^\circ$

5 电感两端的电压较流过它的电流超前 90°。

(a) 正确 (b) 错误

6 阻抗的虚部称为：

(a) 电阻 (b) 导纳

(c) 电纳 (d) 电导

(e) 电抗

7 电容的阻抗随频率的增加而增加。

(a) 正确 (b) 错误

8 相量包含提供它所示的正弦信号的频率信息。

(a) 正确 (b) 错误

9 串联 RC 电路中 $V_R=12\text{V}$，$V_c=5\text{V}$，则供电电压为

(a) −7V (b) 7V

(c) 13V (d) 17V

10 串联 RCL 电路中 $R=30\Omega$，$X_C=50\Omega$，$X_L=90\Omega$，则该电路的阻抗为：

(a) 30+j140Ω (b) 30+j40Ω

(c) 30−j40Ω (d) −30−j40Ω

(e) −30+j40Ω

答案： 1 (d)，2 (c)，3 (a)，4 (b)，5 (a)，6 (e)，7 (b)，8 (a)，9 (c)，10 (b)。

习题

12.2 节

1 试化简下列各复数，并将计算结果表示为直角坐标形式。

(a) (5+j6)−(2−j3)

(b) (25+j7)×(1+j2)

(c) $20\angle 30^\circ - 10\angle 45^\circ$

(d) $\dfrac{26\angle 40^\circ + 5\angle -10^\circ}{6+j8}$

2 试化简下列各复数，并将计算结果表示为直角坐标形式。

(a) (2+j) + (4−j7)

(b) (j3) × (3+j5)

(c) $\dfrac{4+j3}{1-j2}$ (d) $\dfrac{2-j5}{2+j4}$

3 试计算下列各复数，并将计算结果表示为直角坐标形式。

(a) $\dfrac{15\angle 45^\circ}{3-j4}+j2$

(b) $\dfrac{8\angle -20^\circ}{(2+j)(3-j4)}+\dfrac{10}{-5+j12}$

(c) $10+(8\angle 50^\circ)(5-j12)$

4 已知复数 $z_1=6-j8$，$z_2=10\angle -30^\circ$，$z_3=8\angle -120^\circ$，试计算：

(a) $z_1+z_2+z_3$，

(b) $\dfrac{z_1 z_2}{z_3}$

5 已知复数 $z_1=-3+j4$，$z_2=12+j5$，试计算：

(a) $z_1 z_2$ (b) $\dfrac{z_1}{z_2^*}$

(c) $\dfrac{z_1+z_2}{z_1-z_2}$

6 设 $\boldsymbol{X}=8\angle 40^\circ$，$\boldsymbol{Y}=10\angle -30^\circ$，试计算以下各量并将计算结果表示为极坐标形式：

(a) $(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})\boldsymbol{X}^*$ (b) $(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y})^*$

(c) $(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})/\boldsymbol{X}$

7 试计算如下各复数：

(a) $\dfrac{2+j3}{1-j6}+\dfrac{7-j8}{-5+j11}$

(b) $\dfrac{(15\angle 10^\circ)\ 10\angle -40^\circ}{(4\angle -80^\circ)\ (-6\angle 50^\circ)}$

(c) $\begin{vmatrix} 2+j3 & -j2 \\ -j2 & 8-j5 \end{vmatrix}$

8 试求出如下各相量所对应的正弦信号。

(a) $\boldsymbol{V}_1=60\angle 15^\circ\text{V}$，$\omega=1$

(b) $\boldsymbol{V}_2=6+j8\text{V}$，$\omega=40$

(c) $\boldsymbol{I}_1=2.8\angle -\pi/3\text{A}$，$\omega=377$

(d) $\boldsymbol{I}_2=-0.5-j1.2\text{A}$，$\omega=10^3$

9 试求出如下各相量所对应的正弦信号。

(a) $\boldsymbol{V}=40\angle -60^\circ\text{V}$

(b) $\boldsymbol{V}=-30\angle 10^\circ+50\angle 60^\circ\text{V}$

(c) $\boldsymbol{I}=j6\angle -10^\circ\ \text{A}$

(d) $\boldsymbol{I}=\dfrac{2}{j}+10\angle -45^\circ\ \text{A}$

10 试将如下各正弦信号转换为相量：

(a) $v=10\sin(\omega t+20^\circ)\text{V}$

(b) $v=25\sin(\omega t-30°)$ V

(c) $i=40\sin(\omega t+270°)$ A

(d) $i=50\cos(\omega t-33°)$ A

11 试将如下各正弦信号转换为相量：

(a) $v=20\sin(\omega t-60°)$ V

(b) $v=-5\sin(\omega t+30°)$ A

12 试利用相量计算如下各式的值：

(a) $3\cos(20t+10°)-5\cos(20t-30°)$

(b) $40\sin(50t)+30\cos(50t-45°)$

(c) $20\sin(400t)+10\cos(400t+60°)-5\sin(400t-20°)$

12.3 节

13 试确定流过一个与电压源 $v_s(t)=110\cos(377t)$ V 相连接的 8Ω 电阻的电流。

14 试计算如下频率对应的 2H 电感的频率。

(a) 60Hz (b) 1MHz

(c) 600rad/s

15 110V、60Hz 电压源为 40mH 电感供电，试计算阻抗和电流。

16 220V、60Hz 电压源为 50μF 电容供电，试计算阻抗和流过电容的电流。

17 如果流过一个 2μF 电容的电流为 $i(t)=4\sin(10^6t+25°)$ A，试计算该电容两端的瞬时电压。

18 如果一个 4mH 电感两端的电压为 $v(t)=60\cos(500t-65°)$ V，试计算该流过电容的瞬时电流。

19 电流源 $i(t)=10\sin(377t+30°)$ A 作用于单一负载，负载元件两端的电压为 $v(t)=-65\cos(377t+120°)$ V，试确定该负载元件的类型，并计算其值。

20 两个元件串联连接在图 12-36 所示电路中，如果 $i=12\cos(2t-30°)$ A，试计算元件值。

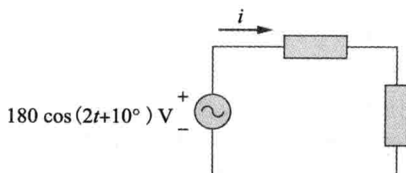


图 12-36 习题 20 的电路原理图

21 某串联 RL 电路接到 110V 交流电源上，如果电阻两端的电压为 85V，试计算电感两端的电压。

22 角频率 ω 取何值时能够使得图 12-37所示电路的响应 v_o 为零？

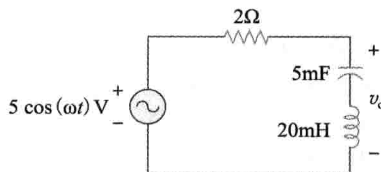


图 12-37 习题 22 的电路原理图

23 电源 $120\sin(1000t+40°)$ V 为 50Ω 电阻和 40μF 电容的串联组合供电，试计算电流的正弦表达形式。

12.4 节

24 在如图 12-38 所示电路中，若 $v_s(t)=5\cos(2t)$ V，试计算图中的 v_o。

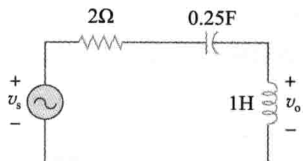


图 12-38 习题 24 和习题 53 的电路原理图

25 试计算如图 12-39 所示各电路中的 $i(t)$ 与 $v_o(t)$。

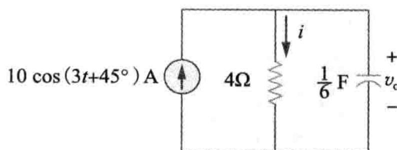


图 12-39 习题 25 的电路原理图

26 若电源频率为 60Hz，试计算如图 12-40 所示各电路中的 $i_1(t)$ 与 $i_2(t)$。

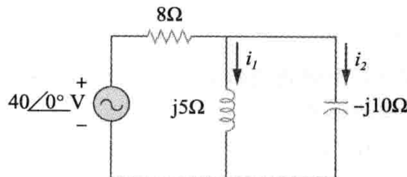


图 12-40 习题 26 的电路原理图

27 试计算如图 12-41 所示 RLC 电路中的 $i_o(t)$。

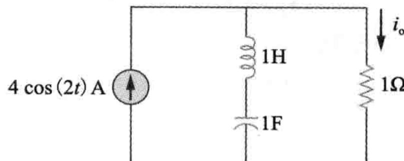


图 12-41 习题 27 的电路原理图

28 令 $i_s(t)=5\cos(100t+40°)$ A，试计算如图 12-42

所示电路中的 $v_x(t)$。

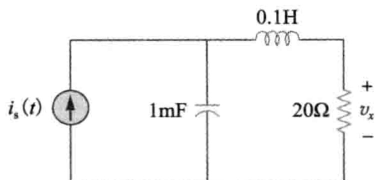


图 12-42 习题 28 的电路原理图

29 如果图 12-43 所示电路中 2Ω 电阻两端的电压 v_o 为 $10\cos(2t)$V，试求解 i_s。

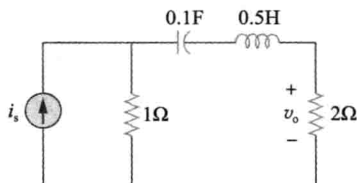


图 12-43 习题 29 的电路原理图

30 如图 12-44 所示电路中的 $\mathbf{V}_s = 10\angle 0°$V，试计算 $\mathbf{I}$。

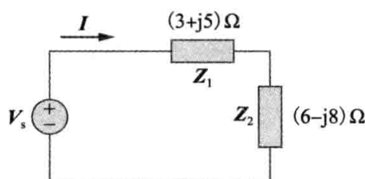


图 12-44 习题 30 的电路原理图

31 当工作频率为 10MHz 时，若 10μF 电容两端的峰值电压为 0.42mV，试计算流过该电容的峰值电流为多少?

32 当工作频率为 2kHz 时，若 80mH 电感两端的峰值电压为 12mV，试计算流过该电感的峰值电流为多少?

12.5 节

33 试求如图 12-45 所示电路的 $\mathbf{Z}_{eq}$。

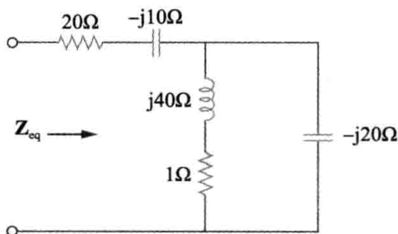


图 12-45 习题 33 的电路原理图

34 试求如图 12-46 所示网络在 $\omega = 50$rad/s 时的阻抗 $\mathbf{Z}_{in}$。

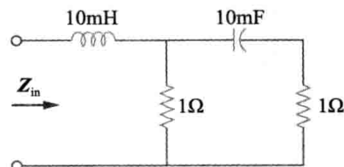


图 12-46 习题 34 的电路原理图

35 试确定如图 12-47 所示电路在 $\omega = 1$rad/s 时的输入导纳。

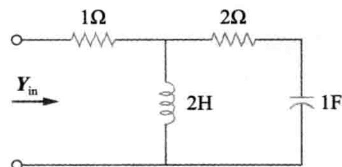


图 12-47 习题 35 的电路原理图

36 试求如图 12-48 所示电路的 $\mathbf{Z}_{eq}$。

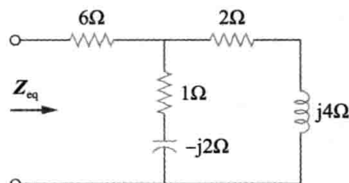


图 12-48 习题 36 的电路原理图

37 试求如图 12-49 所示电路的 $\mathbf{Z}_{eq}$。

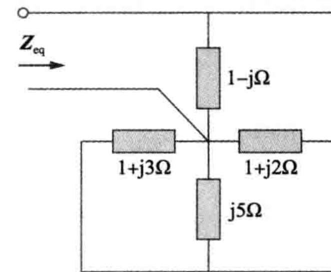


图 12-49 习题 37 的电路原理图

38 对如图 12-50 所示电路，试求 $\mathbf{Z}_T$ 的值。

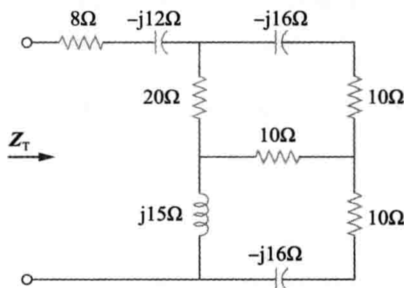


图 12-50 习题 38 的电路原理图

39 试计算如图 12-51 所示电路的 $\boldsymbol{Z}_{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{I}$。

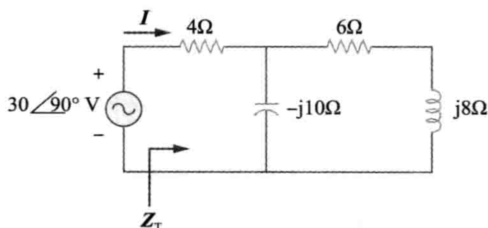


图 12-51 习题 39 的电路原理图

40 如果 $\omega=10^3\mathrm{rad/s}$，试计算如图 12-52 所示各电路的输入导纳。

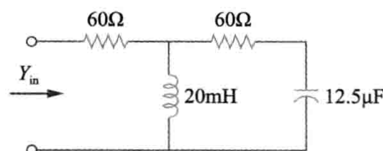


图 12-52 习题 40 的电路原理图

41 试确定如图 12-53 所示电路的 $\boldsymbol{Y}_{\mathrm{eq}}$。

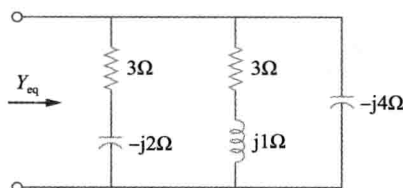


图 12-53 习题 41 的电路原理图

42 试计算如图 12-54 所示电路的等效阻抗。

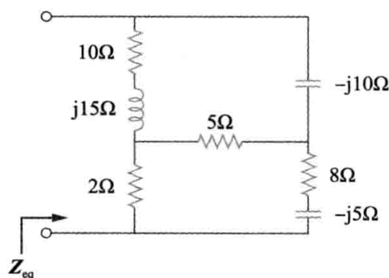


图 12-54 习题 42 的电路原理图

43 试计算如图 12-55 所示网络的 $\boldsymbol{Z}_{ab}$ 值。

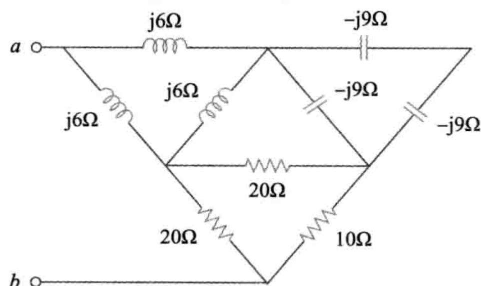


图 12-55 习题 43 的电路原理图

44 试利用分压原理计算如图 12-56 所示网络的 $\boldsymbol{V}_{AB}$ 值。

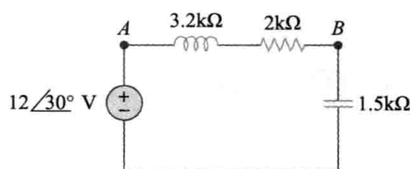


图 12-56 习题 44 的电路原理图

45 试计算如图 12-57 所示电路中的 $\boldsymbol{Z}_{ab}$ 值。

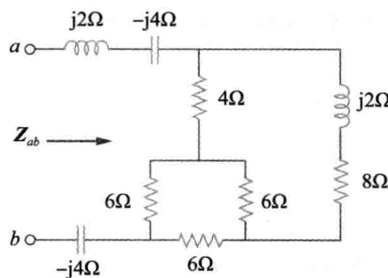


图 12-57 习题 45 的电路原理图

46 试计算如图 12-58 所示电路中的 $\boldsymbol{Z}_{\mathrm{in}}$。

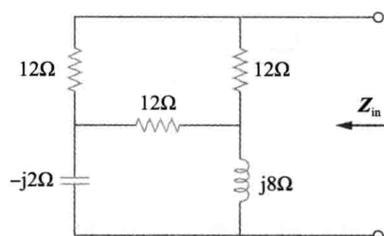


图 12-58 习题 46 的电路原理图

47 参考图 12-59 所示的电路，试计算阻抗 $\boldsymbol{Z}_i$ 和输入电流 $\boldsymbol{I}_i$。

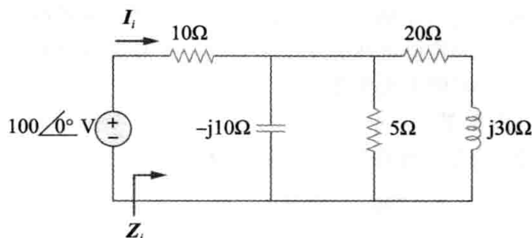


图 12-59 习题 47 的电路原理图

12.6 节

48 利用 MATLAB 绘制 $v(t)=60\sin(337t+60°)$ V 的曲线。

49 利用 MATLAB 绘制 $i(t)=10\cos(4\pi t-25°)$ A 的曲线。

50 利用 MATLAB 计算下列表达式的值。

(a) $\dfrac{(5-j6)-(2+j8)}{(-3+j4)(5-j)+(4-j6)}$

(b) $\dfrac{10+j20^2}{3+j4^2}\sqrt{(10+j5)(16-j20)}$

51 利用 MATLAB 计算下列表达式的值。

$$\frac{[(10+j12)+(30-j40)\times(15+j18)]}{(50-j60)-(35+j80)}$$

52 利用 PSpice 重新计算习题 28。

53 利用 PSpice 重新计算习题 24。

54 如图 12-60 所示的电路，试利用 PSpice 计算 $i(t)$，令 $v_s(t)=60\cos(200t-10°)$ V。

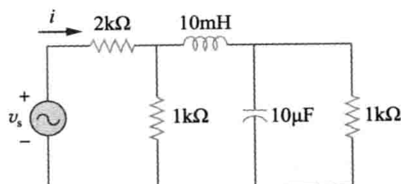


图 12-60 习题 54 的电路原理图

55 当 $i_s(t)=2\sin(5t)A$ 为图 12-61 所示的电路供电时，试利用 PSpice 计算 $i_x(t)$。

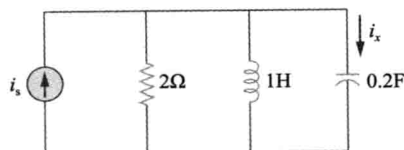


图 12-61 习题 55 的电路原理图

12.7 节

56 试设计一个 RL 电路，实现 90°超前相移。

57 试设计一个电路，将正弦输入转换为余弦输出。假设输出为电压。

58 电容器与 66Ω 电阻器串联连接到 120V、60Hz 的电源。如果电路的阻抗为 116Ω，试计算电容的电容值。

59 参见如图 12-62 所示的电路，

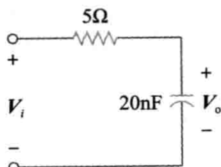


图 12-62 习题 59 的电路原理图

(a) 试计算 2MHz 时的相移。

(b) 试计算相移为 45°时对应的频率。

60 考虑如图 12-63 所示的移相电路，设频率为 60Hz 时，$V_i=120$V。试计算：

(a) 当 R 为最大值时的 $\mathbf{V}_o$。

(b) 当 R 为最小值时的 $\mathbf{V}_o$。

(c) 产生 45°相移时的 R 值

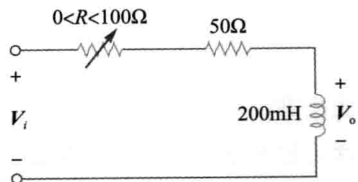


图 12-63 习题 60 的电路原理图

61 当 $R_1=400\Omega$，$R_2=600\Omega$，$R_3=1.2\text{k}\Omega$，$C_2=0.3\mu\text{F}$ 时，如图 12-34 所示的交流电桥平衡，试计算 R_x 与 C_x。假定 R_2 与 C_2 串联且 R_x 与 C_x 也串联。

62 当 $R_1=100\Omega$，$R_2=2\text{k}\Omega$，$C_s=40\mu\text{F}$ 时，电容电桥平衡，试计算待测电容器的电容值 C_x 为多少？

63 当 $R_1=1.2\text{k}\Omega$，$R_2=500\Omega$，$L_s=250\text{mH}$ 时，电感电桥平衡，试计算待测电感器的电感值 L_x 为多少？

64 图 12-64 所示的电路为用于电视接收机的电路，试计算该电路的总阻抗。

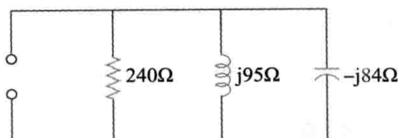


图 12-64 习题 64 的电路原理图

65 某传输线的串联阻抗为 $\mathbf{Z}=100\angle 75°\Omega$，分流导纳为 $\mathbf{Y}=450\angle 48°\mu\text{S}$。试计算：(a) 特性阻抗 $\mathbf{Z}_o=\sqrt{\mathbf{Z}/\mathbf{Y}}$

(b) 传播常数 $\gamma=\sqrt{\mathbf{ZY}}$

第13章 正弦稳态分析

一位杰出的领导人有能力使别人做他们不想做的事，并喜欢上它。

——哈利·S·杜鲁门

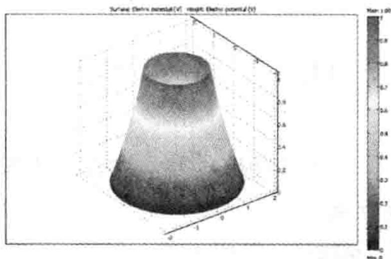
扩展职业生涯

软件工程技术领域的职业生涯

软件工程技术是指在计算机程序的设计、构建和验证过程中处理科学计算的实际应用问题，以及对相关文献进行开发、处理和维护的工程领域。软件工程技术是电子工程技术的一个分支，随着需要采用各类软件包以执行程序任务的学科越来越多，以及可编程微电子系统的应用越来越广泛，软件工程技术也变得日益重要。

不要将软件技术工程师的角色和计算机科学家的角色混淆。软件技术专家是从业者，不是理论家。软件技术工程师应该具备良好的计算机编程技能，熟悉编程语言，尤其熟悉日益普及的C++语言。因为硬件和软件是紧密相关的，所以软件技术工程师必须全面了解硬件设计且能够诊断电路。最为重要的是，软件工程技术专家应该具备一定的与所开发的软件的具体应用领域相关的专业知识。

总而言之，软件工程技术领域为乐于从事编程和软件包开发的人提供了广阔的职业空间。大量有趣的、具有挑战性的机遇都青睐受过研究生教育的人，而更高的回报则总属于那些准备充分的人。



建模软件的输出来自 COMSOL 公司

（© Sarhan M. Musa）

13.1 引言

分析交流电路的步骤：

1）将电路转换到相量域或者频域。

2）使用相应的电路分析方法（如分流原理、分压原理、节点分析、网孔分析和叠加定理等）求解问题。

3）将求得的相量转换到时域。

前一章学习了利用相量法来求解正弦输入信号下的电路响应，同时证明了欧姆定律和基尔霍夫定律也都适用于交流电路。本章将学习如何应用网孔分析、节点分析、戴维南定理、诺顿定理、叠加定理和电源变换等进行交流电路的分析。由于这些方法已经在直流电路中介绍过了，所以本章着重于举例说明。

交流电路分析步骤见左。

如果所求解的问题已经指明在频域，则不必进行步骤1）。步骤2）中，分析方法与直流电路分析相同，只不过这里涉及了复数运算。学习完第12章的知识，步骤3）就易于处理了[⊖]。在本章的最后，将介绍如何使用PSpice求解交流电路的问题。

⊖ 注意：利用相量实现交流电路的频域分析要比在时域分析电路容易得多。

13.2 网孔分析法

网孔分析法的依据是基尔霍夫电压定律（KVL）。在第 12 章中已经论证了 KVL 定律适用于交流电路。如 7.2 节所述，对网孔数为 n 的交流电路进行的网孔分析，可以按照右边三个步骤进行。

> 1）标记出 n 个网孔内的网孔电流。
> 2）对 n 个网孔应用 KVL 定律。利用欧姆定律将电压用网孔电流表示。
> 3）对这 n 个方程联立求解，以得到网孔电流。

以下用例对这三个步骤予以说明。

例 13-1 利用网孔分析法确定图 13-1 所示电路中的电流 $\boldsymbol{I}_o$。

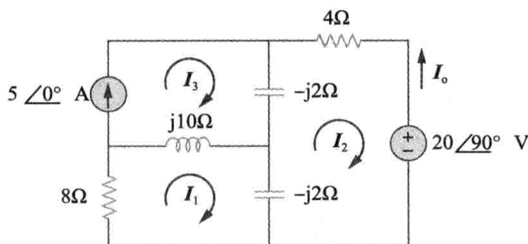


图 13-1 例 13-1 和例 13-6 的电路原理图

解： 对网孔 1 应用 KVL，可得

$$(8+j10-j2)\boldsymbol{I}_1-(-j2)\boldsymbol{I}_2-j10\boldsymbol{I}_3=0 \tag{13-1-1}$$

对网孔 2，有

$$(4-j2-j2)\boldsymbol{I}_2-(-j2)\boldsymbol{I}_1-(-j2)\boldsymbol{I}_3+20\underline{/90^\circ}=0 \tag{13-1-2}$$

对网孔 3，有 $\boldsymbol{I}_3=5$。将其代入式（13-1-1）和式（13-1-2），可得

$$(8+j8)\boldsymbol{I}_1+j2\boldsymbol{I}_2=j50 \tag{13-1-3}$$

$$j2\boldsymbol{I}_1+(4-j4)\boldsymbol{I}_2=-j20-j10 \tag{13-1-4}$$

将式（13-1-3）和式（13-1-4）写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix}8+j8 & j2\\ j2 & 4-j4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_1\\ \boldsymbol{I}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}j50\\ -j30\end{bmatrix}$$

由此可得矩阵行列式为

$$\Delta=\begin{vmatrix}8+j8 & j2\\ j2 & 4-j4\end{vmatrix}=32(1+j)(1-j)+4=68$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}8+j8 & j50\\ j2 & -j30\end{vmatrix}=340-j240=416.17\underline{/-35.22^\circ}$$

$$\boldsymbol{I}_2=\frac{\Delta_2}{\Delta_1}=\frac{416.17\underline{/-35.22^\circ}}{68}=6.12\underline{/-35.22^\circ}(\text{A})$$

所求电流为

$$\boldsymbol{I}_o=-\boldsymbol{I}_2=6.12\underline{/(-35.22^\circ+180^\circ)}=6.12\underline{/144.78^\circ}(\text{A})$$ ◀

练习 13-1 利用网孔分析法求图 13-2 中的 $\boldsymbol{I}_o$。 **答案：** $3.582\underline{/65.45^\circ}$A

例 13-2 利用网孔分析法求解图 13-3 所示电路的 $\boldsymbol{V}_o$。

解： 如图 13-4 所示，由于网孔 3 与网孔 4 之间包括电流源，所以网孔 3 与网孔 4 组成了一个超网孔（广义网孔）。对网孔 1 运用 KVL，可得

$$-10+(8-j2)\boldsymbol{I}_1-(-j2)\boldsymbol{I}_2-8\boldsymbol{I}_3=0$$

即

$$(8-j2)\boldsymbol{I}_1+j2\boldsymbol{I}_2-8\boldsymbol{I}_3=10 \tag{13-2-1}$$

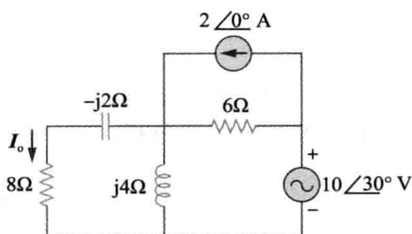


图 13-2 练习 13-1 的电路原理图

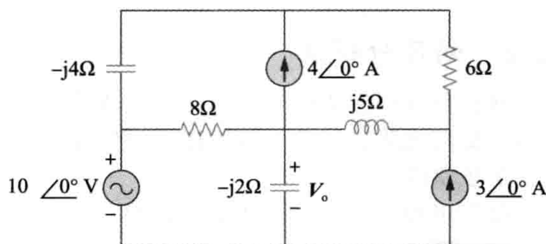


图 13-3 例 13-2 的电路图

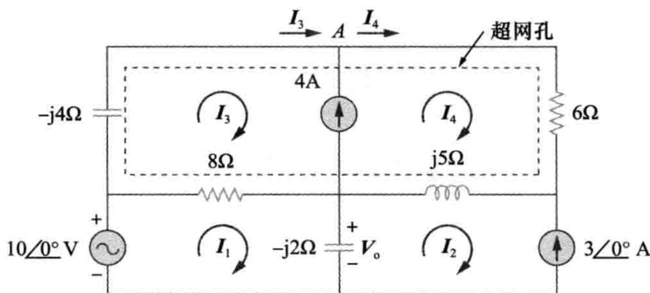


图 13-4 图 13-2 所示电路的分析

对于网孔 2，有

$$I_2 = -3 \tag{13-2-2}$$

对于超网孔，有

$$(8-j4)I_3 - 8I_1 + (6+j5)I_4 - j5I_2 = 0 \tag{13-2-3}$$

由于网孔 3 与网孔 4 之间存在电流源，因此在节点 A 处，有

$$I_4 = I_3 + 4 \tag{13-2-4}$$

可以用三种方法求解上述方程。

方法 1 将上述四个方程的求解，通过消元法化简为两个方程。

将式（13-2-1）与式（13-2-2）合并后得到

$$(8-j2)I_1 - 8I_3 = 10 + j6 \tag{13-2-5}$$

将式（13-2-2）至式（13-2-4）合并后得到

$$-8I_1 + (14+j)I_3 = -24 - j35 \tag{13-2-6}$$

由式（13-2-5）与式（13-2-6）可得矩阵方程为

$$\begin{bmatrix} 8-j2 & -8 \\ -8 & 14+j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10+j6 \\ -24-j35 \end{bmatrix}$$

相关的行列式为

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8-j2 & -8 \\ -8 & 14+j \end{vmatrix} = 112 + j8 - j28 + 2 - 64 = 50 - j20$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 10+j6 & -8 \\ -24-j35 & 14+j \end{vmatrix} = 140 + j10 + j84 - 6 - 192 - j280 = -58 - j186$$

于是，电流 I_1 为

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-58-j186}{50-j20} = 3.618\underline{/274.5^\circ}(\mathrm{A})$$

所求的电压 V_o 为

$$V_o = -j2(I_1 - I_2) = -j2(3.618\underline{/274.5^\circ + 3}) = -7.2134 - j6.568$$
$$= 9.756\underline{/222.32^\circ}(\mathrm{V})$$

方法 2 利用 MATLAB 求解式（13-2-1）～式（13-2-4），首先将上述四个方程写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} 8-j2 & j2 & -8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & -j5 & 8-j4 & 6+j5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_1 \\ \boldsymbol{I}_2 \\ \boldsymbol{I}_3 \\ \boldsymbol{I}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \tag{13-2-7}$$

即

$$\boldsymbol{AI} = \boldsymbol{B}$$

左乘 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，可得

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$$

利用 MATLAB 的求解过程和结果如下：

```
>> A = [(8-j*2) j*2   -8      0;
        0       1     0       0;
        -8      -j*5  (8-j*4) (6+j*5);
        0       0     -1      1];
>> B = [10 -3 0 4]';
>> I = inv(A)*B

I =
  0.2828 - 3.6069i
  -3.0000
  -1.8690 - 4.4276i
   2.1310 - 4.4276i
>> Vo = -2*j*(I(1) - I(2))

Vo =
  -7.2138 - 6.5655i
```

与采用方法 1 得到的结果相同。

方法 3 利用 Titanium TI-89 计算器求解式（13-2-7）方法如下。要使求得的结果为直角坐标形式，首先需要设定计算器的模式。

先按 MODE，将复数格式改为 RECTANGULAR，然后按 ENTER。

接着按 2nd MATH

选择 4：Matrix，然后按 ENTER

选择 5：simult（ENTER）

输入以下内容：

```
simult([8-2*i,2*i,-8,0;0,1,0,0;-8,-5*i,8-4*i,
6+5*i;0,0,-1,1],[10;-3;0;4])
```

然后按下 ◆ ENTER

结果为：

$\boldsymbol{I}_1 = 0.2828 - j3.607, \boldsymbol{I}_2 = -3 + j0,$

$\boldsymbol{I}_3 = -1.869 - 4.427, \boldsymbol{I}_4 = 2.131 - j4.428$

与方法 2 求得的结果一致。

练习 13-2 计算如图 13-5 所示电路中的电流 $\boldsymbol{I}_o$。

答案：$0.197\angle -5.84^\circ$ A

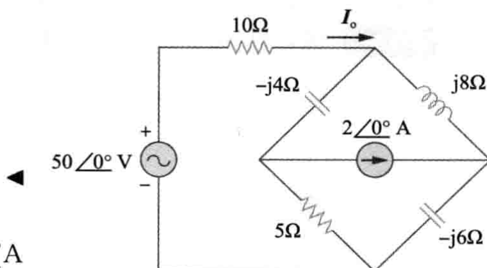


图 13-5 练习 13-2 的电路原理图

13.3 节点分析法

节点分析法的依据是基尔霍夫电流定律（KCL）。由于在第 12 章已经论证了 KCL 适用于相量，所以节点分析法可以用于分析交流电路。正如第 7.4 节所述，用节点分析法分

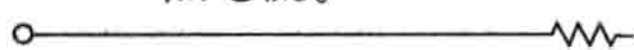
析交流电路，可分为左下三个步骤。



1）选择一个节点作为参考节点（即地）。对剩余的 $n-1$ 个节点标记节点电压 $\boldsymbol{V}_1$，$\boldsymbol{V}_2$，…，$\boldsymbol{V}_{n-1}$。节点电压是相对于参考节点的电压。

2）对 $(n-1)$ 个网孔应用 KCL 定律。利用欧姆定律将电流用节点电压表示。

3）对这 $(n-1)$ 个方程联立求解得到节点电流。



以下用例对这三个步骤予以说明。

例 13-3 试利用节点分析法求如图 13-6 所示电路中的 i_x。

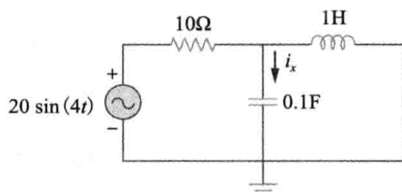


图 13-6　例 13-3 的电路原理图

解：首先将该电路转换到频域：

$$20\sin(4t) \Rightarrow 20\underline{/0^\circ}, \omega = 4(\text{rad/s})$$

$$1\text{H} \Rightarrow \text{j}\omega L = \text{j}4(\Omega)$$

$$0.1\text{F} \Rightarrow \frac{1}{\text{j}\omega C} = -\text{j}2.5(\Omega)$$

于是，得到频域中的等效电路，如图 13-7 所示。

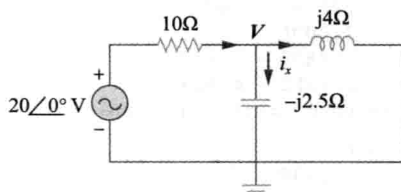


图 13-7　图 13-6 所示电路的频域等效电路

对上面的节点应用 KCL，得到

$$\frac{20-\boldsymbol{V}}{10} = \frac{\boldsymbol{V}}{-\text{j}2.5} + \frac{\boldsymbol{V}}{\text{j}4}$$

两边乘以 10，得到

$$20 - \boldsymbol{V} = \text{j}4\boldsymbol{V} - \text{j}2.5\boldsymbol{V}$$

即

$$20 = \boldsymbol{V}(1 + \text{j}1.5)$$

所以有

$$\boldsymbol{V} = \frac{20}{1+\text{j}1.5}$$

因而

$$\boldsymbol{I}_x = \frac{\boldsymbol{V}}{-\text{j}2.5} = \frac{20}{-\text{j}2.5(1+\text{j}1.5)} = 3.6923 + \text{j}2.4615 = 4.438\underline{/33.69^\circ}(\text{A})$$

将上述结果转换到时域，可得：

$$i_x(t) = 4.438\sin(4t + 33.69^\circ)(\text{A})$$

◀

练习 13-3　试利用节点分析法求图 13-8 所示电路中的 v_x。**答案**：$12\sin(2t+53.13^\circ)$V

例 13-4 试计算如图 13-9 所示电路中的 $\boldsymbol{V}_1$ 与 $\boldsymbol{V}_2$。

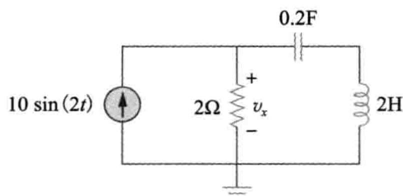


图 13-8　练习 13-3 的电路原理图

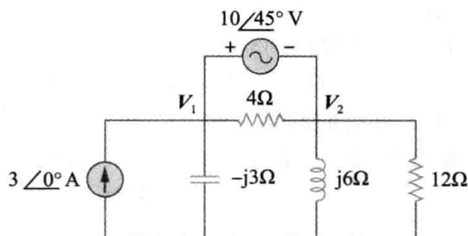


图 13-9　例 13-4 的电路原理图

解：如图 13-10 所示，节点 1 与节点 2 组成了一个超节点。对该超节点应用 KCL，得到

$$3=\frac{\boldsymbol{V}_1}{-\mathrm{j}3}+\frac{\boldsymbol{V}_2}{\mathrm{j}6}+\frac{\boldsymbol{V}_2}{12}$$

即

$$36=\mathrm{j}4\boldsymbol{V}_1+(1-\mathrm{j}2)\boldsymbol{V}_2 \tag{13-4-1}$$

但是，在节点 1 与节点 2 之间连接了一个电压源，则有

$$\boldsymbol{V}_1=\boldsymbol{V}_2+10\underline{/45^\circ} \tag{13-4-2}$$

将式（13-4-2）代入式（13-4-1），得到

$$36-40\underline{/135^\circ}=(1+\mathrm{j}2)\boldsymbol{V}_2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{V}_2=31.41\underline{/-87.18^\circ}(\mathrm{V})$$

由式（13-4-2）可得

$$\boldsymbol{V}_1=\boldsymbol{V}_2+10\underline{/45^\circ}=25.78\underline{/-70.48^\circ}(\mathrm{V})$$ ◀

练习 13-4　试计算如图 13-11 所示电路中的 $\boldsymbol{V}_1$ 与 $\boldsymbol{V}_2$。

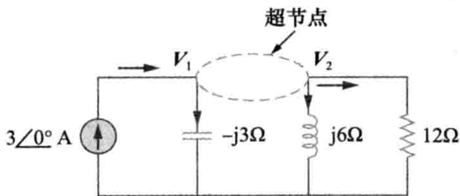


图 13-10　图 13-9 所示电路中的超节点

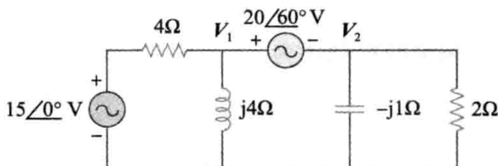


图 13-11　练习 13-4 的电路原理图

答案：$\boldsymbol{V}_1=17.81\underline{/67.8^\circ}\mathrm{V}$，$\boldsymbol{V}_2=3.376\underline{/165.72^\circ}\mathrm{V}$

例 13-5　将图 13-6 所示电路更改一下，加入一个电流控电流源，得到如图 13-12 所示电路，试确定 i_x。

解：同前面一样，首先将电路转换到频域：

$$20\cos(4t) \Rightarrow 20\underline{/0^\circ},\omega=4(\mathrm{rad/s})$$

$$1\mathrm{H} \Rightarrow \mathrm{j}\omega L=\mathrm{j}4(\Omega)$$

$$0.5\mathrm{H} \Rightarrow \mathrm{j}\omega L=\mathrm{j}2(\Omega)$$

$$0.1\mathrm{F} \Rightarrow \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}=-\mathrm{j}2.5(\Omega)$$

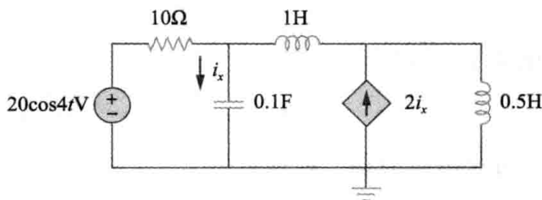


图 13-12　例 13-5 的电路原理图

得到频域等效电路如图 13-13 所示。

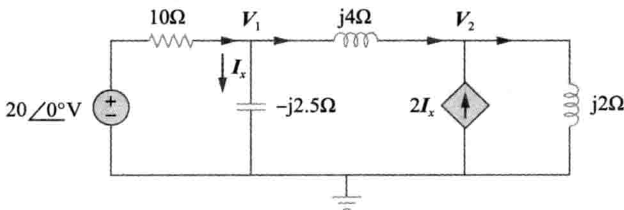


图 13-13　图 13-12 所示电路的频域等效电路

对节点 1 应用 KCL，得到

$$\frac{20-\boldsymbol{V}_1}{10}=\frac{\boldsymbol{V}_1}{-\mathrm{j}2.5}+\frac{\boldsymbol{V}_1-\boldsymbol{V}_2}{\mathrm{j}4}$$

即

$$(1+\mathrm{j}1.5)\boldsymbol{V}_1+\mathrm{j}2.5\boldsymbol{V}_2=20 \tag{13-5-1}$$

对于节点 2，可得

$$2\boldsymbol{I}_x = \frac{\boldsymbol{V}_1 - \boldsymbol{V}_2}{\mathrm{j}4} = \frac{\boldsymbol{V}_2}{\mathrm{j}2}$$

而

$$\boldsymbol{I}_x = \frac{\boldsymbol{V}_1}{-\mathrm{j}2.5}$$

将其代入，可得

$$\frac{2\boldsymbol{V}_1}{-\mathrm{j}2.5} + \frac{\boldsymbol{V}_1 - \boldsymbol{V}_2}{\mathrm{j}4} = \frac{\boldsymbol{V}_2}{\mathrm{j}2}$$

简化后，得到

$$11\boldsymbol{V}_1 + 15\boldsymbol{V}_2 = 0 \tag{13-5-2}$$

将式（13-5-1）和式（13-5-2）写成矩阵的形式，即

$$\begin{bmatrix} 1+\mathrm{j}1.5 & \mathrm{j}2.5 \\ 11 & 15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_1 \\ \boldsymbol{V}_2 \end{bmatrix} == \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \end{bmatrix}$$

可得相关的行列式为

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+\mathrm{j}1.5 & \mathrm{j}2.5 \\ 11 & 15 \end{vmatrix} = 15 - \mathrm{j}5$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 20 & \mathrm{j}2.5 \\ 0 & 15 \end{vmatrix} = 300, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1+\mathrm{j}1.5 & 20 \\ 11 & 0 \end{vmatrix} = -220$$

可得电流 $\boldsymbol{I}_x$ 为

$$\boldsymbol{V}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{300}{15-\mathrm{j}5} = 18.97\underline{/18.43^\circ}(\mathrm{V})$$

$$\boldsymbol{V}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-220}{15-\mathrm{j}5} = 13.91\underline{/198.3^\circ}(\mathrm{V})$$

电流 I_x 可得

$$\boldsymbol{I}_x = \frac{\boldsymbol{V}_1}{-\mathrm{j}2.5} = \frac{18.97\underline{/18.43^\circ}}{2.5\underline{/-90^\circ}} = 7.59\underline{/108.4^\circ}(\mathrm{A})$$

将其转换到时域，得到

$$i_x = 7.50\cos(4t + 108.4^\circ)\mathrm{A}$$

◀

练习 13-5 利用节点分析法求解计算图 13-14 所示电路中的 v_1 与 v_2。

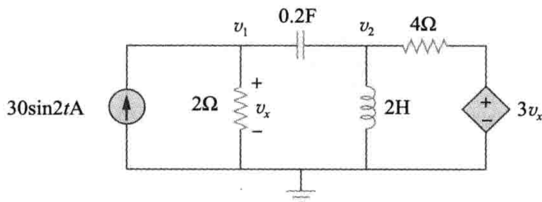


图 13-14 练习 13-5 的电路原理图

答案： $v_1(t)=33.96\sin(2t+60.01^\circ)\mathrm{V}$，$v_2(t)=99.6\sin(2t+57.12^\circ)\mathrm{V}$

13.4 叠加定理

由于交流电路是线性电路，所以叠加定理在交流电路中的应用与在直流电路中的应用是相同的。如果电路中包括以不同频率工作的若干个电源，叠加定理的应用则变得更为重要。在这种情况下，由于阻抗取决于频率，因此对于不同的频率必须采用不同的频域电路，总响应则须由时域中各个响应叠加得到。在相量域或频域中叠加响应是不正确的。为什么呢？因为在正弦分析中，指数时间因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ 是隐含的，且对于不同的角频率 ω，该指数

因子是变化的，因此，在相量域中不同频率响应的叠加是没有任何意义的。所以，当电路中包括以不同频率工作的电源时，必须在时域中完成各频率响应的叠加。

例 13-6 试利用叠加定理求解如图 13-1 所示电路中的 $\boldsymbol{I}_o$。

解： 令

$$\boldsymbol{I}_o = \boldsymbol{I}_o' + \boldsymbol{I}_o'' \tag{13-6-1}$$

其中，$\boldsymbol{I}_o'$ 与 $\boldsymbol{I}_o''$ 分别为由电压源与电流源引起的电流。要求解 $\boldsymbol{I}_o'$，考虑如图 13-15a 所示的电路。如果令 $\boldsymbol{Z}$ 为 −j2 与 8+j10 的并联阻抗，则有

$$\boldsymbol{Z} = \frac{-\mathrm{j}2(8+\mathrm{j}10)}{-2\mathrm{j}+8+\mathrm{j}10} = 0.25 - \mathrm{j}2.25$$

于是，电流 $\boldsymbol{I}_o'$ 为

$$\boldsymbol{I}_o' = \frac{\mathrm{j}20}{4-\mathrm{j}2+\boldsymbol{Z}} = \frac{\mathrm{j}20}{4.25-\mathrm{j}4.25}$$

即

$$\boldsymbol{I}_o' = -2.353 + \mathrm{j}2.353 \tag{13-6-2}$$

要求解 $\boldsymbol{I}_o'$，考虑如图 13-15b 所示电路。对于网孔 1，有：

$$(8+\mathrm{j}8)\boldsymbol{I}_1 - \mathrm{j}10\boldsymbol{I}_3 + \mathrm{j}2\boldsymbol{I}_2 = 0 \tag{13-6-3}$$

对于网孔 2，有

$$(4-\mathrm{j}4)\boldsymbol{I}_2 + \mathrm{j}2\boldsymbol{I}_1 + \mathrm{j}2\boldsymbol{I}_3 = 0 \tag{13-6-4}$$

对于网孔 3，有

$$\boldsymbol{I}_3 = 5 \tag{13-6-5}$$

由式（13-6-4）与式（13-6-5）可得

$$(4-\mathrm{j}4)\boldsymbol{I}_2 + \mathrm{j}2\boldsymbol{I}_1 + \mathrm{j}10 = 0$$

用 $\boldsymbol{I}_2$ 表示 $\boldsymbol{I}_1$，有

$$\boldsymbol{I}_1 = (2+\mathrm{j}2)\boldsymbol{I}_2 - 5 \tag{13-6-6}$$

将式（13-6-5）与式（13-6-6）代入式（13-6-3），可得：

$$(8+\mathrm{j}8)[(2+\mathrm{j}2)\boldsymbol{I}_2 - 5] - \mathrm{j}50 + \mathrm{j}2\boldsymbol{I}_2 = 0$$

即

$$\boldsymbol{I}_2 = \frac{90-\mathrm{j}40}{34} = 2.647 - \mathrm{j}1.176$$

于是，得到电流 $\boldsymbol{I}_o''$：

$$\boldsymbol{I}_o'' = -\boldsymbol{I}_2 = -2.647 + \mathrm{j}1.176 \tag{13-6-7}$$

由式（13-6-2）与式（13-6-7）可得：

$$\boldsymbol{I}_o = \boldsymbol{I}_o' + \boldsymbol{I}_o'' = -5 + \mathrm{j}3.529 = 6.12\underline{/144.78^\circ}(\mathrm{A})$$

可以看出，利用叠加定理并非求解本题的最佳方法。似乎利用叠加定理求解要比用原方法求解复杂一倍。不过，从下面例 13-7 可以看到，利用叠加定理求解显然是最方便的方法。◀

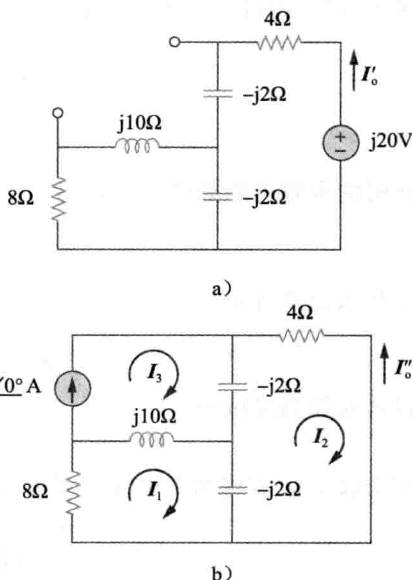


图 13-15　例 13-6 求解时的电路图

练习 13-6 试利用叠加定理求解如图 13-2 所示电路中的 $\boldsymbol{I}_o$。 **答案：** $3.582\underline{/65.45^\circ}$A

例 13-7 试利用叠加定理求解如图 13-16 所示电路中的 v_o。

解： 鉴于该电路工作在三个不同的频率（直流电压源时 $\omega=0$）下，可利用叠加定理求解本例，即将所求的响应分解为三个单一频率响应的叠加。因此，设定：

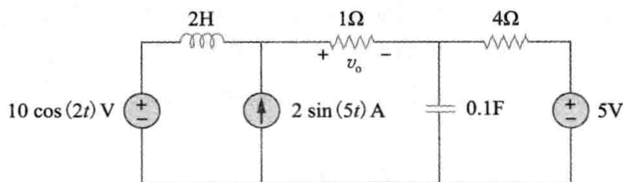


图 13-16 例 13-17 的电路原理图

$$v_0 = v_1 + v_2 + v_3 \tag{13-7-1}$$

其中，v_1 为由 5V 直流电压源引起的响应，v_2 为由 $10\cos(2t)$V 电压源引起的响应，v_3 为由 $2\sin(5t)$A 电流源引起的响应。

要求 v_1，需将除 5V 直流电源以外的其他电源均设置为零。当电路达到稳态时，电容对直流相当于开路，电感对直流相当于短路。从另一个角度讲，由于 $\omega=0$，所以 $j\omega L=0$，$1/j\omega C=\infty$。此时的等效电路如图 13-17a 所示。由分压原理可知

$$-v_1 = \frac{1}{1+4}\times 5 = 1(\text{V}) \tag{13-7-2}$$

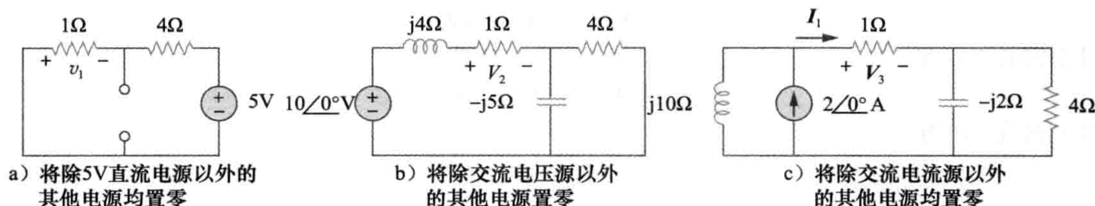


图 13-17 例 13-7 求解过程用到的电路原理图

求 v_2 时，需将 5V 直流电源与 $2\sin(5t)$ A 电流源置零，并将该电路转换到频域：

$$10\cos(2t) \Rightarrow 10\angle 90^\circ\text{A},\quad \omega = 2(\text{rad/s})$$

$$2\text{H} \Rightarrow j\omega L = j4(\Omega)$$

$$0.1\text{F} \Rightarrow \frac{1}{j\omega C} = -j5(\Omega)$$

此时的等效电路如图 13-17b 所示。设

$$\boldsymbol{Z} = -j5 \,/\!/\, 4 = \frac{-j5\times 4}{4-j5} = 2.439 - j1.951$$

由分压原理可知

$$\mathbf{V}_2 = \frac{1}{1+j4+\boldsymbol{Z}}(10\angle 90^\circ) = \frac{10\angle 90^\circ}{3.439+j2.049} = 2.498\angle 59.21^\circ$$

将其变换到时域为

$$v_2(t) = 2.498\sin(2t+59.21^\circ) = 2.498\cos(2t-30.79^\circ) \tag{13-7-3}$$

要求取 v_3，需将两个电压源都置零，并将相应的电路转换到频域。

$$2\sin(5t) \Rightarrow 2\angle 0^\circ\text{A},\quad \omega = 5(\text{rad/s})$$

$$2\text{H} \Rightarrow j\omega L = j10(\Omega)$$

$$0.1\text{F} \Rightarrow \frac{1}{j\omega C} = -j2(\Omega)$$

此时的等效电路如图 13-17c 所示。设

$$\boldsymbol{Z}_1 = -j2 \,/\!/\, 4 = \frac{-j2\times 4}{4-j2} = (0.8-j1.6)(\Omega)$$

由分流原理可知：

$$I_1 = \frac{j10}{j10+1+Z_1}(2\underline{/0^\circ})(A)$$

$$V_3 = I_1 \times 1 = \frac{j10}{1.8+j8.4} \times 2 = 2.328\underline{/12.09^\circ}(V)$$

转换到时域为

$$v_3 = 2.33\sin(5t+12.09^\circ)(V) \tag{13-7-4}$$

将式（13-7-2）～式（13-7-4）代入式（13-7-1），可得：

$$v_o(t) = [-1+2.498\cos(2t-30.79^\circ)+2.33\sin(5t+12.09^\circ)](V)$$ ◀

练习 13-7 试利用叠加定理计算如图 13-18 所示电路中的 v_o。

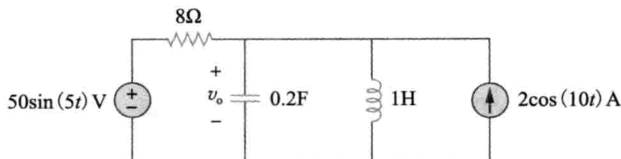


图 13-18 练习 13-7 的电路原理图

答案： $4.631\sin(5t-81.12^\circ)+0.42\cos(10t-86.24^\circ)$ V

13.5 电源变换

如图 13-19 所示，频域中的电源变换是指将与阻抗相串联的电压源转换为与阻抗相并联的电流源，或反之。以下在应用电源变换时，必须牢记住如下关系：

$$\boxed{V_s = Z_s I_s \quad \Leftrightarrow \quad I_s = V_s / Z_s} \tag{13-1}$$

要记住电压源的正端必须要与电流源的箭头相对应，如图 13-19 所示。电源变换应用于受控源时也是一样（参见图 8-13）。

例 13-8 试利用电源变换方法计算如图 13-20 所示电路中的 V_x。

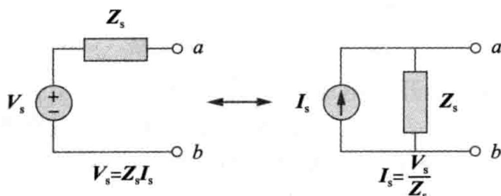


图 13-19 电源变换

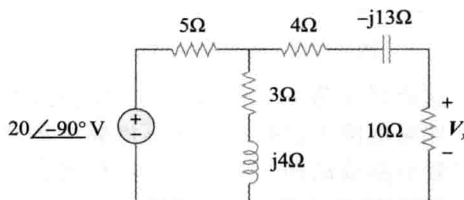


图 13-20 例 13-8 中图 13-19 的电源变换图

解： 将图中的电压源转换为电流源，得到如图 13-21a 所示的电路，其中，

$$I_s = \frac{20\underline{/-90^\circ}}{5} = 4\underline{/-90^\circ} = -j4(A)$$

5Ω 电阻与（3+j4）阻抗并联合并后，得到

$$Z_1 = \frac{5(3+j4)}{8+j4} = 2.5+j1.25(\Omega)$$

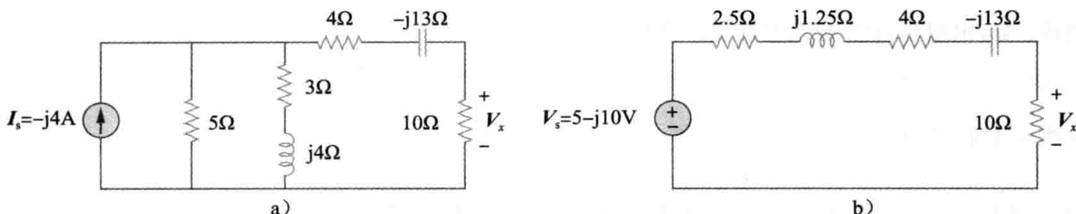


图 13-21 图 13-19 所示电路的求解过程

再将电流源转换为电压源，得到如图 13-21b 所示的电路，其中

$$\mathbf{V}_s = \mathbf{I}_s\mathbf{Z}_1 = -j4(2.5 + j1.25) = (5 - j10)(\text{V})$$

由分压原理可知

$$\mathbf{V}_x = \frac{10}{10 + 2.5 + j1.25 + 4 - j13}(5 - j10) = 5.519\underline{/-28^\circ}(\text{V})$$ ◀

练习 13-8 试利用电源变换的概念求解如图 13-22 所示电路中的 $\mathbf{I}_o$。

答案： $2.21\underline{/19.8^\circ}$A

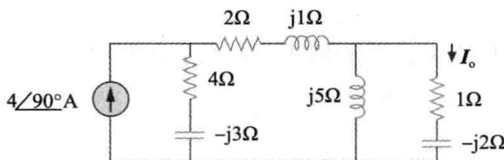


图 13-22 练习 13-8 的电路原理图

13.6 戴维南等效电路与诺顿等效电路

戴维南定理与诺顿定理在交流电路中的应用与在直流电路中的应用是相同的，唯一的不同是需要进行复数运算。戴维南等效电路的频域形式如图 13-23 所示，图中的线性电路用一个电压源和一个阻抗相串联来取代。诺顿等效电路的频域形式如图 13-24 所示，图中的线性电路用一个电流源和一个阻抗相并联来取代。必须牢记的是，上述两种等效电路之间的关系为

$$\boxed{\mathbf{V}_{Th} = \mathbf{Z}_N\mathbf{I}_N, \quad \mathbf{Z}_{Th} = \mathbf{Z}_N}$$

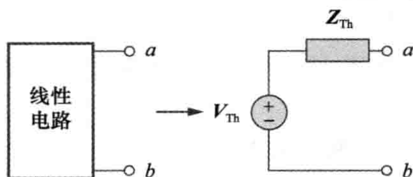


图 13-23 戴维南等效电路

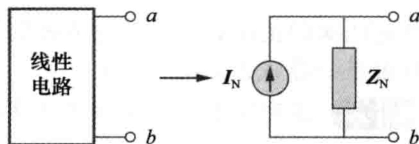


图 13-24 诺顿等效电路

这恰好是前一节介绍的电源变换关系，其中 $\mathbf{V}_{Th}$ 为开路电压，$\mathbf{I}_N$ 为短路电流。

如果电路中包括工作在不同频率的电源（如例 13-7），必须针对各个频率确定其戴维南等效电路或诺顿等效电路。这样就会得到若干个完全不同的等效电路，每一个对应于一个不同的频率，而不是由等效电源和等效阻抗组成的一个等效电路。

例 13-9 试确定如图 13-25 所示电路在端口 *a-b* 处的戴维南等效电路。

解： 将电压源置零即可求出 $\mathbf{Z}_{Th}$。如图 13-26a 所示，8Ω 电阻与 −j6Ω 电抗相并联，于是，合并后的阻抗为

$$\mathbf{Z}_1 = -j6 \mathbin{/\!/} 8 \frac{(-j6)\times 8}{8 - j6} = (2.88 - j3.84)\Omega$$

同理，4Ω 电阻与 j12Ω 电抗相并联，合并后的阻抗为

$$\mathbf{Z}_2 = 4 \mathbin{/\!/} j12 \times \frac{j12 \times 4}{4 + j12} = (3.6 + j1.2)\Omega$$

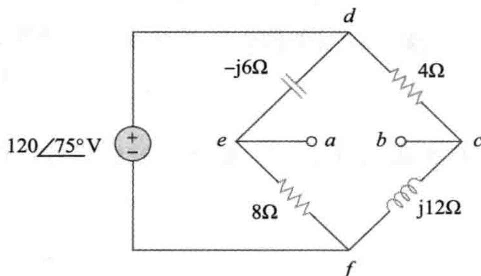


图 13-25 例 13-9 的电路原理图

戴维南阻抗为 $\mathbf{Z}_1$ 与 $\mathbf{Z}_2$ 的串联，即

$$\mathbf{Z}_{Th} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 = (6.48 - j2.64)\Omega$$

要求解 $\mathbf{V}_{Th}$，考虑如图 13-26b 所示电路，图中电流 $\mathbf{I}_1$ 与 $\mathbf{I}_2$ 分别为

$$\boldsymbol{I}_1 = \frac{120\angle 75^\circ}{8 - \mathrm{j}6}\mathrm{A}, \quad \boldsymbol{I}_2 = \frac{120\angle 75^\circ}{4 + \mathrm{j}12}\mathrm{A}$$

沿图 13-26b 所示电路中的回路 $b\ c\ d\ e\ a\ b$ 应用 KVL，得到

$$\boldsymbol{V}_{\mathrm{Th}} - 4\boldsymbol{I}_2 + (-\mathrm{j}6)\boldsymbol{I}_1 = 0$$

即

$$\boldsymbol{V}_{\mathrm{Th}} = 4\boldsymbol{I}_2 + \mathrm{j}6\boldsymbol{I}_1 = \frac{480\angle 75^\circ}{4 + \mathrm{j}12} + \frac{720\angle 75^\circ + 90^\circ}{8 - \mathrm{j}6}$$
$$= 37.95\angle 3.43^\circ + 72\angle 201.87^\circ = -28.936 - \mathrm{j}24.55$$
$$= 37.9\angle 220.31^\circ \mathrm{V}$$

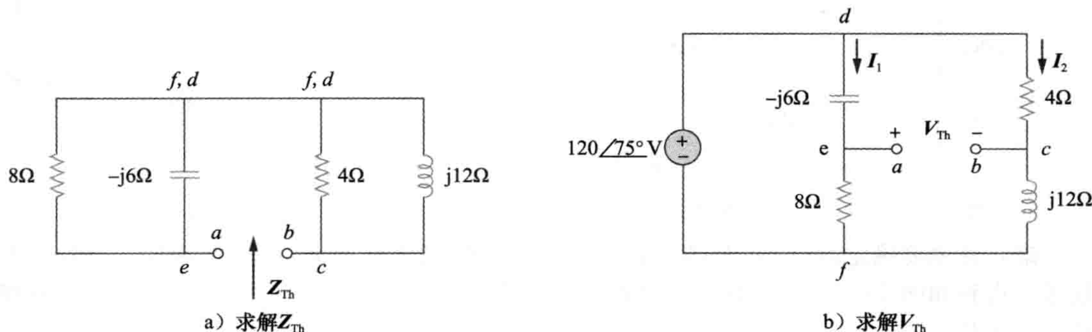


图 13-26　图 13-25 所示电路的求解过程

练习 13-9　试求如图 13-27 所示电路在端口 $a-b$ 处的戴维南等效电路。

答案： $\boldsymbol{Z}_{\mathrm{Th}} = (12.4 - \mathrm{j}3.2)\ \Omega$，$\boldsymbol{V}_{\mathrm{Th}} = 47.42\angle -51.57^\circ \mathrm{V}$

例 13-10　试求如图 13-28 所示电路从端口 $a-b$ 看进去的戴维南等效电路。

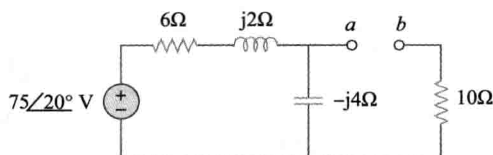


图 13-27　练习 13-9 的电路图

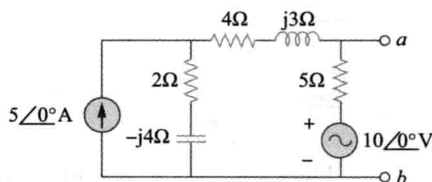


图 13-28　例 13-10 的电路图

解： 要求解 $\boldsymbol{Z}_{\mathrm{Th}}$，将电源置零，得到如图 13-29a 所示电路，有

$$\boldsymbol{Z}_{\mathrm{Th}} = 5\ /\!/\ (4 + \mathrm{j}3 + 2 - \mathrm{j}4) = \frac{5(6 - \mathrm{j})}{5 + 6 - \mathrm{j}} = (2.746 - \mathrm{j}0.205)(\Omega)$$

要求得 $\boldsymbol{V}_{\mathrm{Th}}$，将电流源转换为其等效的电压源如图 13-29b 所示。对回路应用 KVL，可得

$$-(10 - \mathrm{j}20) + \boldsymbol{I}(2 - \mathrm{j}4 + 4 + \mathrm{j}3 + 5) + 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{I} = \frac{-\mathrm{j}20}{11 - \mathrm{j}}(\mathrm{A})$$

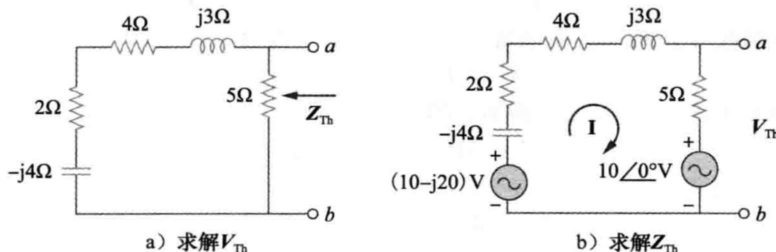


图 13-29　图 13-28 所示电路的求解过程

而

$$V_{Th}=5I+10=\frac{-j100}{11-j}+10=10.82-j9.016=14.08\angle-39.81^\circ(A)$$ ◀

练习 13-10 试确定如图 13-30 所示电路从端口 $a-b$ 看进去的戴维南等效电路。

答案： $Z_{Th}=4.024-j0.2195\Omega$，$V_{Th}=10.748\angle 15.8^\circ V$

例 13-11 试利用诺顿定理求解如图 13-31 所示电路中的电流 I_o。

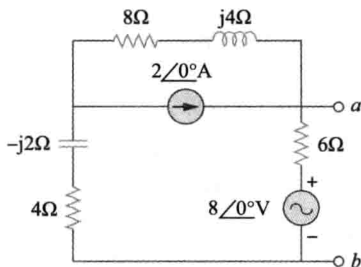


图 13-30 练习 13-10 的电路图

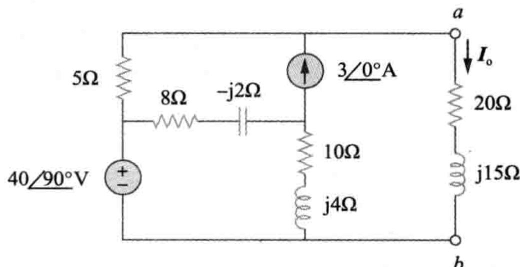


图 13-31 例 13-11 的电路图

解： 首先要确定端口 a-b 处的诺顿等效电路。Z_N 的求法与 Z_{Th} 的求法相同，将各电源置零，得到如图 13-32a 所示电路。明显看出，图中阻抗 $(8-j2)\ \Omega$ 与 $(10+j4)\ \Omega$ 被短路了，于是

$$Z_N=5(\Omega)$$

要求得 I_N，将端口 $a-b$ 短路，如图 13-32b 所示，利用网孔分析法求解。由于网孔 2 与网孔 3 之间连接了一个电流源，所以网孔 2 与网孔 3 形成一个超网孔。对于网孔 1，有：

$$-j40+(18+j2)I_1-(8-j2)I_2-(10+j4)I_3=0 \tag{13-11-1}$$

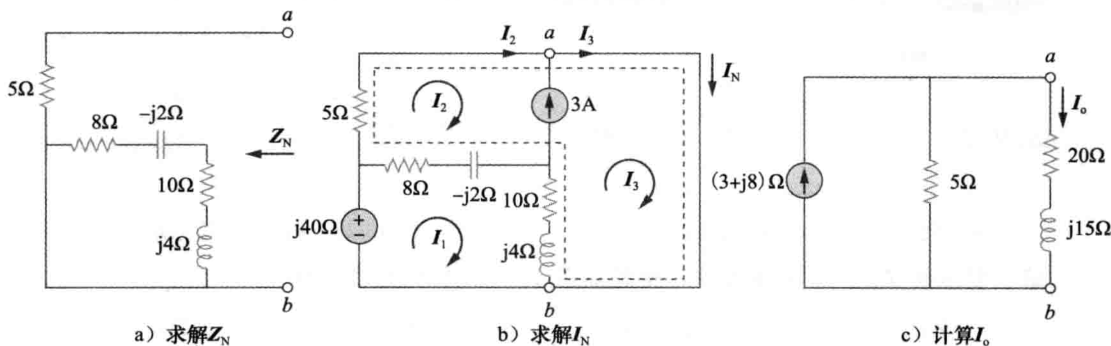


图 13-32 图 13-32 所示电路的求解过程

对于超网孔，有

$$(13-j2)I_2+(10+j4)I_3-(18+j2)I_1=0 \tag{13-11-2}$$

由于网孔 2 与网孔 3 之间存在电流源，于是在节点 a 处有

$$I_3=I_2+3 \tag{13-11-3}$$

将式 (13-13-1) 和与 (13-13-2) 相加，得到

$$-j40+5I_2=0 \quad\Rightarrow\quad I_2=j8A$$

由式 (13-13-3) 可得

$$I_3=I_2+3=(3+j8)(A)$$

于是，诺顿电流为

$$I_N=I_3=(3+j8)A$$

图 13-32c 给出了诺顿等效电路与端口 a-b 两端的负载阻抗相连的电路图。由分流原理，可得：

$$\boldsymbol{I}_o=\frac{5}{5+20+\mathrm{j}15}\boldsymbol{I}_N=\frac{3+\mathrm{j}8}{5+\mathrm{j}3}=1.465\underline{/38.48^\circ}(\mathrm{A})$$ ◀

练习 13-11　试确定如图 13-33 所示电路从端口 a-b 看进去的诺顿等效电路，并利用得到的等效电路求出 $\boldsymbol{I}_o$。

答案： $\boldsymbol{Z}_N=3.176+\mathrm{j}0.706\Omega$，$\boldsymbol{I}_N=8.395\underline{/-7.62^\circ}\mathrm{A}$，$\boldsymbol{I}_o=1.971\underline{/22.95^\circ}\mathrm{A}$

例 13-12　试求解如图 13-34 所示电路从端口 a-b 看进去的戴维南等效电路和诺顿等效电路。

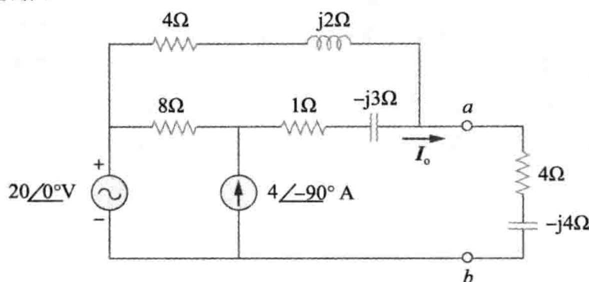


图 13-33　练习 13-11 的电路图

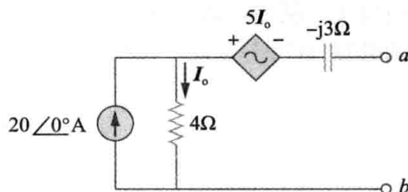


图 13-34　例 13-12 的电路图

解： 要求得 $\boldsymbol{V}_{Th}$，考虑如图 13-35a 所示电路。由于端口 a-b 间开路，可得

$$\boldsymbol{I}_o=2\mathrm{A}$$

对图 13-35a 所示电路中右边的回路应用 KVL，可得

$$-\boldsymbol{V}_{Th}+0(-\mathrm{j}3)-5\boldsymbol{I}_o+4\boldsymbol{I}_o=0\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{V}_{Th}=-\boldsymbol{I}_o=-2\mathrm{V}$$

要求解 $\boldsymbol{Z}_{Th}$，将独立电流源移去，留下受控源。由于电路中存在受控源，所以在端口 a-b 连接一个 1A 的电源，如图 13-35b 所示，显然有：

$$\boldsymbol{I}_o=\boldsymbol{I}_s=1\mathrm{A}$$

对该回路应用 KVL，可得

$$\boldsymbol{I}_o=\boldsymbol{I}_s=1\mathrm{A}$$

因此有

$$-\boldsymbol{V}_s-5\boldsymbol{I}_o+\boldsymbol{I}_o(4-\mathrm{j}3)=0\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{V}_s=-1-\mathrm{j}3$$ ◀

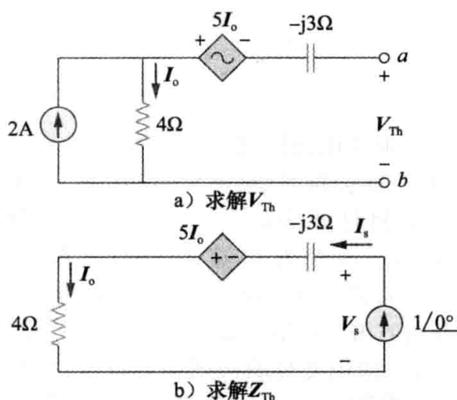


图 13-35　例 13-12 所示电路的求解过程

练习 13-12　试确定如图 13-36 所示电路从端口 a-b 看进去的戴维南等效电路和诺顿等效电路。

答案： $\boldsymbol{V}_{Th}=5.25\mathrm{V}$；$\boldsymbol{Z}_{Th}=\boldsymbol{Z}_N=2.828\underline{/225^\circ}\Omega$；$\boldsymbol{I}_N=1.856\underline{/-225^\circ}\mathrm{A}$

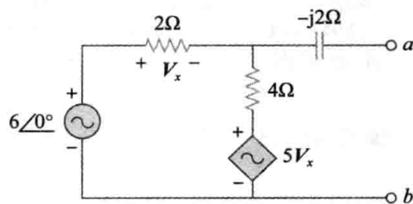


图 13-36　练习 13-12 的电路图

13.7　计算机分析

PSpice 软件为交流电路分析中繁杂的复数运算提供了极大的方便。利用 PSpice 分析交流电路的过程与分析直流电路的过程基本相同。读者可以通过阅读附录 C 的 C.5 节回顾用 PSpice 分析交流电路的相关知识。交流电路分析是在相量域或频域中进行的，所有电源必须具有相同的频率。虽然 PSpice 中的交流分析包括 ACSweep 命令，但本章所涉及的交流电路分析仅限于单个频率 $f=\omega/2\pi$。PSpice 的输出文件包括电压相量与电流相量。如

果需要，还可以利用输出文件中的电压与电流计算出阻抗。

例 13-13 求解如图 13-37 所示电路中的 $\mathbf{V}_1$ 与 $\mathbf{V}_2$。

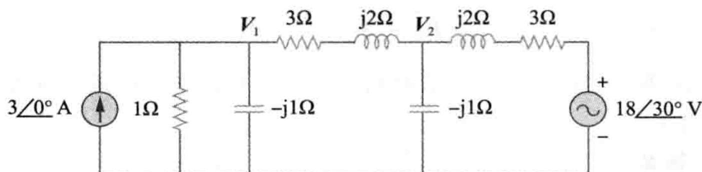


图 13-37 例 13-13 的电路图

解： 这里利用 PSpice 进行电路分析的方法与第 12 章中进行分析的方法相类似（参见例 12-11）。如图 12-27 所示电路为时域，而图 13-37 所示电路为频域，二者不同之处在于后者更为复杂。由于题中没有指定特定的频率而 PSpice 需要指定，因此这里可以选择任一与给定阻抗相一致的频率。例如，如果选定 $\omega=1\text{rad/s}$，那么相应的频率为 $f=\omega/2\pi=0.159155\text{Hz}$。由此，可以得到电容（$C=1/\omega X_C$）和电感（$L=X_L/\omega$）。作上述改变后所得到的原理图如图 13-38 所示。

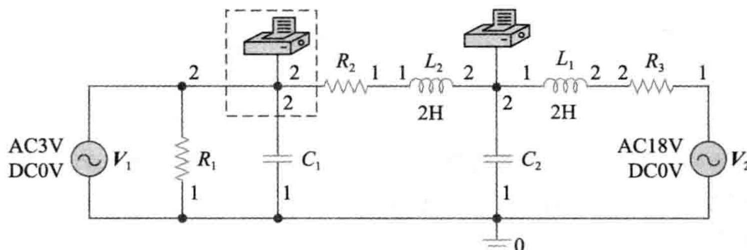


图 13-38 图 10-37 所示电路的原理图

画完电路图之后，将其保存为 exam1313. dsn，然后选择 PSpice/New Simulation Profile，就会打开 New Simulation 对话框。输入“exam1313”作为文件名，然后单击 Create，将打开 Simulation Setting 对话框。在对话框中的 Analysis type 选择 AC Sweep / Noise。由于为单频率分析，在 Start Freq 中输入 0.159155，在 Final Freq 中输入 0.159155，且 Total Point 中输入 1。保存好电路原理图后，选择 PSpice/Run 仿真电路。此时打开 Probe，即图形处理器。回到电路原理图窗口，然后选择 PSpice/View Output File。输出文件除包括伪元件 VPRINT1 的属性外，还包括电源频率，即

```
FREQ         VM(1)        VP(1)
1.592E-01    2.230E+00    1.724E+02

FREQ         VM(2)        VP(2)
1.592E-01    5.430E+00    -5.521E+01
```

由此可得

$$\mathbf{V}_1 = 2.23\angle 172.4^\circ\text{V}, \quad \mathbf{V}_2 = 5.43\angle -55.21^\circ\text{V}$$ ◀

练习 13-13 求解如图 13-39 所示电路中的 $\mathbf{V}_x$ 与 $\mathbf{I}_x$。

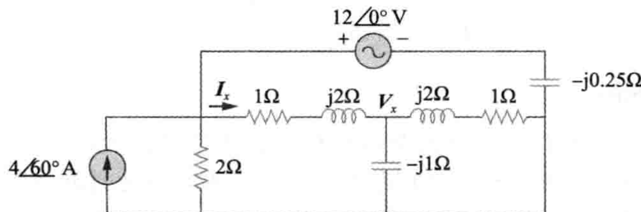


图 13-39 练习 13-13 的电路图

答案： $13.02\angle 103.9^\circ\text{V}$，$8.234\angle 175.5^\circ\text{A}$

13.8　本章小结

1）由于 KCL 与 KVL 适用于电路的相量形式，所以节点电压分析法与网孔电流分析法同样可以用于分析交流电路。
2）在求解电路的稳态响应时，如果电路中包含不同频率的多个独立源，则必须单独考虑每个独立源。分析这类电路最基本的方法是采用叠加定理。对应于不同频率的相量电路必须单独求解，并将相应的响应转换为时域响应，电路总响应则为各个相量电路的时域响应之和。
3）电源转换的概念同样适用于频域。
4）交流电路的戴维南等效电路，由等效电压源 $\boldsymbol{V}_{Th}$ 和与之串联的戴维南阻抗 $\boldsymbol{Z}_{Th}$ 组成。
5）交流电路的诺顿等效电路，由等效电流源 $\boldsymbol{I}_N$ 和与之并联的诺顿阻抗 $\boldsymbol{Z}_N$（$=\boldsymbol{Z}_{Th}$）组成。
6）PSpice 软件包是求解交流电路问题的一个简单而有力的工具，它极大地简化了电路稳态分析过程中遇到的繁杂的复数运算问题。

复习题

1　如图 13-40 所示电路中，电流 $i(t)$ 为：

(a) $10\cos(t)$ A　(b) $10\sin(t)$ A
(c) $5\cos(t)$ A　(d) $5\sin(t)$ A
(e) $4.472\cos(t-63.43°)$ A

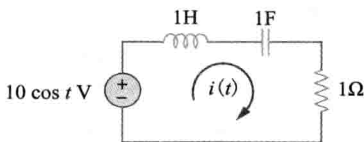


图 13-40　复习题 1 的电路图

2　如图 13-41 所示电路中，电容器两端的电压 $\boldsymbol{V}_o$ 为：

(a) $5\angle 0°$V　(b) $7.071\angle 45°$V
(c) $7.071\angle -45°$V　(d) $5\angle -45°$V

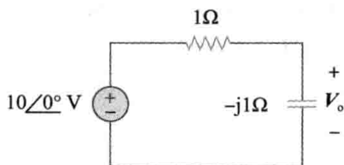


图 13-41　复习题 2 的电路图

3　如图 13-42 所示电路中电流 $\boldsymbol{I}_o$ 为：

(a) $4\angle 0°$A　(b) $2.4\angle -90°$A
(c) $0.6\angle 0°$A　(d) -1A

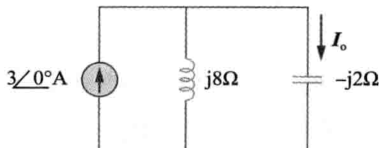


图 13-42　复习题 3 的电路原理图

4　利用节点分析法求出图 13-43 所示电路中的 $\boldsymbol{V}_o$ 为：

(a) -24V　(b) -8V
(c) 8V　(d) 24V

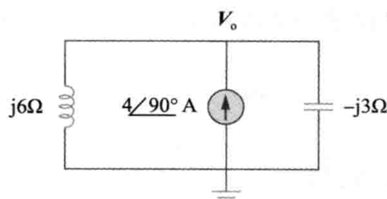


图 13-43　复习题 4 的电路图

5　在如图 13-44 所示电路中，两个电源具有不同的频率，试问电流 $i_x(t)$ 可以用以下哪种方法求得？

(a) 电源变换　(b) 叠加定理
(c) PSpice

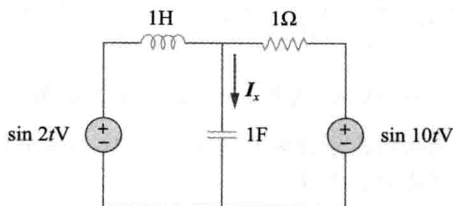


图 13-44　复习题 5 的电路图

6　对于如图 13-45 所示电路，端口 a-b 处的戴维南阻抗为：

(a) 1Ω　(b) $(0.5-j0.5)$Ω
(c) $(0.5+j0.5)$Ω　(d) $(1+j2)$Ω
(e) $(1-j2)$Ω

7　在如图 13-45 所示电路中，端口 a-b 处的戴

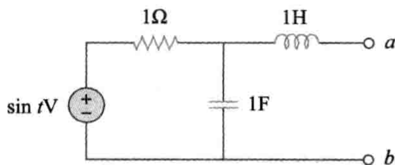


图 13-45 复习题 6 和 7 的电路图

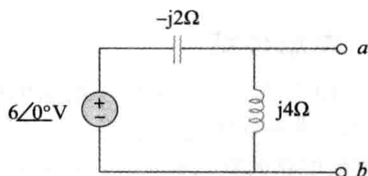


图 13-46 复习题 8 和 9 的电路图

维南电压为：

(a) $0.7071\angle -45^\circ$V

(b) $7.071\angle 45^\circ$V

(c) $0.3535\angle -45^\circ$V

(d) $0.3535\angle 45^\circ$V

8 在如图 13-46 所示电路中，端口 a-b 处的诺顿等效阻抗为：

(a) $-$j4Ω (b) $-$j2Ω

(c) j2Ω (d) j4Ω

9 如图 13-46 所示电路在端口 a-b 处的诺顿电流为：

(a) $1\angle 0^\circ$V (b) $1.5\angle -90^\circ$V

(c) $1.5\angle 90^\circ$V (d) $3\angle 90^\circ$V

10 PSpice 软件包可以处理包括两个不同频率独立电源的电路。

(a) 正确 (b) 错误

答案：1 (a)，2 (c)，3 (a)，4 (d)，5 (b)，6 (c)，7 (a)，8 (a)，9 (d)，10 (b)

习题

13.2 节

1 利用网孔分析法求解如图 13-47 所示电路中的 i_o。

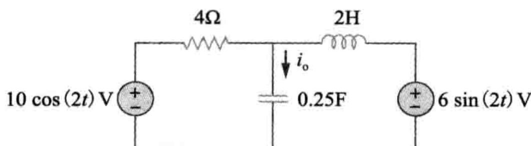


图 13-47 习题 1 的电路图

2 利用网孔分析法求解如图 13-48 所示电路中的电流 $\boldsymbol{I}_1$ 与 $\boldsymbol{I}_2$。

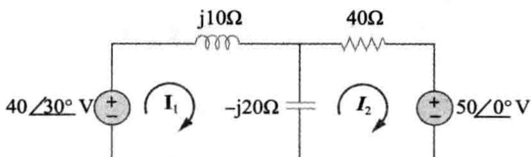


图 13-48 习题 2 和习题 36 的电路图

3 利用网孔分析法求解如图 13-49 所示电路中的电流 $\boldsymbol{I}_1$ 与 $\boldsymbol{I}_2$。

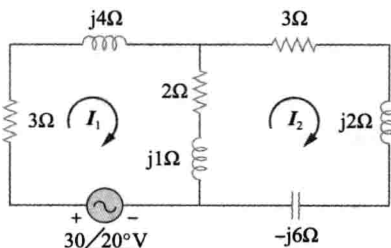


图 13-49 习题 3 的电路图

4 试利用网孔分析法求解如图 13-50 所示电路中的电流 i_o。

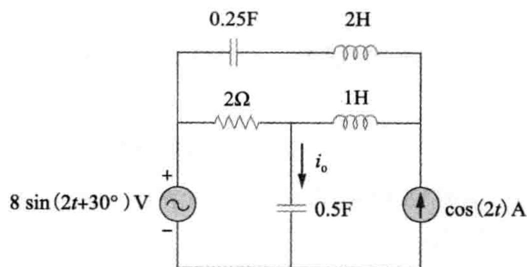


图 13-50 习题 4 和习题 14 的电路图

5 试利用网孔分析法求解如图 13-51 所示电路中的 $\boldsymbol{I}_1$、$\boldsymbol{I}_2$、$\boldsymbol{I}_3$ 与 $\boldsymbol{I}_x$。

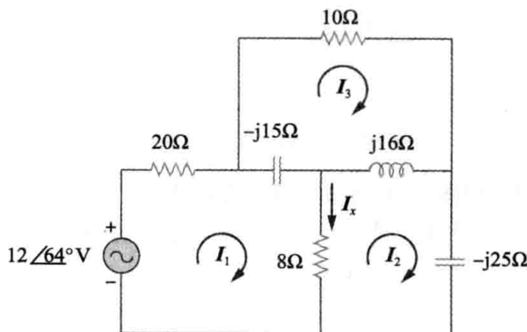


图 13-51 习题 5 的电路图

6 利用网孔分析法，求解如图 13-52 所示电路中的 $\boldsymbol{V}_o$。

7 试利用网孔分析法求解如图 13-53 所示电路

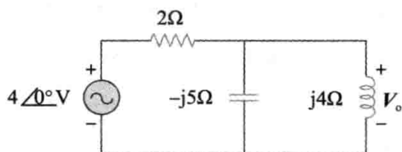


图 13-52 习题 6、习题 20 和习题 36 的电路图

中的电流 i_o。

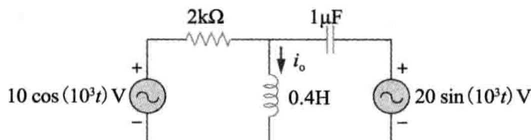


图 13-53 习题 7 的电路图

8 试利用网孔分析法求解如图 13-54 所示电路中的 $\mathbf{V}_o$，假定 $v_{s1}=120\cos(100t+90°)$ V，$v_{s2}=80\cos(100t)$ V。

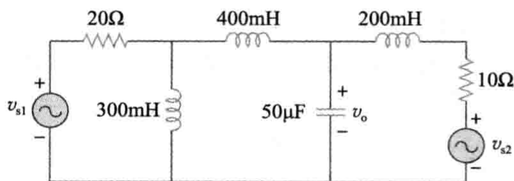


图 13-54 习题 8 的电路图

9 试利用网孔分析法求解如图 13-55 所示电路中的电流 $\mathbf{I}_1$ 与 $\mathbf{I}_2$。

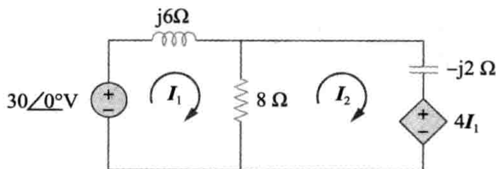


图 13-55 习题 9 的电路图

10 写出如图 13-56 所示电路中四个网孔方程，不必求解。

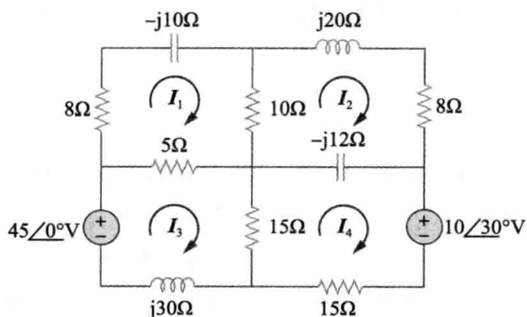


图 13-56 习题 10 的电路图

11 利用网孔分析法求解如图 13-57 所示电路中的电流 $\mathbf{I}$。

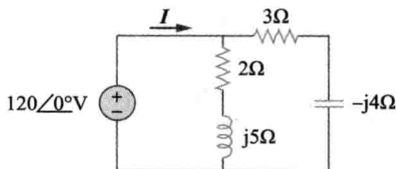


图 13-57 习题 11 的电路图

13.3 节

12 试利用节点分析法求解如图 13-58 所示电路中的 v_x。

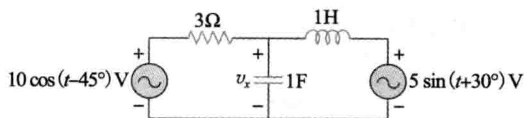


图 13-58 习题 12 的电路图

13 试利用节点分析法求解如图 13-59 所示电路中的 $\mathbf{V}_o$。

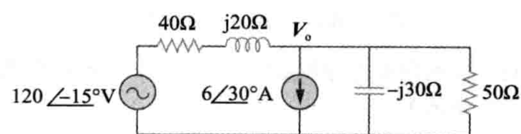


图 13-59 习题 13 的电路图

14 试利用节点分析法求解如图 13-50 所示电路中的 i_o。

15 自行选择方法求解如图 13-60 所示电路中的 $\mathbf{V}_x$。

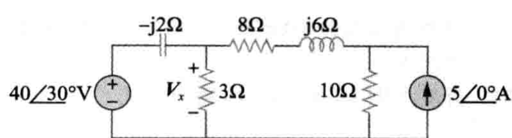


图 13-60 习题 15 的电路图

16 试利用节点分析法计算如图 13-61 所示电路中节点 1 与节点 2 的电压。

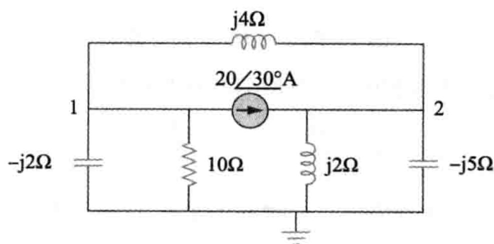


图 13-61 习题 16 和习题 53 的电路图

17 试利用节点分析法求解如图 13-62 所示电路中的 $\boldsymbol{V}_1$ 和 $\boldsymbol{V}_2$。

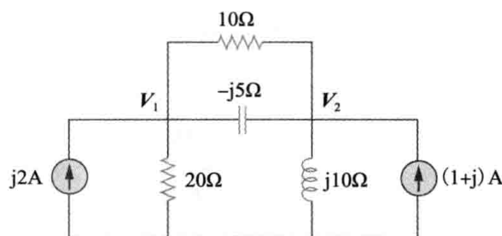


图 13-62 习题 17 的电路图

18 试利用节点分析法求解如图 13-63 所示电路中的 $\boldsymbol{I}_o$。

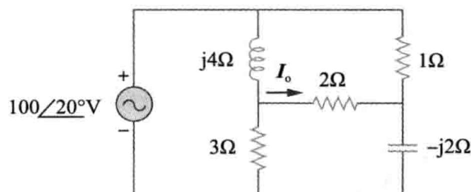


图 13-63 习题 18 的电路图

19 试利用节点分析法求解如图 13-64 所示电路中的 $\boldsymbol{V}_x$。

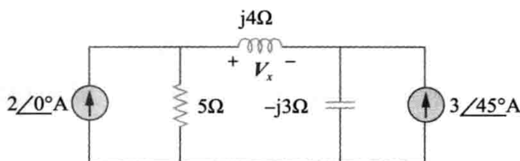


图 13-64 习题 19 和习题 54 的电路图

20 试利用节点分析法求解如图 13-52 所示电路中的 $\boldsymbol{V}_o$。

21 计算如图 13-65 所示电路中的 $\boldsymbol{I}_x$。

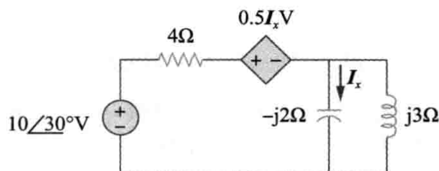


图 13-65 习题 21 的电路图

22 求解如图 13-66 所示电路中的 $\boldsymbol{V}_x$。

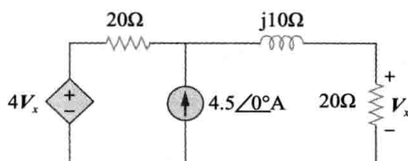


图 13-66 习题 22 的电路图

23 求解如图 13-67 所示电路中的 $\boldsymbol{V}_o$、$\boldsymbol{I}_1$ 和 $\boldsymbol{I}_2$。

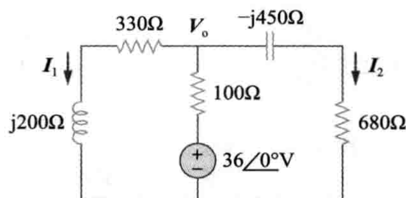


图 13-67 习题 23 的电路图

24 利用节点分析法求解如图 13-68 所示电路中 $\boldsymbol{I}$。

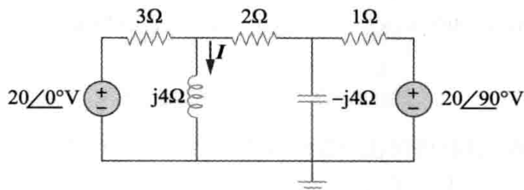


图 13-68 习题 24 的电路图

13.4 节

25 试利用叠加定理求解如图 13-69 所示电路中的 i_o。

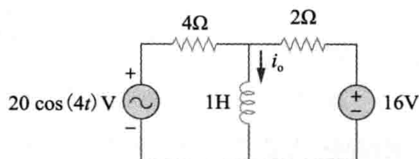


图 13-69 习题 25 的电路图

26 试利用叠加定理计算如图 13-70 所示电路中的 v_x。

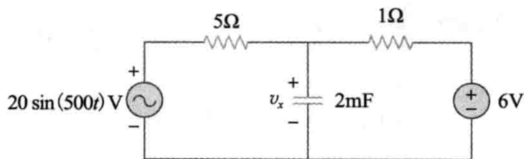


图 13-70 习题 26 的电路图

27 试利用叠加定理计算如图 13-71 所示电路中的 i_x。

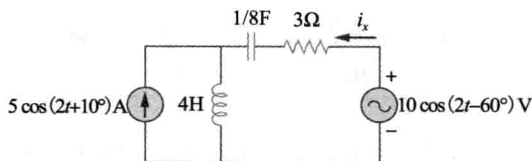


图 13-71 习题 27 的电路图

28 试利用叠加定理计算如图 13-72 所示电路中的 v_x。假定 $v_s = 50\sin(2t)$ V，且 $i_s = 12\cos(6t + 10^\circ)$ A。

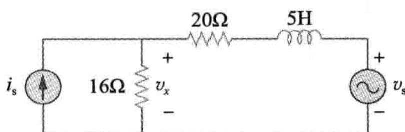


图 13-72　习题 28 的电路图

29　试利用叠加定理求解如图 13-73 所示电路中的 $v_o(t)$。

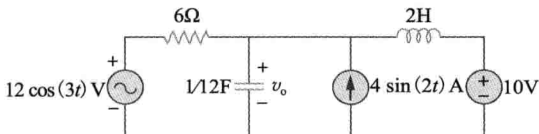


图 13-73　习题 29 的电路图

30　确定如图 13-74 所示电路中的 i_o。

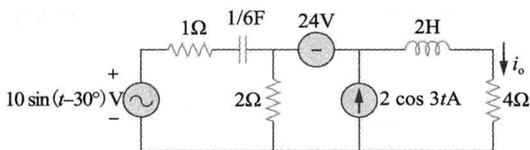


图 13-74　习题 30 的电路图

31　试利用叠加定理求解如图 13-75 所示电路中的 $i(t)$。

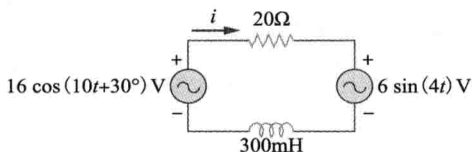


图 13-75　习题 31 的电路图

32　试求解如图 13-76 所示电路中的 v_o，假定$v_s=6\cos 2t+4\sin 4t$V。

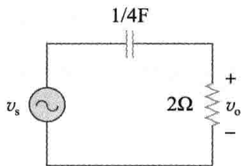


图 13-76　习题 32 的电路图

33　试利用叠加定理求解如图 13-77 所示电路中的 $\mathbf{V}_o$。

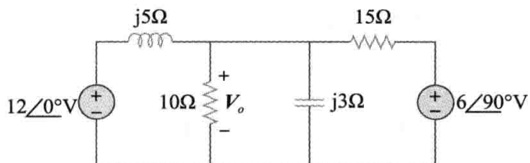


图 13-77　习题 33 的电路图

13.5 节

34　试利用电源变换方法求解如图 13-78 所示电路中的 i。

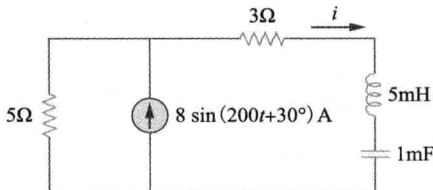


图 13-78　习题 34 的电路图

35　试利用电源变换方法求解如图 13-79 所示电路中的 v_o。

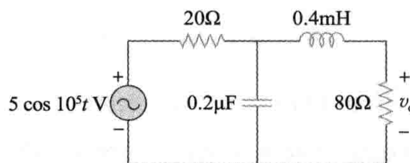


图 13-79　习题 35 的电路图

36　试利用电源变换方法求解习题 2。

37　试利用电源变换方法求解如图 13-80 所示电路中的 $\mathbf{V}_o$。

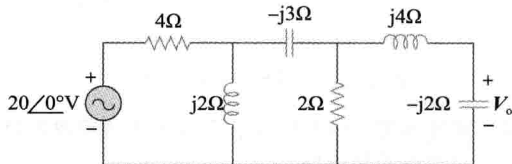


图 13-80　习题 37 的电路图

38　试利用电源变换方法求解如图 13-81 所示电路中的 $\mathbf{I}_o$。

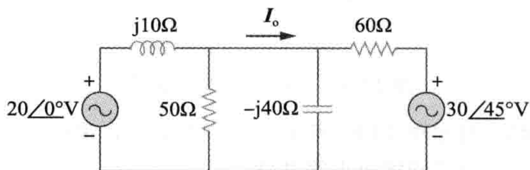


图 13-81　习题 38 的电路图

39　试利用电源变换方法求解如图 13-82 所示电路中的 $\mathbf{V}_o$。

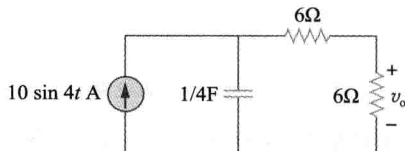
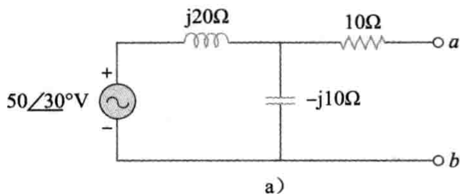


图 13-82　习题 39 的电路图

13.6 节

40 试求如图 13-83 所示各电路在端口 a-b 处的戴维南等效电路与诺顿等效电路。



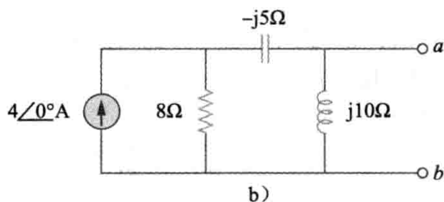


图 13-83 习题 40 的电路图

41 对如图 13-84 所示电路，求解其在端口 a-b 处的戴维南等效电路与诺顿等效电路。

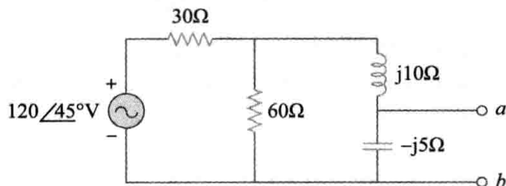


图 13-84 习题 41 的电路图

42 求解如图 13-85 所示电路的戴维南等效电路与诺顿等效电路。

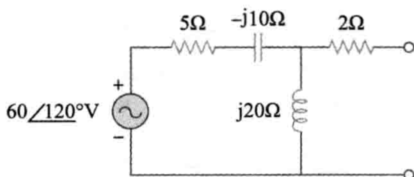


图 13-85 习题 42 的电路图

43 对如图 13-86 所示电路，求解其在端口 a-b 处的戴维南等效电路。

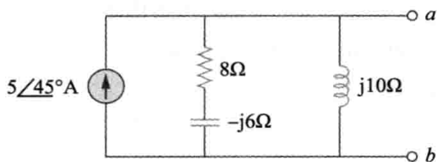


图 13-86 习题 43 的电路图

44 试求解如图 13-87 所示电路从如下端口看进去的戴维南等效电路。

(a) 端口 a-b，(b) 端口 c-d

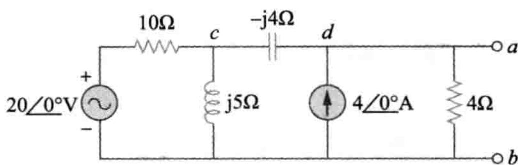


图 13-87 习题 44 的电路图

45 对如图 13-88 所示电路，求解其在端口 a-b 处的诺顿等效电路。

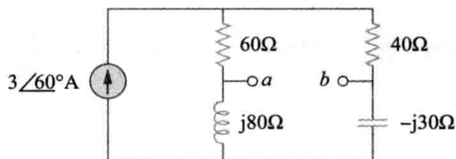


图 13-88 习题 45 的电路图

46 试利用诺顿定理计算如图 13-89 所示电路中的 i_o。

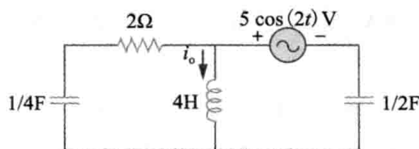


图 13-89 习题 46 的电路图

47 求解如图 13-90 所示电路在端口 a-b 处的戴维南等效电路与诺顿等效电路。

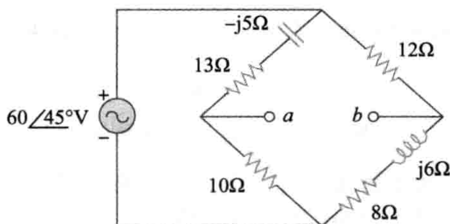


图 13-90 习题 47 的电路图

48 试利用戴维南定理求解如图 13-91 所示电路中的 v_o。

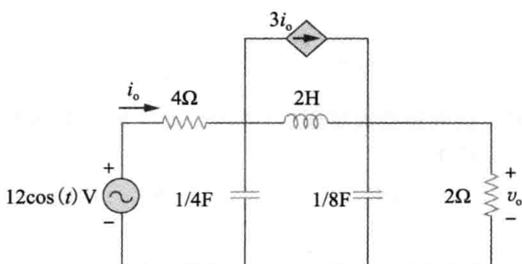


图 13-91 习题 48 的电路图

49 试确定如图 13-92 所示电路在端口 a-b 处的

戴维南等效电路与诺顿等效电路。假定$\omega=10\text{rad/s}$。

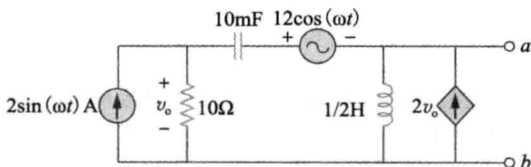


图 13-92 习题 49 的电路图

50 试求解如图 13-93 所示电路在端口 a-b 处的戴维南等效电路。

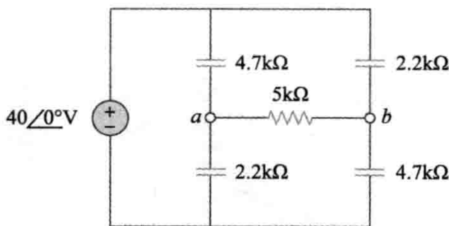


图 13-93 习题 50 的电路图

51 试利用戴维南定理求解如图 13-94 所示电路中 $\boldsymbol{Z}_L$ 的端电压。

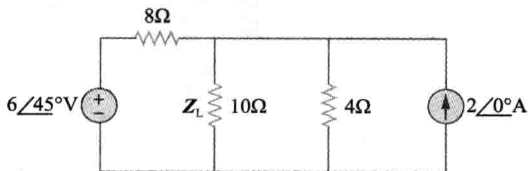


图 13-94 习题 51 的电路图

52 试利用戴维南定理求解如图 13-95 所示电路中的 $\boldsymbol{V}_o$。

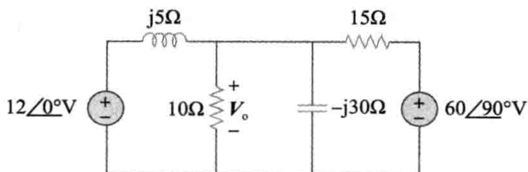


图 13-95 习题 52 的电路图

13.7 节

53 试利用 PSpice 求解习题 16。

54 试利用 PSpice 重做习题 19。

55 试利用 PSpice 求解如图 13-96 所示电路中的 v_o，假定 $i_s=2\cos(10^3t)\text{A}$。

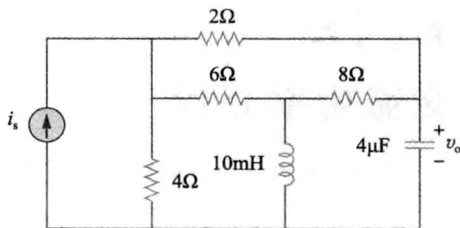


图 13-96 习题 55 的电路图

56 试利用 PSpice 确定如图 13-97 所示网络中的 $\boldsymbol{V}_1$、$\boldsymbol{V}_2$ 与 $\boldsymbol{V}_3$。

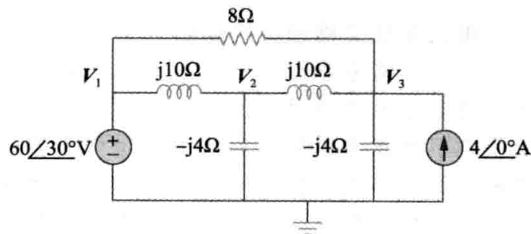


图 13-97 习题 56 的电路图

57 试利用 PSpice 确定如图 13-98 所示电路中的 $\boldsymbol{V}_1$、$\boldsymbol{V}_2$ 与 $\boldsymbol{V}_3$。

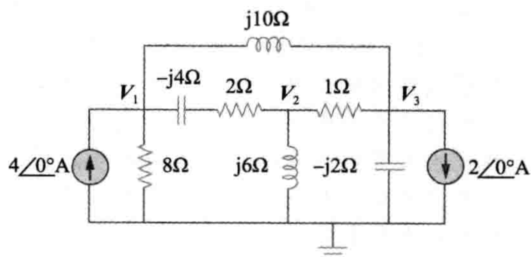


图 13-98 习题 57 的电路图

58 试利用 PSpice 确定如图 13-99 所示电路中的 $\boldsymbol{V}_o$，假定 $\omega=1\text{rad/s}$。

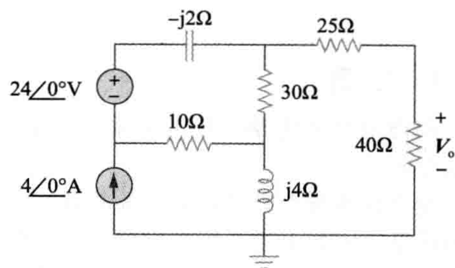


图 13-99 习题 58 的电路图

第14章

交流功率分析

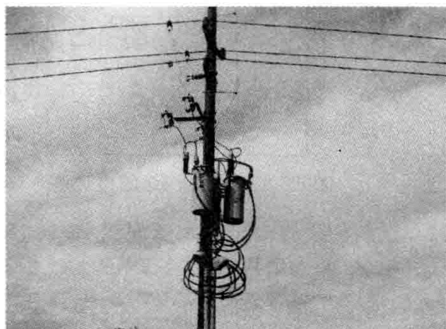
给年轻人最好的职业建议是："找到你最喜欢做的，并且有人愿意为此支付你薪水"。

——凯瑟琳·怀特霍恩（Katharine Whitehorn）

扩展职业生涯：

电力系统工程领域的职业

电子电路分析被应用到电子工程技术的很多领域，其中一个领域是电力系统。1831年，迈克尔·法拉第（Michael Faraday）发现了交流发电机的基本原理，成为工程领域中的一项重大突破。这一突破为电能的产生提供了一种非常便捷的途径，而电能是每一个电子设备、电气设备或者机电设备所必须的能源。



电力传输线

（© Sarhan M. Musa）

电能是由不同形式的其他能源转换得到的，诸如矿物燃料（天然气、石油和煤）、核燃料（铀）、水力资源（江河高度落差）、地热能（热水、热气）、风能、潮汐能和生物能（废弃物）等。电力工程领域详细研究电能的各种产生途径，并成为电子工程技术学科中一个必不可少的分支学科。电子工程技术人员应该熟悉和掌握电能的分析、产生、输送、配送和成本计算的基础知识。

电力工业行业是电子工程技术人员的重要就业领域。电力工业包括成千上万个电力供应系统，大到服务于各大区域的大型互联电网，小到为各个社区和工厂供电的小型电力公司。由于电力工业所固有的复杂性，这个行业的不同部门可以提供大量的电气技术工作岗位，例如，发电厂（发电）、输送和配电、系统维护、技术研究、数据采集和数据流控制、以及管理等。因为电力的广泛使用，电力公司也到处都存在，同时也为世界各国的人们提供令人兴奋的培训机会和稳定的就业机会。

14.1 引言

前面对交流电路分析的主要内容集中于电压与电流的计算，本章主要讨论交流电路的功率分析。

交流功率分析具有极其重要的意义。功率是电力工业、电子设备与通信系统中最为重要的物理量，因为上述系统中均存在从一点到另一点的功率传输。同时，各种工业用电设备或家用电子设备（如电扇、电动机、照明灯、电熨斗、电视机、个人计算机）都有额定功率，它表示电子设备正常工作所要求的功率，如果超过额定功率将造成设备的永久性损坏。

电力传输（Electric power transmission）是指将大规模电力从一个地方输送到另一个地方，最为典型的就是将电力从发电站输送到人口聚居区附近的变电站，但它不同于变电站将电力分配给消费者的配电过程。由于电力传输过程涉及大规模电力，所以通常采用高压电（110kV 或者更高）进行传输。一般情况，远距离电力传输都采用图 14-1 所示的架

空传输线。表 14-1 则总结了世界上主要国家电力系统的相关信息。

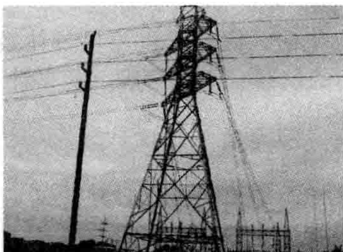


图 14-1 典型的功率分配系统

表 14-1 世界各国的电力供应信息

国家	电压 (rms)/V	频率/Hz	国家	电压 (rms)/V	频率/Hz
澳大利亚	240	50	以色列	220	50
孟加拉共和国	240	50	日本	100	50/60
巴西	110/220	60	尼日利亚	240	50
加拿大	120	60	俄罗斯	220	50
中国	220	50	南非	220/230	50
法国	230	50	西班牙	220	50
埃及	220	50	英国	230	50
德国	230	50	美国	120	60
印度	230	50			

本章首先定义并推导**瞬时功率**（instantaneous power）与平均功率（average power），之后引入其他功率的概念。作为这些概念的实际应用，本章还将讨论如何测量功率，以及电力公司如何收取消费者的电费。

14.2 瞬时功率与平均功率

元件吸收的**瞬时功率**（instantaneous power）$p(t)$ 等于该元件两端的瞬时电压 $v(t)$ 与流经该元件的瞬时电流 $i(t)$ 的乘积。它是元件吸收能量的速率[⊖]。

$$\boxed{p(t)=v(t)i(t)} \tag{14-1}$$

瞬时功率是电路元件在任意给定时刻所吸收的功率。

下面考虑电路元件的任意组合在正弦信号激励下吸收的瞬时功率的一般情况，如图 14-2 所示。假设电路终端的电压与电流为

$$v(t)=V_m\cos(\omega t+\theta_v) \tag{14-2a}$$

$$i(t)=I_m\cos(\omega t+\theta_i) \tag{14-2b}$$

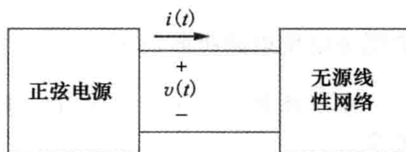


图 14-2 正弦电源与无源线性电路

其中，V_m 与 I_m 为幅度（或峰值），θ_v 与 θ_i 分别为电压与电流的相位角。因此，电路吸收的瞬时功率为

$$p(t)=v(t)i(t)=V_mI_m\cos(\omega t+\theta_v)\cos(\omega t+\theta_i) \tag{14-3}$$

利用三角恒等式，可得：

$$\cos A\cos B=\frac{1}{2}[\cos(A-B)+\cos(A+B)],$$

⊖ 注：瞬时功率可以看作为元件在特定时刻吸收的功率，同第一章所指出的，瞬时的或时变的变量用小写字母表示。

$$p(t)=\frac{1}{2}V_{\mathrm{m}}I_{\mathrm{m}}\cos(\theta_v-\theta_i)+\frac{1}{2}V_{\mathrm{m}}I_{\mathrm{m}}\cos(2\omega t+\theta_v+\theta_i) \tag{14-4}$$

由于瞬时功率是随时间而变化的，因此难以测量具体数值。相对而言，平均功率则容易测量。实际上，用于测量功率的仪器——瓦特表（功率计）所测得的功率就是平均功率。

平均功率是指一个周期内瞬时功率的平均值。

仔细观察式（14-4）中的瞬时功率，可知 $p(t)$ 包括两部分，第一部分为常量，第二部分为时变函数。因为余弦函数在一个周期内的平均值为零，所以式（14-4）中的第二项的平均值为零。因此，平均功率可以表示为

$$P=\frac{1}{2}V_{\mathrm{m}}I_{\mathrm{m}}\cos(\theta_v-\theta_i) \tag{14-5}$$

由于 $\cos(\theta_v-\theta_i)=\cos(\theta_i-\theta_v)$，所以重要的是电压与电流之间的相位差。

注意，$p(t)$ 是随时间变化的，而 P 是与时间无关的。如果需要计算瞬时功率，必须求出时域中的 $v(t)$ 与 $i(t)$；但是要求计算平均功率时，电压与电流不仅可以在时域中表达，如式（14-2）所示，也可以在频域中表达。式（14-2）中 $v(t)$ 与 $i(t)$ 的相量形式分别为 $\mathbf{V}=V_{\mathrm{m}}\angle\theta_v$ 与 $\mathbf{I}=I_{\mathrm{m}}\angle\theta_i$，$P$ 既可以用式（14-5）计算，也可以用相量 $\mathbf{V}$ 与 $\mathbf{I}$ 计算。利用相量计算时，由于：

$$\frac{1}{2}\mathbf{V}\mathbf{I}^*=\frac{1}{2}V_{\mathrm{m}}I_{\mathrm{m}}\angle(\theta_v-\theta_i)=\frac{1}{2}V_{\mathrm{m}}I_{\mathrm{m}}[\cos(\theta_v-\theta_i)+\mathrm{j}\sin(\theta_v-\theta_i)] \tag{14-6}$$

[星号（*）表示复共轭，同式（12-6g）]

可以看出，上式中的实部即式（14-5）所定义的平均功率 P，因此：

$$\boxed{P=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\mathbf{V}\mathbf{I}^*]=\frac{1}{2}V_{\mathrm{m}}I_{\mathrm{m}}\cos(\theta_v-\theta_i)} \tag{14-7}$$

下面考虑式（14-7）的两种特殊情况。

■ **情况 1** 当 $\theta_v=\theta_i$ 时，电压与电流同相，意指纯电阻电路或电阻性负载 R，且有：

$$P=\frac{1}{2}V_{\mathrm{m}}I_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}I_{\mathrm{m}}^2R=\frac{1}{2}|\mathbf{I}|^2R \tag{14-8}$$

其中，$|\mathbf{I}|^2=\mathbf{I}\times\mathbf{I}^*$。式（14-8）表明，纯电阻电路在任何时刻均吸收功率。

■ **情况 2** 当 $\theta_v-\theta_i=\pm90°$时，为纯电抗电路，且有：

$$P=\frac{1}{2}V_{\mathrm{m}}I_{\mathrm{m}}\cos90°=0 \tag{14-9}$$

表明纯电抗电路吸收的平均功率为零。总之，

电阻性负载（R）在任何时刻均吸收功率，而电抗负载（L 或 C）吸收的平均功率为零。

例 14-1 已知 $v(t)=120\cos(377t+45°)\,\mathrm{V}$，$i(t)=10\cos(377t-10°)\,\mathrm{A}$，试计算如图 14-2 所示无源线性网络所吸收的瞬时功率与平均功率。

解：瞬时功率为

$$p(t)=v(t)i(t)=1200\cos(377t+45°)\cos(377t-10°)$$

利用三角恒等式

$$\cos A\cos B=\frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]$$

可以得到

$$p=600[\cos(754t+35°)+\cos55°]$$

即

$$p(t) = 344.15 + 600\cos(754t + 35^\circ)\,(\mathrm{W})$$

平均功率为

$$P = \frac{1}{2}V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) = \frac{1}{2}120(10)\cos[45^\circ - (-10^\circ)]$$
$$= 600\cos 55^\circ = 344.15\,(\mathrm{W})$$

即上述 $p(t)$ 中的常数项。◀

练习 14-1　如果 $v(t) = 80\cos(10t + 20^\circ)$ V，$i(t) = 15\sin(10t + 60^\circ)$ A，试计算如图 14-2所示无源线性网络所吸收的瞬时功率与平均功率。

答案：$385.67 + 600\cos(20t - 10^\circ)$ W；385.67W

例 14-2　当阻抗 $\mathbf{Z} = 30 - \mathrm{j}70\Omega$ 两端的电压 $\mathbf{V} = 120\angle 0^\circ$ V 时，试计算该负载阻抗吸收的平均功率。

解：流过该阻抗的电流为

$$\mathbf{I} = \mathbf{V}/\mathbf{Z} = \frac{120\angle 0^\circ}{30 - \mathrm{j}70} = \frac{120\angle 0^\circ}{76.16\angle -66.8^\circ} = 1.576\angle 66.8^\circ\,(\mathrm{A})$$

平均功率为

$$P = \frac{1}{2}V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) = \frac{1}{2} \times 120 \times 1.576\cos(0^\circ - 66.8^\circ) = 37.25\,(\mathrm{W})$$ ◀

练习 14-2　如果流过阻抗 $\mathbf{Z} = 20\angle 22^\circ\,\Omega$ 的电流为 $\mathbf{I} = 10\angle 30^\circ$ A，试求传递给该阻抗的平均功率。

答案：927.18W

例 14-3　对于如图 14-3 所示电路，试求电源提供的平均功率与电阻吸收的平均功率。

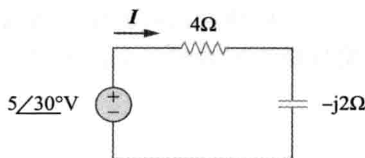


图 14-3　例 14-3 的电路原理图

解：电路中的电流 $\mathbf{I}$ 为

$$\mathbf{I} = \frac{5\angle 30^\circ}{4 - \mathrm{j}2} = \frac{5\angle 30^\circ}{4.472\angle -26.57^\circ} = 1.118\angle 56.57^\circ\,(\mathrm{A})$$

电压源提供的平均功率为

$$P = \frac{1}{2} \times 5 \times 1.118 \times \cos(30^\circ - 56.57^\circ) = 2.5\,(\mathrm{W})$$

流过电阻的电流为

$$\mathbf{I}_R = \mathbf{I} = 1.118\angle 56.57^\circ\,(\mathrm{A})$$

电阻两端的电压为

$$\mathbf{V}_R = 4\mathbf{I}_R = 4.471\angle 56.57^\circ\,(\mathrm{V})$$

则该电阻吸收的平均功率为：

$$P = \frac{1}{2} \times 4.472 \times 1.118 = 2.5\,(\mathrm{W})$$

由此可见，电阻吸收的平均功率与电源提供的平均功率相同，电容吸收的平均功率为零。◀

练习 14-3　在如图 14-4 所示电路中，试计算电阻与电感吸收的平均功率，并求电压源提供的平均功率。

答案：9.6W；0W，9.6W

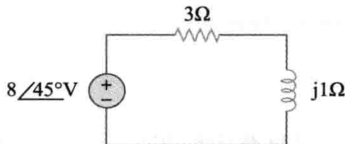


图 14-4　练习 14-3 的电路原理图

14.3　最大平均功率传输

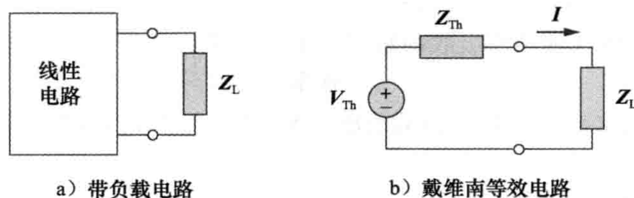
本书 8.7 节解决了电阻性供电网络为其负载 R_L 提供功率的最大功率传输问题。如果

用戴维南等效电路表示供电电路，则可以证明，当负载电阻等于戴维南电阻时，即 $R_L=R_{Th}$，传输给负载的功率最大。下面，将该结果扩展到交流电路。

考虑如图 14-5a 所示电路，图中交流电路用戴维南等效电路表示，且与负载 $\boldsymbol{Z}_L$ 相连接，如图 14-5b 所示。负载通常用阻抗表示，可以是电动机、天线、电视机等的模型。戴维南阻抗 $\boldsymbol{Z}_{Th}$ 与负载阻抗 $\boldsymbol{Z}_L$ 的直角坐标形式可表示为

$$\boldsymbol{Z}_{Th}=R_{Th}+\mathrm{j}X_{Th} \tag{14-10}$$

$$\boldsymbol{Z}_L=R_L+\mathrm{j}X_L \tag{14-11}$$



a）带负载电路　　b）戴维南等效电路

图 14-5 确定最大平均功率传输

流过负载的电流为

$$\boldsymbol{I}=\frac{\boldsymbol{V}_{Th}}{\boldsymbol{Z}_{Th}+\boldsymbol{Z}_L}=\frac{\boldsymbol{V}_{Th}}{(R_{Th}+\mathrm{j}X_{Th})+(R_L+\mathrm{j}X_L)} \tag{14-12}$$

由式（14-8）可知，传递给负载的平均功率为

$$P=\frac{1}{2}|\boldsymbol{I}|^2R=\frac{|\boldsymbol{V}_{Th}|^2R_L/2}{(R_{Th}+R_L)^2+(X_{Th}+X_L)^2} \tag{14-13}$$

我们的目标是调整负载参数 R_L 与 X_L，从而使得 P 最大。可以肯定的是，当电路总阻抗最小的时候，电路电流最大，为此可令，

$$X_L=-X_{Th} \tag{14-14}$$

和

$$R_L=\sqrt{R_{Th}^2+(X_{Th}+X_L)^2} \tag{14-15}$$

合并式（14-14）与式（14-15）得到如下结论：为实现最大平均功率传输，所选择的 $\boldsymbol{Z}_L$ 必须满足 $X_L=-X_{Th}$ 且 $R_L=R_{Th}$，即：

$$\boxed{\begin{array}{l}\boldsymbol{Z}_L=\boldsymbol{Z}_{Th}^*\\ \text{或}\\ R_L+\mathrm{j}X_L=R_{Th}-\mathrm{j}X_{Th}\end{array}} \tag{14-16}$$

因此[⊖]，

对于最大平均功率传输而言，负载阻抗 $\boldsymbol{Z}_L$ 必须等于戴维南阻抗 $\boldsymbol{Z}_{Th}$ 的共轭复数。

上述结果称为正弦稳态条件下的最大平均**功率传输定理**（maximum average power transfer theorem）。在式（14-13）中令 $R_L=R_{Th}$ 且 $X_L=-X_{Th}$，则得到最大平均功率为

$$\boxed{P_{max}=\frac{|\boldsymbol{V}_{Th}|^2}{8R_{Th}}} \tag{14-17}$$

在负载为纯实数（或电阻性）的情况下，在式（14-15）中，令 $X_L=0$，可以得到最大功率传输条件为

$$R_L=\sqrt{R_{Th}^2+X_{Th}^2}=|\boldsymbol{Z}_{Th}| \tag{14-18}$$

⊖ 注意：当 $\boldsymbol{Z}_L=\boldsymbol{Z}_{Th}^*$ 时，称负载与电源是匹配的。

上式表明，对于纯电阻负载而言，最大功率传输条件为：负载阻抗（即电阻）等于戴维南等效阻抗的模。

例 14-4 试确定使如图 14-6 所示电路中吸收的平均功率最大的负载阻抗 $\mathbf{Z}_L$，并计算相应的最大平均功率。

解：首先确定负载两端的戴维南等效电路。由图 14-7a 所示电路可以求出 $\mathbf{Z}_{Th}$：

$$\mathbf{Z}_{Th} = j5 + 4 \,/\!/\, (8 - j6) = j5 + \frac{4(8 - j6)}{4 + 8 - j6} = 2.933 + j4.4667(\Omega)$$

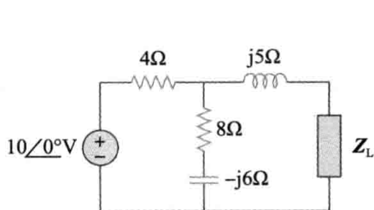


图 14-6　例 14-4 的电路原理图

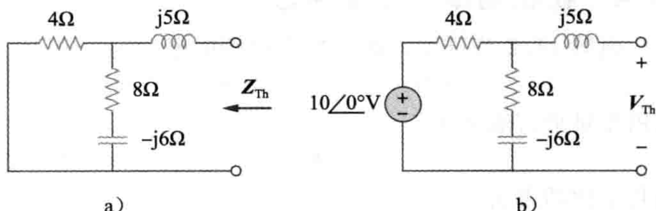


图 14-7　求解图 14-6 所示电路的戴维南等效电路

由图 14-7b 所示的电路可以求出 $\mathbf{V}_{Th}$，由分压原理，可得

$$\mathbf{V}_{Th} = \frac{8 - j6}{4 + 8 - j6} \times 10 = 7.454 \angle{-10.3^\circ}(\text{V})$$

当负载阻抗为 $\mathbf{Z}_L = \mathbf{Z}_{Th}^* = 2.933 - j4.4667\Omega$ 时，从电路中获得的平均功率最大。

根据式（14-17），最大平均功率则为

$$P_{max} = \frac{|\mathbf{V}_{Th}|^2}{8R_{Th}} = \frac{(7.454)^2}{8 \times 2.933} = 2.368(\text{W})$$ ◀

练习 14-4　对于图 14-8 所示电路，试计算吸收最大平均功率时的负载阻抗 $\mathbf{Z}_L$，并计算该最大平均功率。　**答案**：$(3.413 - j0.731)\Omega$；1.431W

例 14-5 在如图 14-9 所示电路中，试计算吸收最大平均功率时的 R_L 值，并计算该功率。

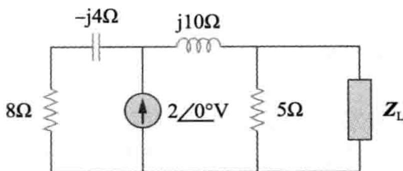


图 14-8　练习 14-4 的电路原理图

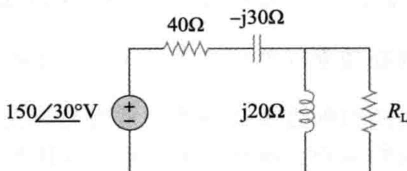


图 14-9　例 14-5 的电路原理图

解：首先求出 R_L 两端的戴维南等效电路：

$$\mathbf{Z}_{Th} = (40 - j30) \,/\!/\, j20 = \frac{j20(40 - j30)}{j20 + 40 - j30} = (9.412 + j22.35)(\Omega)$$

利用分压原理，可得

$$\mathbf{V}_{Th} = \frac{j20}{j20 + 40 - j30}(150 \angle{30^\circ}) = 72.76 \angle{134^\circ}(\text{V})$$

吸收最大平均功率的 R_L 值为

$$R_L = |\mathbf{Z}_{Th}| = \sqrt{9.412^2 + 22.35^2} = 24.25(\Omega)$$

流过该负载的电流为

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_{Th}}{\mathbf{Z}_{Th} + R_L} = \frac{72.76 \angle{134^\circ}}{33.66 + j22.35} = 1.801 \angle{100.2^\circ}(\text{A})$$

R_L 吸收的最大平均功率为

$$P_{\max} = \frac{1}{2}\mid \boldsymbol{I}\mid^2 R = \frac{1}{2}\times 1.801^2 \times 24.25 = 39.33(\mathrm{W})$$ ◀

练习 14-5 在如图 14-10 所示电路中，调节电阻 R_L 至能吸收最大平均功率，试计算 R_L 及其吸收的最大平均功率值。

答案： 29.98Ω；5.472W

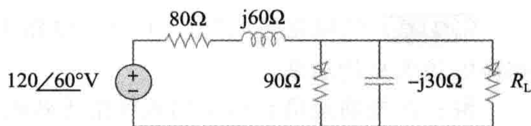


图 14-10 练习 14-5 的电路原理图

14.4 视在功率与功率因数

由第 14.2 节可知，如果电路终端的电压与电流为

$$v(t) = V_m\cos(\omega t + \theta_v) \quad 和 \quad i(t) = I_m\cos(\omega t + \theta_i) \tag{14-19}$$

或用相量形式表示为

$$\boldsymbol{V} = V_m \angle\theta_v \quad 和 \quad \boldsymbol{I} = I_m \angle\theta_i$$

则其平均功率为

$$P = \frac{1}{2}V_m I_m\cos(\theta_v - \theta_i) \tag{14-20}$$

电压的方均根值（V_{rms}）是时变电压的有效值，是产生相同功率的固定的等效直流值。电压或电流的有的值是峰值电压（V_m）或峰值电流（I_m）的 0.7 倍。式（14-20）中的平均功率可以用有效值的形式表示为

$$P = \frac{1}{2}V_m I_m\cos(\theta_v - \theta_i) = \frac{V_m}{\sqrt{2}}\frac{I_m}{\sqrt{2}}\cos(\theta_v - \theta_i) = V_{rms}I_{rms}\cos(\theta_v - \theta_i) \tag{14-21}$$

即，

$$P = S\cos(\theta_v - \theta_i) \tag{14-22}$$

其中，

$$\boxed{S = V_{rms}I_{rms}} \tag{14-23}$$

由式（14-22）可知，平均功率为两项的乘积，其中，乘积 $V_{rms}I_{rms}$ 称为**视在功率**（apparent power）S，因子 $\cos(\theta_v - \theta_i)$ 称为**功率因数**（power factor，pf）。

视在功率（单位为 V·A）是指电压与电流的有效值乘积。

之所以称为视在功率，是因为与直流电阻性电路相类似，从表面上看功率应该是电压与电流的乘积。视在功率的单位为伏安或 V·A，以区别于单位为瓦特的平均功率或有功功率。功率因数是无量纲的，由于它是平均功率与视在功率之比，即：

$$\boxed{pf = \frac{P}{S} = \cos(\theta_v - \theta_i)} \tag{14-24}$$

由于角度（$\theta_v - \theta_i$）的余弦值为功率因数，因此将该角度称为功率因数角（power factor angle）。如果 $\boldsymbol{V}$ 为负载两端的电压，$\boldsymbol{I}$ 为流过负载的电流，则功率因数角等于负载阻抗的辐角。显然这是由于

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{V}/\boldsymbol{I} = \frac{V_m \angle\theta_v}{I_m \angle\theta_i} = \frac{V_m}{I_m}\angle(\theta_v - \theta_i) \tag{14-25}$$

另外，由于

$$\boldsymbol{V}_{rms} = \boldsymbol{V}/\sqrt{2} = V_{rms}\angle\theta_v \tag{14-26a}$$

和

$$\boldsymbol{I}_{rms} = \boldsymbol{I}/\sqrt{2} = I_{rms}\angle\theta_i \tag{14-26b}$$

则阻抗为

$$\mathbf{Z} = \mathbf{V}/\mathbf{I} = \mathbf{V}_{\rm rms}/\mathbf{I}_{\rm rms} = \frac{V_{\rm rms}}{I_{\rm rms}} \angle(\theta_v - \theta_i) \tag{14-27}$$

功率因数是指电压与电流的相位角之差的余弦值，同时也是负载阻抗辐角的余弦值[⊖]。

由式（14-24）可知，功率因数可以看作是由视在功率得到有功功率或平均功率所必须相乘的一个因子，如表 14-2 所示，功率因数 pf 的值在 0 与 1 之间。对于纯电阻性负载而言，电压与电流是同相的，所以 $\theta_v - \theta_i = 0$ 且 $pf = 1$，也就是说，此时视在功率等于平均功率。对于纯电抗负载而言，$\theta_v - \theta_i = \pm 90°$ 且 $pf = 0$，此时平均功率为零。在这两种极端情况之间，pf 可以说是超前的（leading）或滞后的（lagging）。超前功率因数是指电流超前于电压，表示此时为容性负载；滞后功率因数是指电流滞后于电压，表示此时电路为感性负载。第 14.8.2 节还会看到，功率因数会影响用户支付给供电公司的电费。

表 14-2 功率因数表

功率角 $(\theta_v - \theta_i)$	功率因数 $[\cos(\theta_v - \theta_i)]$
+90°	0
+60°	0.5
+45°	0.7071
+30°	0.8660
0°	1.0
−30°	0.8660
−45°	0.07071
−60°	0.5
−90°	0

例 14-6 当激励电压为 $v(t) = 120\cos(100\pi t - 20°)$ V 时，流过某串接负载的电流为 $i(t) = 4\cos(100\pi t + 10°)$ A，试计算该负载的视在功率与功率因数，并确定构成该串接负载的元件值。

解：视在功率为

$$S = V_{\rm rms} I_{\rm rms} = \frac{120}{\sqrt{2}} \frac{4}{\sqrt{2}} = 240(\text{V} \cdot \text{A})$$

功率因数为

$$pf = \cos(\theta_v - \theta_i) = \cos(-20° - 10°) = 0.866$$

由于电流超前于电压，因此 pf 为超前的。功率因数 pf 还可以由负载阻抗得到：

$$\mathbf{Z} = \mathbf{V}/\mathbf{I} = \frac{120 \angle -20°}{4 \angle 10°} = 30 \angle -30° = (25.98 - \text{j}15)(\Omega)$$

$$pf = \cos(-30°) = 0.866 \quad (\text{超前})$$

负载阻抗 $\mathbf{Z}$ 可以看作一个 25.98Ω 的电阻与一个电容的串联，该电容的容抗为

$$X_C = 15 = \frac{1}{\omega C}$$

即

$$C = \frac{1}{15\omega} = \frac{1}{15 \times 100\pi} = 212.2(\mu\text{F})$$

◀

练习 14-6 当激励电压为 $v(t) = 150\cos(377t + 10°)$ V 时，试确定阻抗为 $\mathbf{Z} = (60 + \text{j}40)\Omega$ 的负载的视在功率与功率因数。

答案：0.832（滞后），156V·A

例 14-7 试确定如图 14-11 所示电路从电源端看进去的功率因数，并计算电源输出的平均功率。

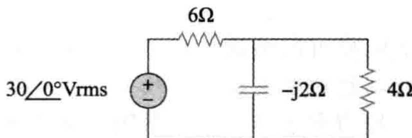


图 14-11 例 14-7 的电路原理图

解：电路的总阻抗为

⊖ 由式（14-24）可知，功率因数可以看作是负载消耗的有功功率（P）与负载的视在功率（S）之比。虽然 P 和 S 单位不一致，但它们同样都为功率，只是单位不同而已，因此它们的比值 P/S 是无量纲的。事实上，所有形式的功率的单位都是瓦特（W）。然而，在实际中一般它只作为有功功率的单位。

$$Z = 6 + 4 \mathbin{/\!/} (-\mathrm{j}2) = 6 + \frac{-\mathrm{j}2 \times 4}{4 - \mathrm{j}2} = 6.8 - \mathrm{j}1.6 = 7 \angle -13.24 (\Omega)$$

因此功率因数为

$$pf = \cos(-13.24°) = 0.9734 \quad （超前）$$

由于阻抗是容性的，所以功率因数超前。电流的有效值为

$$\boldsymbol{I}_{rms} = \boldsymbol{V}_{rms}/\boldsymbol{Z} = \frac{30 \angle 0°}{7 \angle -13.24°} = 4.294 \angle 13.24° (\mathrm{A})$$

电源提供的平均功率为

$$P = V_{rms} I_{rms} pf = 30 \times 4.294 \times 0.9734 = 125(\mathrm{W})$$

即

$$P = I_{rms}^2 R = (4.294)^2 \times 6.8 = 125(\mathrm{W})$$

其中，R 为阻抗 $\boldsymbol{Z}$ 的电阻部分。◀

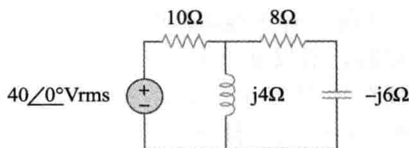


图 14-12　练习 14-7 的电路原理图

练习 14-7　试计算如图 14-12 所示电路从电源端看进去的功率因数，以及该电源提供的平均功率。

答案： 0.936（滞后）；118W

14.5　复功率

为了尽可能简单表示功率关系式，电力工程师付出了多年的努力，创造出**复功率**（complex power）的概念，它可用于表示并联负载的整体效果。由于复功率[⊖]包含了给定负载吸收功率的全部信息，所以复功率在功率分析中是一个非常重要的概念。

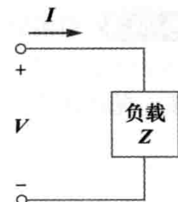


图 14-13　某负载的电压相量与电流相量

考虑如图 14-13 所示的交流负载。如果给定电压 $v(t)$ 与电流 $i(t)$ 的相量形式分别为 $\boldsymbol{V} = V_m \angle \theta_v$ 与 $\boldsymbol{I} = I_m \angle \theta_i$，假定采用无源符号规则（参见图 14-13），则该交流负载所吸收的复功率 S 为电压与电流共轭复数的乘积，即：

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\boldsymbol{V}\boldsymbol{I}^* \tag{14-28}$$

利用有效值表示为

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{V}_{rms}\boldsymbol{I}_{rms}^* \tag{14-29}$$

其中，

$$\boldsymbol{V}_{rms} = \boldsymbol{V}/\sqrt{2} = V_{rms} \angle \theta_v \tag{14-30}$$

且

$$\boldsymbol{I}_{rms} = \boldsymbol{I}/\sqrt{2} = I_{rms} \angle \theta_i \tag{14-31}$$

因此，式（14-29）可以写为[⊜]：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S} &= V_{rms} I_{rms} \angle (\theta_v - \theta_i) \\ &= V_{rms} I_{rms} \cos(\theta_v - \theta_i) + \mathrm{j} V_{rms} I_{rms} \sin(\theta_v - \theta_i) \end{aligned} \tag{14-32}$$

上式同样可以由式（14-6）得到。由式（14-32）可以看出，复功率的模值即为视在功率，因此，复功率的单位为伏安（V·A），并且，复功率的辐角就是功率因数角。

复功率还可以用负载阻抗 $\boldsymbol{Z}$ 表示，由式（14-27）可知，负载阻抗 $\boldsymbol{Z}$ 可以表示为

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{V}/\boldsymbol{I} = \boldsymbol{V}_{rms}\boldsymbol{I}_{rms} = \frac{V_{rms}}{I_{rms}} \angle (\theta_v - \theta_i) \tag{14-33}$$

因此，$\boldsymbol{V}_{rms} = \boldsymbol{Z}\boldsymbol{I}_{rms}$，将此关系代入式（14-28）可得：

⊖ 复功率没有任何物理意义；它完全只是一个有助于理解功率分析的数学概念。

⊜ 在不至于混淆的情况下，电压或电流有效值的下标（rms）通常可以省略。

$$\boxed{\mathbf{S}=I_{\rm rms}^2\mathbf{Z}=\frac{V_{\rm rms}^2}{\mathbf{Z}^*}=\mathbf{V}_{\rm rms}\mathbf{I}_{\rm rms}^*} \tag{14-34}$$

又由于 $\mathbf{Z}=R+\mathrm{j}X$，则式（14-34）变为：

$$\mathbf{S}=I_{\rm rms}^2(R+\mathrm{j}X)=P+\mathrm{j}Q \tag{14-35}$$

其中，P 与 Q 分别为复功率的实部与虚部，即：

$$P=\mathrm{Re}(\mathbf{S})=I_{\rm rms}^2R \tag{14-36}$$

$$Q=\mathrm{Im}(\mathbf{S})=I_{\rm rms}^2X \tag{14-37}$$

其中，P 为平均功率或有功功率，其值取决于负载的电阻 R，而 Q 为无功功率（或正交功率），其值取决于负载的电抗 X。

比较式（14-32）与式（14-35）可得：

$$P=V_{\rm rms}I_{\rm rms}\cos(\theta_v-\theta_i),\quad Q=V_{\rm rms}I_{\rm rms}\sin(\theta_v-\theta_i) \tag{14-38}$$

无功功率 Q 的单位为乏（volt-ampere reactive，var），区别于有功功率的单位瓦特。有功功率 P 就是传递给负载的平均功率，是唯一有用的功率，也是负载实际消耗的功率。而无功功率则是在负载与电源之间来回转移，且在转换过程中没有能量损耗。它用来衡量负载的电抗成分的储能能力。应该注意到：

1）对于电阻性负载（$pf=1$），$Q=0$。

2）对于电容性负载（超前 pf），$Q<0$。

3）对于电感性负载（滞后 pf），$Q>0$。

因此

复功率（单位为 V·A）是电压相量有效值与电流相量有效值的共轭复数之乘积。作为一个复数，其实部为有功功率 P，虚部为无功功率 Q。

引入复功率后，就可以由电压相量与电流相量直接得到有功功率和无功功率：

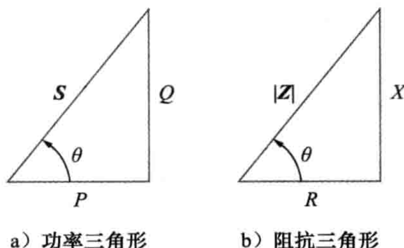
$$\boxed{\begin{aligned}
\text{复功率} &= \mathbf{S}=P+\mathrm{j}Q=\frac{1}{2}\mathbf{V}\mathbf{I}^*=V_{\rm rms}I_{\rm rms}\underline{/(\theta_v-\theta_i)}\\
\text{视在功率} &= S=|\mathbf{S}|=V_{\rm rms}I_{\rm rms}=\sqrt{P^2+Q^2}\\
\text{有功功率} &= P=\mathrm{Re}(\mathbf{S})=S\cos(\theta_v-\theta_i)\\
\text{无功功率} &= Q=\mathrm{Im}(\mathbf{S})=S\sin(\theta_v-\theta_i)\\
\text{功率因子} &= \frac{P}{S}=\cos(\theta_v-\theta_i)
\end{aligned}} \tag{14-39}$$

因此，上式表明复功率是如何包含了给定负载的所有与功率有关的信息[⊖]。

习惯上经常利用三角形表示 S、P、Q 三者之间的关系，称为功率三角形（power triangle），如图 14-14a 所示，它与图 14-14b 所示的表示 $\mathbf{Z}$、R、X 三者之间关系的阻抗三角形类似。功率三角形包含四项（视在功率/复数功率、有功功率、无功功率与功率因数角）。给定其中两项，由功率三角形可以很方便地得到另外两项。如图 14-15 所示，当 $\mathbf{S}$ 位于第一象限时，则为感性负载和滞后的功率因数 pf；当 $\mathbf{S}$ 位于第四象限时，则为容性负载和超前的功率因数 pf。显然，复功率 $\mathbf{S}$ 也可能位于第二象限或第三象限，这就要求负载阻抗具有负电阻，这种情况在有源电路中是可能的。（有源电路是指包含有源元

⊖ 复功率 $\mathbf{S}$ 包含负载所有的功率信息。$\mathbf{S}$ 的实部为有功功率 P，虚部为无功功率 Q，$\mathbf{S}$ 的模值为视在功率 S，$\mathbf{S}$ 的辐角的余弦为功率因数 pf。

件的电路，例如晶体管和运算放大器。）



a）功率三角形　b）阻抗三角形

图 14-14

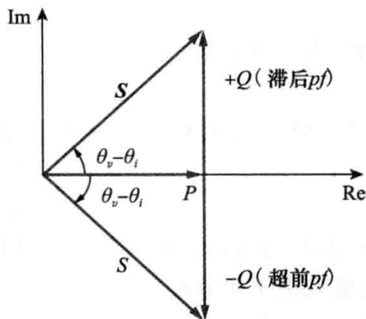


图 14-15 功率三角形

例 14-8 某负载两端的电压为 $v(t)=60\cos(\omega t-10°)$V，而沿电压下降方向流过该负载的电流为 $i(t)=1.5\cos(\omega t+50°)$A。试计算：(a) 复功率与视在功率，(b) 有功功率与无功功率，(c) 功率因数与负载阻抗。

解：(a) 电压相量与电流相量的有效值为

$$\mathbf{V}_{\rm rms}=\frac{60}{\sqrt{2}}\angle -10° \quad \mathbf{I}_{\rm rms}=\frac{1.5}{\sqrt{2}}\angle +50°(\mathrm{A})$$

则复功率为

$$\mathbf{S}=\mathbf{V}_{\rm rms}\mathbf{I}_{\rm rms}^{*}=\left(\frac{60}{\sqrt{2}}\angle -10°\right)\left(\frac{1.5}{\sqrt{2}}\angle -50°\right)=45\angle -60°(\mathrm{V\cdot A})$$

视在功率为

$$S=|\mathbf{S}|=45(\mathrm{V\cdot A})$$

(b) 将复功率表示为直角坐标形式，得到

$$\mathbf{S}=45\angle -60°=45[\cos(-60°)+\mathrm{j}\sin(-60°)]=22.5-\mathrm{j}38.97$$

由于 $\mathbf{S}=P+\mathrm{j}Q$，因此有功功率为

$$P=22.5(\mathrm{W})$$

而无功功率为

$$Q=-38.97(\mathrm{var})$$

(c) 功率因数为

$$pf=\cos(-60°)=0.5(超前)$$

由于无功功率是负的，因此表明 pf 是超前的。负载阻抗则为

$$\mathbf{Z}=\mathbf{V}/\mathbf{I}=\frac{60\angle -10°}{1.5\angle +50°}=40\angle -60°(\Omega)$$

可知这是一个容性阻抗。◀

练习 14-8 给定负载的 $\mathbf{V}_{\rm rms}=110\angle 85°$ V，$\mathbf{I}_{\rm rms}=0.4\angle 15°$ A，试计算：(a) 复功率与视在功率，(b) 有功功率与无功功率，(c) 功率因数与负载阻抗。

答案：(a) $44\angle 70°$ V·A，44V·A；(b) 15.05W，41.35var；(c) 0.342（滞后），94.06+j258.4Ω

例 14-9 某负载 $\mathbf{Z}$ 从有效值为 120V 的正弦电源中获得了 12kV·A 的功率，其功率因数为 0.856（滞后），试计算：(a) 传递给该负载的平均功率与无功功率，(b) 峰值电流，(c) 负载阻抗。

解：(a) 已知功率因数 $pf=\cos\theta=0.856$，于是功率因数角为

$$\theta=\arccos 0.856=31.13^\circ$$

如果视在功率为 $S=12000\text{V}\cdot\text{A}$，则平均功率或有功功率为

$$P=S\cos\theta=12000\times 0.856=10.272(\text{kW})$$

而无功功率为

$$Q=S\sin\theta=12000\times 0.517=6.204(\text{kV}\cdot\text{A})$$

(b) 由于 pf 是滞后的，因此复功率为

$$\mathbf{S}=P+\text{j}Q=10.272+\text{j}6.204(\text{kV}\cdot\text{A})$$

由 $\mathbf{S}=\mathbf{V}_{\text{rms}}\mathbf{I}_{\text{rms}}^*$ 可得

$$\mathbf{I}_{\text{rms}}^*=\mathbf{S}/\mathbf{V}_{\text{rms}}=\frac{10272+\text{j}6204}{120\angle 0^\circ}=85.6+\text{j}51.7=100\angle 31.13^\circ(\text{A})$$

因此 $\mathbf{I}_{\text{rms}}=100\angle -31.13^\circ$，其峰值电流为

$$I_{\text{p}}=I_{\text{m}}=\sqrt{2}I=\sqrt{2}(100)=141.4(\text{A})$$

(c) 负载阻抗为

$$\mathbf{Z}=\mathbf{V}_{\text{rms}}/\mathbf{I}_{\text{rms}}=\frac{120\angle 0^\circ}{100\angle -31.13^\circ}=1.2\angle 31.13^\circ(\Omega)$$

可知此阻抗为感性阻抗。 ◀

练习 14-9　某正弦电源给负载 $\mathbf{Z}=250\angle -75^\circ\ \Omega$ 提供的 10kV · A 的功率，试确定：(a) 功率因数，(b) 传递给该负载的视在功率，(c) 峰值电压。

答案：(a) 0.2588（超前）；(b) 10.353kV · A；(c) 2.275kV

†14.6　交流功率守恒

功率守恒原理不仅适用于直流电路（参见 1.7 节）[⊖]，同样适用于交流电路。无论负载是串联还是并联（或是混联）连接的，电源提供的总功率就等于传递给负载的总功率。因此，一般而言，如果电源连接 N 个负载，则有：

$$\mathbf{S}=\mathbf{S}_1+\mathbf{S}_2+\mathbf{S}_3+\cdots+\mathbf{S}_N \tag{14-40}$$

（值得注意的是，负载可以采用任意的连接方式。）式（14-40）表明网络中总的复功率等于各元件复功率之和（该关系对于有功功率与无功功率也是成立的，但是对视在功率不成立）。此即交流功率守恒原理：

由上述分析可知，网络中电源提供的有功（无功）功率等于流入到网络其他元件中的有功（无功）功率。

电源的复功率、有功功率、无功功率分别等于各个负载上的复功率、有功功率、无功功率之和。

例 14-10　图 14-16 所示为一个电压源通过传输线给一个负载供电，传输线的阻抗可以表示为一个 (4+j2) Ω 的阻抗和一条返回路径，试计算：(a) 电源吸收的有功功率与无功功率，(b) 传输线吸收的有功功率与无功功率，(c) 负载吸收的有功功率与无功功率。

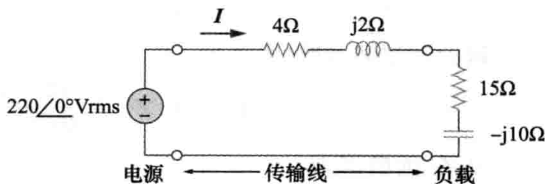


图 14-16　例 14-10 的电路原理图

⊖ 实际上已经从例 14-3 中看到，交流电路的平均功率是守恒的。

解：总阻抗为

$$\mathbf{Z}=(4+\mathrm{j}2)+(15-\mathrm{j}10)=19-\mathrm{j}8=20.62\angle{-22.83^\circ}(\Omega)$$

流过电路的电流为

$$\mathbf{I}=\mathbf{V}_s/\mathbf{Z}=\frac{220\angle{0^\circ}}{20.62\angle{-22.83^\circ}}=10.67\angle{22.83^\circ}(\mathrm{A\ rms})$$

(a) 对于电源而言，复功率为

$$\mathbf{S}_s=\mathbf{V}_s\mathbf{I}^*=(220\angle{0^\circ})(10.67\angle{-22.83^\circ})=2347.4\angle{-22.83^\circ}=(2163.5-\mathrm{j}910.8)(\mathrm{V\cdot A})$$

由此可知，电源吸收的有功功率为2163.5W，无功功率为910.8var（超前）

(b) 对于传输线而言，电压为

$$\mathbf{V}_{\text{line}}=(4+\mathrm{j}2)\mathbf{I}=(4.472\angle{26.57^\circ})(10.67\angle{22.83^\circ})=47.72\angle{49.4^\circ}(\mathrm{V\ rms})$$

传输线吸收的复功率为

$$\mathbf{S}_{\text{line}}=\mathbf{V}_{\text{line}}\mathbf{I}^*=(47.72\angle{49.4^\circ})(10.67\angle{-22.83^\circ})=509.2\angle{26.57^\circ}=455.4+\mathrm{j}227.76(\mathrm{V\cdot A})$$

即

$$\mathbf{S}_{\text{line}}=|\mathbf{I}|^2\mathbf{Z}_{\text{line}}=(10.67)^2(4+\mathrm{j}2)=455.4+\mathrm{j}227.7(\mathrm{V\cdot A})$$

由此可知，传输线吸收的有功功率为455.4W，无功功率为227.76var（滞后）

(c) 对于负载而言，电压为

$$\mathbf{V}_L=(15-\mathrm{j}10)\mathbf{I}=(18.03\angle{-33.7^\circ})(10.67\angle{22.83^\circ})=192.38\angle{-10.87^\circ}(\mathrm{V\ rms})$$

负载吸收的复功率为

$$\mathbf{S}_L=\mathbf{V}_L\mathbf{I}^*=(192.38\angle{-10.87^\circ})(10.67\angle{-22.83^\circ})=2053\angle{-33.7^\circ}=(1708-\mathrm{j}1139)(\mathrm{V\cdot A})$$

同样地，负载吸收的有功功率为1708W，无功功率为1139var（超前）。可以看出，$\mathbf{S}_S=\mathbf{S}_{\text{line}}+\mathbf{S}_L$，同期望中的一样。以上皆是利用电压与电流的有效值进行计算的。◀

练习 14-10 在如图14-17所示电路中，60Ω电阻器吸收的平均功率为240W，试计算$\mathbf{V}$与电路中各支路的复功率，该电路总的复功率为多少？

答案：$240.67\angle{21.45^\circ}$ V (rms)；20Ω电阻器：656V·A；(30－j10) Ω阻抗：(480－j160) V·A；(60＋j20) Ω阻抗：(240＋j80)(V·A)；总的复功率：(1376－j80)(V·A)

例 14-11 在如图14-18所示电路中，$\mathbf{Z}_1=60\angle{-30^\circ}\ \Omega$，$\mathbf{Z}_2=40\angle{45^\circ}\ \Omega$，试计算总的(a) 视在功率，(b) 有功功率，(c) 无功功率和 (d) pf。

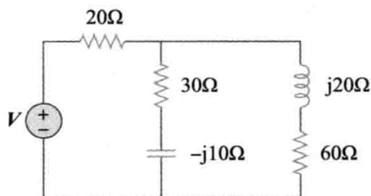


图 14-17 练习14-10的电路原理图

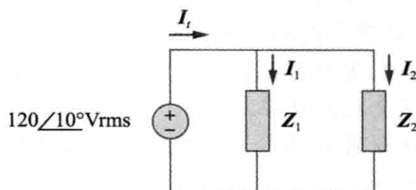


图 14-18 例14-11的电路原理图

解：流过$\mathbf{Z}_1$的电流为

$$\mathbf{I}_1=\mathbf{V}/\mathbf{Z}_1=\frac{120\angle{10^\circ}}{60\angle{-30^\circ}}=2\angle{40^\circ}(\mathrm{A\ rms})$$

而流过$\mathbf{Z}_2$的电流为

$$\mathbf{I}_2=\mathbf{V}/\mathbf{Z}_2=\frac{120\angle{10^\circ}}{40\angle{45^\circ}}=3\angle{-35^\circ}(\mathrm{A\ rms})$$

阻抗吸收的复功率分别为

$$\mathbf{S}_1=\frac{V_{\text{rms}}^2}{\mathbf{Z}_1^*}=\frac{120^2}{60\angle{30^\circ}}=240\angle{-30^\circ}=(207.85-\mathrm{j}120)(\mathrm{V\cdot A})$$

$$S_2 = \frac{V_{rms}^2}{Z_2^*} = \frac{120^2}{40\ \underline{/-45^\circ}} = 360\ \underline{/45^\circ} = (254.6 - j254.6)(\text{V}\cdot\text{A})$$

总的复功率为

$$S_t = S_1 = S_2 = 462.45 + j134.6(\text{V}\cdot\text{A})$$

(a) 总的视在功率为

$$|S_t| = \sqrt{462.45^2 + 134.6^2} = 481.64(\text{V}\cdot\text{A})$$

(b) 总的有功功率为

$$P_t = \text{Re}(S_t) = 462.45\text{W} \text{ 或 } P_t = P_1 + P_2$$

(c) 总的无功功率为

$$Q_t = \text{Im}(S_t) = 134.6\text{var} \text{ 或 } Q_t = Q_1 + Q_2$$

(d) $pf = P_t/|S_t| = 462.45/481.64 = 0.96$（滞后）

可以通过求解电源提供的复功率 S_s 检验上述结果的正确性

$$I_t = I_1 + I_2 = (1.532 + j1.286) + (2.457 - j1.721)$$
$$= 4 - j0.435 = 4.024\ \underline{/-6.21^\circ}(\text{A})\ \text{rms}$$
$$S_s = VI_t^* = (120\ \underline{/10^\circ})(4.024\ \underline{/6.21^\circ}) = 482.88\ \underline{/16.21^\circ} = (463 + j135)(\text{V}\cdot\text{A})$$

与上述的结果相一致。◀

练习 14-11 两个相互并联负载分别为 2kW，$pf = 0.75$（超前）和 4kW，$pf = 0.95$（滞后）。试计算这两个负载并联组合的 pf，并计算电源提供的复功率。

答案： 0.9972（超前），$(6 - j0.4495)$kV・A

14.7 功率因数校正

大多数家电负载（如洗衣机、空调、电冰箱等）以及工业负载（如感应电动机）通常呈现感性负载特性，因此工作时的功率因数是滞后的。虽然负载的感性性质不能改变，但是可以提高其功率因数。

不改变原始负载的有功功率而提高功率因数的过程称为功率因数校正（power factor correctoin）[㊀]。

由于大多数负载是感性的[㊁]，如图 14-19a 所示，所以通过安装与负载并联的补偿电容来提高或校正负载的功率因数，如图 14-19b 所示。增加电容器后的效果既可以用功率三角形予以说明，也可以用相关电流的相量图予以说明。图 14-20 给出了用于说明并联电容器作用的电流相量图，图中假定图 14-19a 所示电路的功率因数为 $\cos\theta_1$，而图 14-19b 所示电路的功率因数为 $\cos\theta_2$。显然，由图 14-20 可知，并联电容器后，供电电压与电流之间的相位角从 θ_1 减小到 θ_2，从而提高了功率因数。

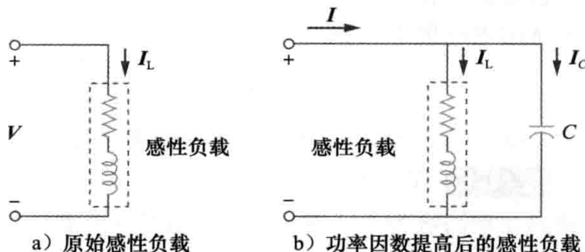


图 14-19 功率因数校正

同时，由图 14-20 所示的矢量幅度可知，在相同供电电压下，图 14-19a 所示电路获得的电流 I_L 要比图 14-19b 所示电路获得的电流 I 大。电流越大，损耗的功率就越大（因为

㊀ 换言之，功率因素校正可以看作增加与负载并联的电抗性元件（通常为电容器），从而使得功率因数接近 1。

㊁ 提示：感性负载可以用电感器和电阻器的串联组合来建模。

$P=I_L^2R$，呈平方关系)，所以供电公司收取用户的电费也就越多。因此，努力减小电流或提高功率因数使其尽可能接近于单位 1，对于供电公司和用户双方都是有利的。选取适当大小的电容器，就可以使电压与电流完全同相，从而使功率因数达到 1。

也可以从另一个角度来研究功率因数校正问题。考虑如图 14-21 所示的功率三角形，如果原始电感性负载的视在功率为 S_1，则有：

$$P = S_1\cos\theta_1, \quad Q_1 = S_1\sin\theta_1 \tag{14-41}$$

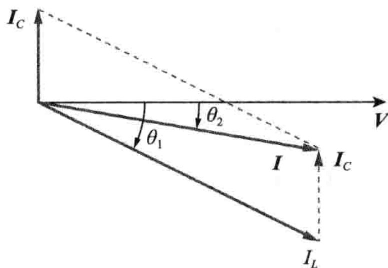


图 14-20 显示与感性负载并联的电容器作用的相量图

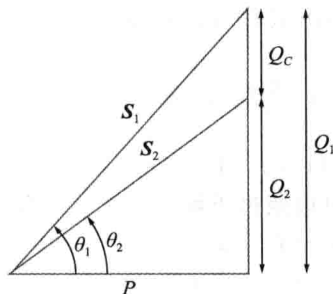


图 14-21 说明功率因数校正的功率三角形

如果期望将功率因数从 $\cos\theta_1$ 提高到 $\cos\theta_2$，而不改变有功功率，即 $P=S_2\cos\theta_2$，则新的无功功率为

$$Q_2 = P\tan\theta_2 \tag{14-42}$$

无功功率的降低是由并联电容引起的，也就是说，

$$Q_C = Q_1 - Q_2 = P(\tan\theta_1 - \tan\theta_2) \tag{14-43}$$

但由式 (14-34) 可知：$Q_C=V_{\text{rms}}{}^2/X_c=\omega CV_{\text{rms}}^2$，因此，所需并联的电容的容值 C 可由下式确定：

$$\boxed{C = \frac{Q_C}{\omega V_{\text{rms}}^2} = \frac{P(\tan\theta_1 - \tan\theta_2)}{\omega V_{\text{rms}}^2}} \tag{14-44}$$

值得注意的是，负载消耗的有功功率不会受到功率因数校正的影响。

虽然实际中多数情况是感性负载，但也有可能出现容性负载，即负载工作时的功率因数是超前的。在这种情况下，负载两端应该连接一个电感以实现功率因数校正，所需的分流电感的电感值 L 可按下式计算：

$$Q_L = \frac{V_{\text{rms}}^2}{X_L} = \frac{V_{\text{rms}}^2}{\omega L} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{V_{\text{rms}}^2}{\omega Q_L} \tag{14-45}$$

其中，$Q_L=Q_1-Q_2$，为新、旧无功功率之差。

例 14-12 某负载与 120V (rms)，60Hz 电力线相连接，该负载吸收功率为 4kW，且负载的功率因数为 0.8 滞后。试计算将 pf 提高到 0.95 所需并联的电容量。

解：如果 $pf=0.8$，则有：

$$\cos\theta_1 = 0.8 \quad \Rightarrow \quad \theta_1 = 36.87^\circ$$

其中 θ_1 为电压与电流之间的相位差。由已知的有功功率与 pf 可以得到视在功率为

$$S_1 = \frac{P}{\cos\theta_1} = \frac{4000}{0.8} = 5000(\text{V}\cdot\text{A})$$

则无功功率为

$$Q_1 = S_1\sin\theta_1 = 5000\ \sin 36.87 = 3000(\text{var})$$

当 pf 提高到 0.95 时：

$$\cos\theta_2 = 0.95 \quad \Rightarrow \quad \theta_2 = 18.19^\circ$$

由于电容吸收的平均功率为 0，因此有功功率 P 并未发生改变，但是视在功率发生了变化，其新值为

$$S_2 = \frac{P}{\cos\theta_2} = \frac{4000}{0.95} = 4210.5(\text{V}\cdot\text{A})$$

则新的无功功率为

$$Q_2 = S_2\sin\theta_2 = 1314.4(\text{var})$$

新、旧无功功率之差是由于负载上并联了电容而引起的，因此由电容产生的无功功率为

$$Q_C = Q_1 - Q_2 = 3000 - 1314.4 = 1685.6(\text{var})$$

且

$$C = \frac{Q_C}{\omega V_{\text{rms}}^2} = \frac{1685.6}{2\pi\times 60\times 120^2} = 310.5(\mu\text{F})$$ ◀

练习 14-12 某负载功率因数 pf 为 0.85 滞后时，其功率为 140kvar，试计算将该负载的 pf 从 0.85（滞后）提高到 1 所需并联的电容值，假定利用 110V（rms），60Hz 电力线给负载供电。 **答案：** 30.69mF

†14.8 应用

本节讨论三个重要的应用领域，即如何测量功率，供电公司如何确定用户的电费以及 CPU 的功率。

14.8.1 功率测量

负载吸收的平均功率可以利用被称作为**瓦特表**[㊀]（wattmeter）的仪器来测量。

瓦特表是测量平均功率的仪器。

如图 14-22 所示的瓦特表结构示意图，瓦特表本质上是由两个线圈构成的[㊁]，电流线圈与电压线圈。阻抗值极低（理想情况下为零）的电流线圈与负载相串联，并对负载电流产生响应，如图 14-23 所示；阻抗值极高（理想情况下为无穷大）的电压线圈与负载相并联，并对负载电压产生响应，如图 14-23 所示。电流线圈因其低阻抗在电路中相当于短路，而电压线圈因其高阻抗，在电路中相当于开路。因此理想情况下，瓦特表的接入并不会对电路产生干扰，也不会影响功率测量的结果。

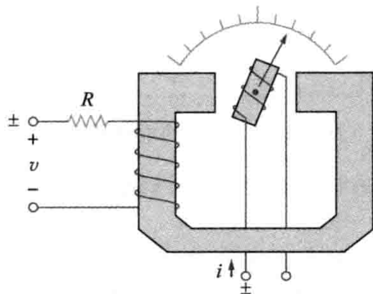


图 14-22 瓦特表

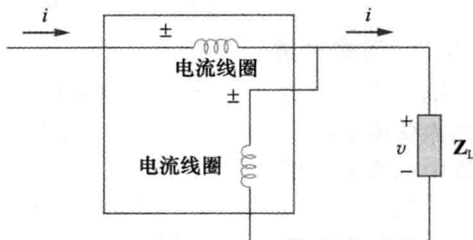


图 14-23 与负载相连接的瓦特表

当两个线圈通以电流后，瓦特表动力系统的机械惯量产生一个与乘积 $v(t)i(t)$ 的均值

㊀ 无功功率可以利用无功功率表（varmeter）来测量，无功功率表与负载的连接方式和瓦特表与负载的连接方式相同。

㊁ 有些瓦特表没有线圈；这里仅考虑电磁式瓦特表。

成比例的偏转角。如果负载的电压与电流分别为 $v(t)=V_m\cos(\omega t+\theta_v)$ 和 $i(t)=I_m\cos(\omega t+\theta_i)$，则它们相应的方均根相量为

$$\mathbf{V}_{rms}=\frac{V_m}{\sqrt{2}}\angle\theta_v\quad,\quad \mathbf{I}_{rms}=\frac{I_m}{\sqrt{2}}\angle\theta_i \tag{14-46}$$

则瓦特表测得的平均功率为

$$P=|\mathbf{V}_{rms}||\mathbf{I}_{rms}|\cos(\theta_v-\theta_I)=\frac{1}{2}V_mI_m\cos(\theta_v-\theta_I) \tag{14-47}$$

如图 14-22 所示，瓦特表的每个线圈有两个端子，其中一个端子标有±号。为了保证偏转角正向增大，电流线圈的±端子应朝向电源，同时电压线圈的±端子应与电流线圈另一端连接到同一根线上，如图 14-23 所示。如果两个线圈都反接，则偏转角仍然会正向增大。然而，如果仅其中一个反接，而另一个不反接，则偏转角就会反向减小，瓦特表也就没有读数了。

例 14-13 试计算如图 14-24 所示电路中瓦特表的读数。

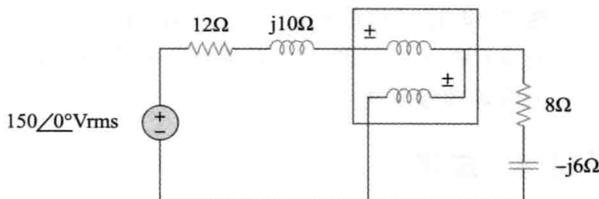


图 14-24 例 14-13 的电路原理图[⊖]

解：在图 14-24 所示电路中，由于电流线圈与（8－j6）Ω 负载阻抗相串联，而电压线圈与该负载阻抗相并联，所以瓦特表的读数为（8－j6）Ω 阻抗所吸收的平均功率。计算流过该电路的电流为：

$$\mathbf{I}_{rms}=\frac{150\angle 0°}{(12+j10)+(8-j6)}=\frac{150}{20+j4}(\mathrm{A})$$

（8－j6）Ω 阻抗两端的电压为：

$$\mathbf{V}_{rms}=\mathbf{I}_{rms}(8-j6)=\frac{150(8-j6)}{20+j4}(\mathrm{V})$$

因此，复功率为：

$$\mathbf{S}=\mathbf{V}_{rms}\mathbf{I}^*_{rms}=\frac{150(8-j6)}{20+j4}\cdot\frac{150}{20-j4}=\frac{150^2(8-j6)}{20^2+4^2}=(423.7-j324.5)(\mathrm{V}\cdot\mathrm{A})$$

所以瓦特表读数为：

$$P=\mathrm{Re}(\mathbf{S})=423.7\mathrm{W}$$ ◀

练习 14-13 对于如图 14-25 所示电路，试计算瓦特表的读数。

答案：1437.3W

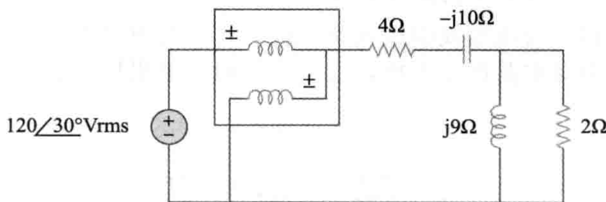


图 14-25 练习 14-13 的电路原理图

14.8.2 电费计算

第 1.7 节讨论了计算用户电费的一种简化模型，但在当时的计算中并未涉及功率因数的概念，下面将讨论功率因数在电费计算中的重要作用。

正如第 14.7 节所述，功率因数低的负载所需的电流大，因此费用高昂。理想情况应该是从供电系统获得的电流最小，从而使得 $S=P$，$Q=0$ 且 $pf=1$。负载的无功功率 Q 不等于零意味着能量要在负载与电源之间来回交换，因而造成额外的功率损耗。鉴于此，供电公司通常鼓励其商业和工业用户工作在负载的功率因数尽可能接近于 1 的状态，并处罚不提高负载功率因数的用户。

供电公司通常将其用户分为如下几类：居民用户（本地用户）、商业用户以及工业用户，或者分为大、中、小型耗电用户。各类用户均设定不同的收费标准。用户的用电量的

计量单位为千瓦时（kW·h），是通过安装在用户室内的千瓦时表（参见本书第 3 章 3.8 节图 3-15）来测量的。

虽然各供电公司采用不同计费标准，但其收费价格表上一般都分为两个部分。第一部分是固定的，对应于满足工业用户负载需求所必需的发电、输电和配电的费用，这部分费用通常用峰值需求的每 kW 价格来计算。或者考虑到用户的功率因数（pf），用峰值需求的 kV·A 来计费。当用户功率因数低于某个规定值，例如 0.85 或 0.9 时，就会向用户收取一定的 pf 罚金，例如当 pf 每下降 0.01，就要收取其峰值需求量 kW 或 kV·A 一定百分比的费用作为罚金。另一方面，当用户的功率因数高于某个规定值时，每提高 0.01 就会给予用户一定的奖励。收费价格表上的第二部分正比于用电量，单位是 kW·h，这部分费用可以分级收取（例如，第一个 100kW·h 为 16 美分每千瓦时，下一个 200kW·h 为 10 美分每千瓦时等）。因此，用户的电费账单可以用如下公式计算：

$$\text{总电费} = \text{固定费用} + \text{消耗电能的费用} \tag{14-48}$$

例 14-14 某制造工厂一个月消耗的电能为 200MW·h，如果其峰值需求量为 1600kW，按如下两部分计费标准计算该用户电费。

需求量收费：\$5.00 每月每千瓦

用电收费：第一个 50000kW·h 为 8 美分每千瓦时，其余用电量为 5 美分每千瓦时

解： 需求量决定的固定收费为

$$\$5.00 \times 1600 = \$8000 \tag{14-14-1}$$

第一个 50000kW·h 的用电费用是：

$$\$0.08 \times 50000 = \$4000 \tag{14-14-2}$$

其余用电量为 200000－50000＝150000kW·h，相应的电费为

$$\$0.05 \times 150000 = \$7500 \tag{14-14-3}$$

将式（14-14-1）、式（14-14-2）和式（14-14-3）相加，得到该月的总费用账单：

$$\$8000 + \$4000 + \$7500 = \$19500$$

这样看起来电费太高了，但这部分费用通常仅占该工厂产品生产的总成本或成品销售额的很小一部分。◀

练习 14-14 某造纸厂一个月的电表读数为：

峰值需求量：32000kW

电能消耗：500MW·h

试利用例题 14-14 给出的两部分计费标准，计算该造纸厂当月的电费。

答案： 186500 美元

例 14-15 某 300kW 负载在 13kV（有效值）供电电压下，一个月里以功率因数 0.8 工作了 520h。试按如下简单计费方式计算的每月平均用电支出：

电量收费：6 美分每千瓦时

功率因数罚金：较 0.85 每降低 0.01 要增收电量收费的 0.1%

功率因数奖励：较 0.85 每高于 0.01 要奖励电量收费的 0.1%

解： 所消耗的电能为

$$W = 300 \times 520 = 156000(\mathrm{kW \cdot h})$$

负载工作时的功率因数 $pf=80\%=0.8$，较预定值 0.85 低 5×0.01。由于 pf 每降低 0.01 要加收 0.1%的电量收费，所以功率因数罚金为 0.5%，转换为相应的电量为

$$\Delta W = 156000 \times \frac{5 \times 0.1}{100} = 780(\mathrm{kW \cdot h})$$

因此，总的收费电能为

$$W_t = W + \Delta W = 156000 + 780 = 156780(\mathrm{kW \cdot h})$$

每月应收取的电费为：

$$电费 = 6 美分 \times W_t = \$0.06 \times 156780 = \$9406.80$$ ◀

练习 14-15 某 800kW 的感应电炉以 0.88 功率因数每天工作 20 小时，一个月工作 26 天，试按照例 14-15 中的计费方式确定每月的电费。 **答案：** 24885.12 美元

14.8.3 CPU 的耗能

计算机的中央处理器（CPU）消耗部分电能，这部分电能既包括 CPU 中的开关电路（例如晶体管）所消耗电能，也包含由于电子电路的电阻，而以热量形式被消耗的电能。低功耗 CPU（例如移动电话中的中央处理器）消耗电能很少，而对于复杂性高，处理速度快的常用微型计算机，其中央处理器消耗更多的电能。而早期电子管制造的 CPU 耗电量是以千瓦级来计算的。

14.9 本章小结

1）元件吸收的瞬时功率等于该元件两端的电压与流过该元件的电流的乘积，即：

$$p = vi$$

2）平均功率或有功功率 P（单位为瓦特）等于瞬时功率 $p(t)$ 的平均值。如果 $v(t) = V_m\cos(\omega t + \theta_v)$，$i(t) = I_m\cos(\omega t + \theta_i)$，则 $V_{rms} = V_m/\sqrt{2}$，$I_{rms} = I_m/\sqrt{2}$，且：

$$P = \frac{1}{2}V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i)$$

3）电感与电容不吸收平均功率，电阻吸收的平均功率为

$$\frac{1}{2}I_m^2 R = I_{rms}^2 R$$

4）当负载阻抗等于从负载两端看进去的戴维南等效阻抗的共轭复数时，即 $\mathbf{Z}_L = \mathbf{Z}_{Th}^*$，传递给负载的平均功率最大。

5）功率因数等于电压与电流相位差的余弦值：$pf = \cos(\theta_v - \theta_i)$。功率因数也等于负载阻抗辐角的余弦值，或者是有功功率与无功功率之比。如果电流滞后于电压（感性负载），则 pf 是滞后的；如果电流超前于电压（容性负载），则 pf 是超前的。

6）视在功率 S（单位为 V·A）等于电压有效值与电流有效值的乘积：

$$S = V_{rms} I_{rms}$$

另外也可以由 $S = |\mathbf{S}| = \sqrt{P^2 + Q^2}$ 得到，其中 Q 为无功功率。

7）无功功率（单位为 var）为

$$Q = \frac{1}{2}V_m I_m \sin(\theta_v - \theta_i) = V_{rms} I_{rms} \sin(\theta_v - \theta_i)$$

8）复功率 $\mathbf{S}$（单位为 V·A）等于电压有效值相量与电流有效值相量的共轭复数的乘积，也等于有功功率 P 与无功功率 Q 的复数和：

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}_{rms}\mathbf{I}_{rms}^* = V_{rms} I_{rms} \angle(\theta_v - \theta_i) = P + jQ$$

而且，

$$\mathbf{S} = I_{rms}^2 \mathbf{Z} = V_{rms}^2 / \mathbf{Z}^*$$

9）电路网络总的复功率等于各个元件的复功率之和，同样地，总的有功功率与无功功率也分别等于各个元件的有功功率与无功功率之和。但是，总的视在功率不能采用上述相加的计算方法。

10）从经济因素考虑，功率因数校正是必需的。降低总的无功功率即可改善负载的功率因数。

11）瓦特表是测量平均功率的仪器。用电量可以用千瓦时表来度量。

复习题

1 电感吸收的平均功率为零。

(a) 正确　(b) 错误

2 从负载两端看进去的网络戴维南等效阻抗为 $(80+j55)\Omega$，要实现最大功率传输，则负载阻抗必须为：

(a) $(-80+j55)\Omega$

(b) $(-80-j55)\Omega$

(c) $(80-j55)\Omega$

(d) $(80+j55)\Omega$

3 家用电源插座上标明 120V，60Hz 的电源，则可提供的电源幅度是：

(a) 110V　(b) 120V

(c) 170V　(d) 210V

4 若负载阻抗是 $(20-j20)\Omega$，则功率因数是：

(a) $\angle -45°$　(b) 0

(c) 1　(d) 0.7071

(e) 以上都不是

5 包含给定负载所有功率信息的量是：

(a) 功率因数　(b) 视在功率

(c) 平均功率　(d) 无功功率

(e) 复功率

6 无功功率的度量单位是：

(a) 瓦特　(b) 伏安

(c) 乏　(d) 以上都不是

7 如图 14-26 (a) 所示的功率三角形中，无功功率是：

(a) 1000var 超前

(b) 1000var 滞后

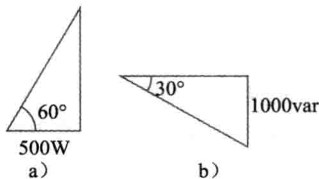


图 14-26　复习题 7 和复习题 48 的功率三角形

(c) 866var 超前

(d) 866var 滞后

8 如图 14-26 (b) 所示的功率三角形中，视在功率是：

(a) 2000var　(b) 1000var

(c) 866var　(d) 500var

9 一个电源接有三个并联的负载 $\mathbf{Z}_1$，$\mathbf{Z}_2$ 和 $\mathbf{Z}_3$，下列表达哪个是错误的？

(a) $P=P_1+P_2+P_3$

(b) $Q=Q_1+Q_2+Q_3$

(c) $S=S_1+S_2+S_3$

(d) $\mathbf{S}=\mathbf{S}_1+\mathbf{S}_2+\mathbf{S}_3$

10 用于测量平均功率的仪器的是：

(a) 电压表　(b) 电流表

(c) 瓦特表　(d) var 表

(e) 千瓦时表

答案：1 (a)，2 (c)，3 (c)，4 (d)，5 (e)，6 (c)，7 (d)，8 (a)，9 (c)，10 (c)

习题

14.2 节

1 若 $v(t)=160\cos(50t)$V 和 $i(t)=-20\sin(50t-30°)$A，试计算瞬时功率和平均功率。

2 当 $t=2$s 时，计算图 14-27 所示电路中每个元件的瞬时功率。

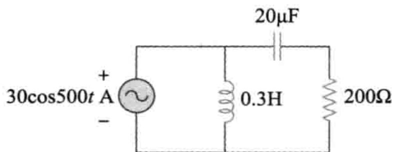


图 14-27　习题 2 的电路原理图

3 电路如图 14-28 所示，试计算每个元件吸收的平均功率。

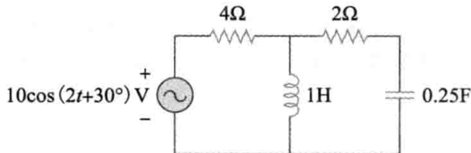


图 14-28　习题 3 的电路原理图

4 给定电路如图 14-29 所示，试计算每个元件吸收的平均功率。

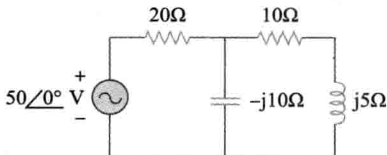


图 14-29　习题 4 的电路原理图

5 电路如图 14-30 所示，假设 $v_s(t)=8\cos(2t-40°)$V，计算每个无源元件吸收的平均功率。

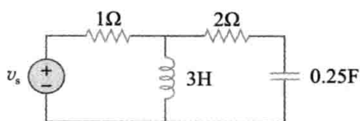


图 14-30 习题 5 的电路原理图

14.3 节

6 对图 14-31 中的每个电路，试计算最大功率传输条件下的负载阻抗 **Z** 以及传输的最大平均功率值。

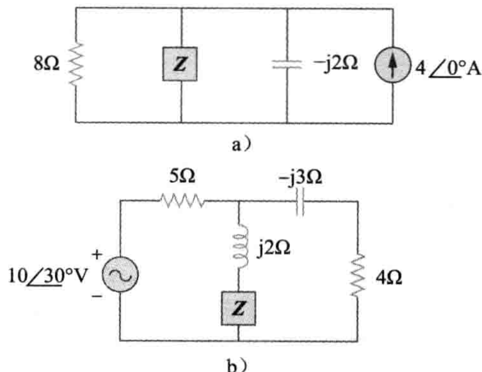


图 14-31 习题 6 的电路原理图

7 电路如图 14-32 所示，计算：

(a) 吸收最大功率时的负载阻抗；

(b) 负载吸收的最大平均功率值。

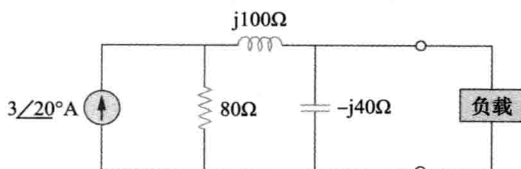


图 14-32 习题 7 的电路原理图

8 图 14-33 所示的电路中，试求解阻抗 **Z**，使得 **Z** 吸收的功率最大，并计算最大功率值。

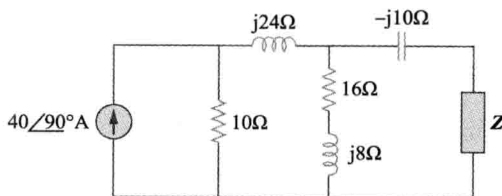


图 14-33 习题 8 的电路原理图

9 求解图 14-34 所示电路中的 Z_L，使得阻抗 Z_L 消耗的功率最大，并计算 Z_L 消耗的最大平均功率值。

10 调节图 14-35 所示电路中的可变电阻 R 直到它吸收的功率最大，求解该电阻 R 值和它所吸收的最大平均功率。

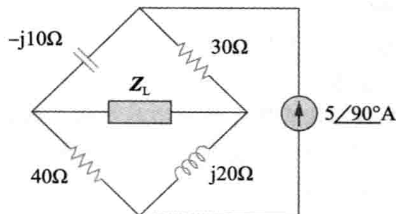


图 14-34 习题 9 的电路原理图

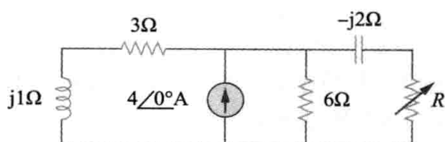


图 14-35 习题 10 的电路原理图

14.4 节

11 一个继电器线圈连接到 210V，50Hz 电源上，若线圈电阻是 30Ω，电感是 0.5H，计算视在功率和功率因数。

12 一个负载由 (12−j8)Ω 和 j4Ω 两个阻抗并联组成，计算其总的功率因数。

13 电路如图 14-36 所示，计算：

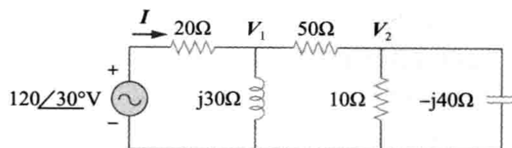


图 14-36 习题 13 的电路原理图

(a) 每个元件消耗的有功功率；

(b) 电路提供的总视在功率；

(c) 电路的功率因数。

14 计算图 14-37 所示的每个电路的功率因数，并指出各功率因数是滞后的还是超前的。

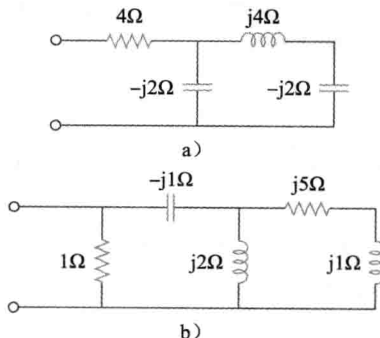


图 14-37 习题 14 的电路原理图

14.5 节

15 一个 RL 串联电路，$V_R=220\text{V}$（rms），$V_L=150\text{V}$（rms），电流是 6A（rms），试计算有功功率，无功功率和视在功率。

16 电路中有功功率为 4.2W，无功功率为 6.2var，计算视在功率。

17 电路如图 14-38 所示，计算电源传递的复功率，令 $v=20\cos(10t)\text{V}$。

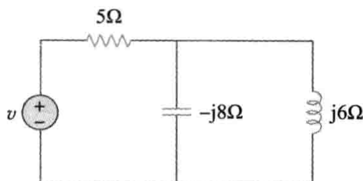


图 14-38 习题 17 的电路原理图

18 240V（rms）电源与感应式交流电动机连接，若电动机获得的电流为 100A，额定功率为 10kW，试计算：(a) 功率因数 pf，(b) 无功功率 Q，(c) 电动机的等效阻抗 $\boldsymbol{Z}_{eq}$。

19 240V（rms）电动机输出有功功率 4hp（1hp=745.7kW）。若电动机工作电流为 15A，试计算：(a) 视在功率，(b) 功率因数，(c) 无功功率。

20 一个负载从 220Vrms 电源中获得 5kvar，其功率因数是 0.86（超前），计算峰值电流和电源提供的视在功率。

21 电源传递 50kV·A 给负载，其功率因数为 0.65（滞后），计算负载的平均功率和无功功率。

22 对下列电压和电流相量，计算复功率，视在功率，有功功率，无功功率，并指出功率因数 pf 是超前的还是滞后的。

(a) $\boldsymbol{V}=220\angle 30^\circ\ \text{V}$（rms），
$\boldsymbol{I}=0.5\angle 60^\circ\ \text{A}$（rms）

(b) $\boldsymbol{V}=250\angle -10^\circ\ \text{V}$（rms），
$\boldsymbol{I}=6.2\angle -25^\circ\ \text{A}$（rms）

(c) $\boldsymbol{V}=120\angle 0^\circ\ \text{V}$（rms），
$\boldsymbol{I}=2.4\angle -15^\circ\ \text{A}$（rms）

(d) $\boldsymbol{V}=160\angle 45^\circ\ \text{V}$（rms），
$\boldsymbol{I}=8.5\angle 90^\circ\ \text{A}$（rms）

23 对下列每一种情况，计算复功率、平均功率和无功功率。

(a) $v(t)=112\cos(\omega t+10^\circ)\ \text{V}$，
$i(t)=4\cos(\omega t-50^\circ)\ \text{A}$

(b) $v(t)=160\cos 377t\ \text{V}$，
$i(t)=4\cos(377t+45^\circ)\ \text{A}$

(c) $\boldsymbol{V}=80\angle 60^\circ\ \text{V(rms)}$，$\boldsymbol{Z}=50\angle 30^\circ\ \Omega$

(d) $\boldsymbol{I}=10\angle 60^\circ\ \text{V(rms)}$，$\boldsymbol{Z}=100\angle 45^\circ\ \Omega$

24 计算下列情况的复功率。

(a) $P=269\text{W}$，$Q=150\text{var}$（容性）

(b) $Q=2000\text{var}$，$pf=0.9$（超前）

(c) $S=600\text{V}\cdot\text{A}$，$Q=450\text{var}$（感性）

(d) $V_{rms}=220\text{V}$，$P=1\text{kW}$，
$|\boldsymbol{Z}|=40\Omega$（感性）

25 计算下列情况下的总阻抗。

(a) $P=1000\text{W}$，$pf=0.8$（超前），
$V_{rms}=220\text{V}$

(b) $P=1500\text{W}$，$Q=2000\text{var}$（感性），$I_{rms}=12\text{A}$

(c) $\boldsymbol{S}=4500\angle 60^\circ\ \text{V}\cdot\text{A}$，$\boldsymbol{V}=120\angle 45^\circ\ \text{V}$

26 计算图 14-39 所示的整个电路的：

(a) 功率；

(b) 电源提供的平均功率；

(c) 无功功率；

(d) 视在功率；

(e) 复功率。

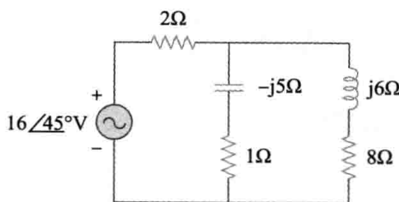


图 14-39 习题 26 的电路原理图

27 电路如图 14-40 所示，仪器 A 获得 2kW 功率，且功率因数 0.8（滞后），仪器 B 获得 3kV·A 功率，且功率因数 0.4（超前），而仪器 C 是感性元件，消耗 1kW，接收功率为 500var。(a) 试计算整个系统的功率因数，(b) 当 $\boldsymbol{V}_s=120\angle 45^\circ\ \text{Vrms}$ 时，计算 $\boldsymbol{I}$。

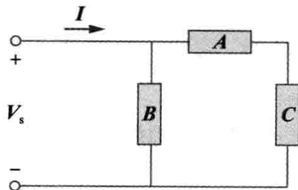


图 14-40 习题 27 的电路原理图

28 一个电感电阻串联电路有功功率为 100W，视在功率为 240V·A，求解无功功率。

29 一个 60Hz 电压源提供 $4\angle 30^\circ\ \text{A}$（rms）电流给负载 $\boldsymbol{Z}=100\angle 45^\circ\ \Omega$。(a) 计算视在功率 S，(b) 求解有功功率 P，(c) 计算无功功率 Q，

(d) 画出功率三角形。

30 电路如图 14-41 所示，(a) 计算电源提供的总的视在功率，(b) 画出功率三角形。

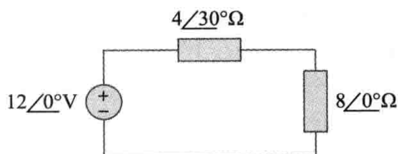


图 14-41 习题 30 的电路原理图

31 若图 14-42 所示电路的总视在功率为 600V·A，总功率因数为 0.84 且滞后，令 $V=50\angle 0^\circ$ V (rms)，计算电路中的未知阻抗 $\boldsymbol{Z}$。

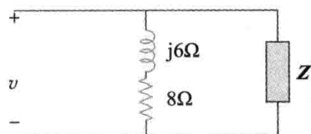


图 14-42 习题 31 的电路原理图

32 电路如图 14-43 所示，计算：(a) I(rms)，(b) 有功功率 P，(c) 无功功率 Q。

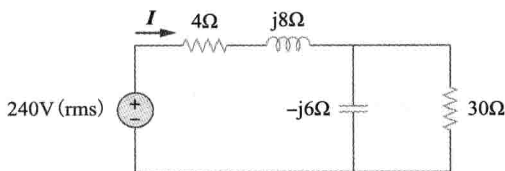


图 14-43 习题 32 的电路原理图

33 电路如图 14-44 所示，计算：(a) 传递给 R_L 的复功率，(b) 获得最大平均功率的阻抗 Z_L。

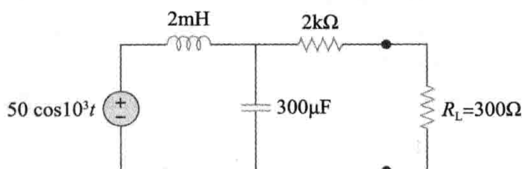


图 14-44 习题 33 的电路原理图

14.6 节

34 如图 14-45 所示的网络，计算每个元件吸收的复功率。

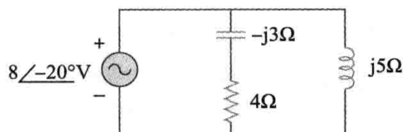


图 14-45 习题 34 的电路原理图

35 计算图 14-46 所示电路中 5 个元件吸收的复功率。

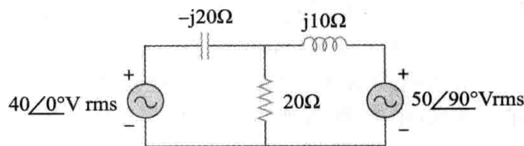


图 14-46 习题 35 的电路原理图

36 计算图 14-47 所示电路中电源提供的复功率。

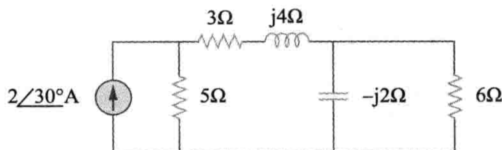


图 14-47 习题 36 的电路原理图

37 电路如图 14-48 所示，求解 $\boldsymbol{V}_o$ 和输入功率因数。



图 14-48 习题 37 的电路原理图

38 给定电路如图 14-49 所示，求解 $\boldsymbol{I}_o$ 和总的复功率。

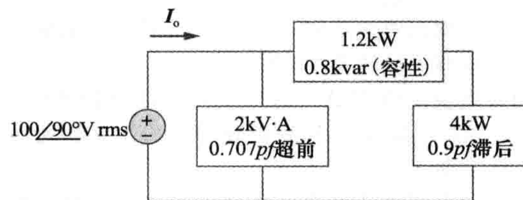


图 14-49 习题 38 的电路原理图

14.7 节

39 电路如图 14-50 所示，

(a) 功率因数是多少？

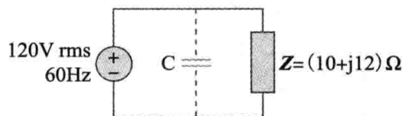


图 14-50 习题 39 的电路原理图

(b) 消耗的平均功率是多少？

(c) 若校正功率因数为单位 1，则与负载并联的电容器的容值应是多少？

40 一个 880V·A、220V、50Hz 的负载，其功率因数为 0.8 (滞后)，试求需要并联多大的电容才能将功率因数校正到单位 1？

41 两个负载并联跨接在 120V (rms)，60Hz

传输线两端。第一个负载在功率因数 0.707（滞后）时，获得 150V·A 功率，而第二个负载在功率因素 0.8（超前）获得 50var 功率。为了校正整个系统的功率因数为单位 1，另将一个纯容性负载并跨接在 120V 传输线两端，计算该电容的取值。

42　一个 40kW 的感应电动机，功率因数为 0.76（滞后），由 120V，60Hz 的正弦电压源供电，求解并联到电动机的电容器的容量，以便将功率因数提高到 (a) 0.9（滞后），(b) 1.0。

43　某 240V（rms），60Hz 电源为负载供电，该负载为 10kW（阻性），15kvar（容性）以及 22kvar（感性），试计算：
(a) 视在功率，
(b) 从电源获得的电流，
(c) 额定的无功功率以及将功率因数提高到 0.96 滞后所需的电容值，
(d) 在新的功率因数条件下，从电源获得的电流。

44　某 50V(rms)、400Hz 供电设备与 6kW，功率因数为 0.75（滞后）的负载相连接，试计算将功率因数校正为 0.95（滞后）所需的电容值。

14.8 节

45　试确定如图 14-51 所示电路中瓦特表的读数。

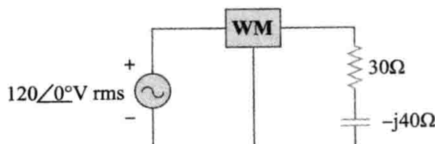


图 14-51　习题 45 的电路原理图

46　在如图 14-52 所示网络中，瓦特表的读数是多少？

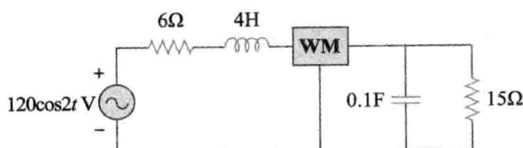


图 14-52　习题 46 的电路原理图

47　家庭用的千瓦时表通常每月读取一次。给定某个月份，若千瓦时表上个月和本月读数分别为：
上个月读数：3246kW·h
本月读数：4017kW·h
参照以下住宅用电费用明细表计算该月的电费。
最低消费为 $12.00
前 100kW·h 每月计费标准为 16 美分每千瓦时
其次到 200kW·h 每月计费标准为 10 美分每千瓦时
超过 200kW·h 后每月计费标准为 6 美分每千瓦时

48　某 240Vrms、60Hz 电源为由一个 5kW 加热器和一个 30kV·A、功率因数为 0.82 感应电动机组成的并联负载供电，试确定：
(a) 该系统的视在功率，
(b) 该系统的无功功率，
(c) 将该系统的功率因数调节为 0.9（滞后）所需的电容器的额定 kV·A，
(d) 所需的电容器值。

49　某用户年耗电 1200MW·h，且最大需求为 2.4MV·A，最大需求收费为 $30 每千瓦时每年每伏安，电能收费为 4 美分每千瓦时。
(a) 试确定每年的电费，
(b) 如果供电公司的收入与按照两部分计费时的收入保持相同，试计算统一费率下每千瓦时电能的收费。

50　当天线调整为与 75Ω 电阻器和 4μH 电感器相串联的负载等效时，发射机传递给该天线的功率最大。如果发射机的工作频率为 4.12MHz，试计算其内部阻抗。

51　某工业用加热器的标示牌上显示：210V，60Hz，12kV·A，0.78*pf*（滞后），试确定：(a) 视在功率与复功率，
(b) 该加热器的阻抗。

52　某电动机的铭牌上显示以下信息：
电源电压：220（V rms），
电源电流：15（A rms），
电源频率：60Hz，
功率：2700W。
试确定该电动机的功率因数（滞后），并计算使该电动机的 *pf* 提高到 1 所需并联电容器的容值 *C*。

53　某电力传输系统的模型如图 14-53 所示，如果 $\mathbf{V}_s=240\angle 0^\circ$（rms），试计算负载吸收的平均功率。

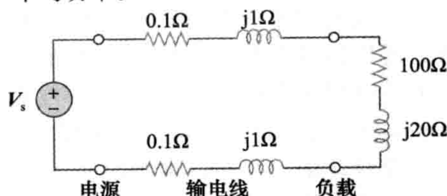


图 14-53　习题 53 的电路原理图

第15章
谐　　振

不要在意评论家说什么；从来没有一座塑像是建来记念一个评论家的。

——让·西贝柳斯

增强职业技能

提升交际技巧

学习电路分析课程是从事电子工程事业做准备的第一步，在校学习期间提高与人和社会的交际技能同样也是为今后工作做准备的组成部分，因为人们生活中的大部分时间都是用于交流的。



优秀的交际能力被许多人认为是晋升中最为重要的阶梯

(© IT Stock/Punchstock RF)

工业界的人们经常抱怨从学校毕业的工程师在书面交流和口头交流方面并没有做好充分的准备。具备良好交流能力的工程师已变成宝贵的财富。

您可能会说、会写，也并不感到困难。但是，如何进行有效的交流呢？有效交流的艺术是一位成功的工程师必须具备的重要才能。

对于工业工程师而言，良好的交际能力是不断晋升的关键所在。在一项美国公司进行的关于什么因素影响管理人员晋升的调查中，列举了22项有关个人素质的问题及其在晋升中的重要性。调查结果令人大吃一惊："来自经验或经历的技术能力"位列倒数第四。自信、有追求、灵活、成熟、能作出合理的决定、与人合作以及刻苦工作等品质都排在前面，而名列第一位的则是"交际能力"。自己的事业愈往上发展，需要的交际就愈多。因此，应该将有效的交流作为个人工程职业道路上的一项重要手段和必备能力。

掌握有效的交际方法是人一生都必须面对的事情，需要不断地锻炼、不断地提高。在校学习期间是开始培养交际能力的最佳时机，要不断地寻找机会培养和提高自己的读、写、听、说能力。可以通过参与课堂展示、集体课程设计、学生社团活动和选修交流课程等方式培养自己这方面的能力。现在就开始要比工作后再注意这个问题风险更小。

15.1 引言

在正弦电路分析中，已经学习了如何求解含有固定频率电源电路中的电压和电流。本章中将关注交流电路，交流电路中电压频率会发生变化。如果令正弦电源的幅度保持不变，而只改变频率，即可得到电路的频率响应（frequency response）。频率响应是频率的函数，可以将其看作正弦稳态电路性能的一个全面的描述。

谐振电路频率响应最重要的特性是其幅度特性中所呈现的尖峰点（即谐振峰，resonant peak）。谐振的概念应用在科学和工程的诸多领域之中。没有谐振就没有收音机、电视机、或者音乐。当然，谐振也有负面的影响，有时会导致桥梁坍塌或者直升机损坏。

谐振是存储能量从一种形式转换为另一种形式的振荡产生的根源。这种现象在通信网

络中可以用于频率选择。在任何包含至少一个电感和一个电容的电路中都可能发生电子谐振。由于谐振电路（串联或者并联）频率响应可以具有很高的频率选择性，很利于构造滤波器。谐振电路还用于无线电或者TV接收机中选台。

本章将首先介绍串联 RLC 谐振电路、讨论品质因素的重要性。随后分析并联 RLC 谐振电路，以及利用PSpice获取 RLC 电路的频率响应。最后将会介绍一个谐振电路的实际应用——无线电接收器。

15.2　串联谐振

串联 RLC 电路的基本组成如图15-1所示。该谐振电路包含一个频率可变的交流电源、一个电阻（可选）、一个电容和一个电感，在频率发生变化时将会产生谐振。

谐振是 RLC 电路中容抗和感抗幅度相等，但是由于二者具有相反的符号，所以表现为纯电阻阻抗的状态。

在频域内分析图15-1所示的串联 RLC 电路。输入阻抗为

$$\mathbf{Z}=\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}}=R+\mathrm{j}\omega L+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C} \tag{15-1}$$

即

$$\mathbf{Z}=R+\mathrm{j}\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right) \tag{15-2}$$

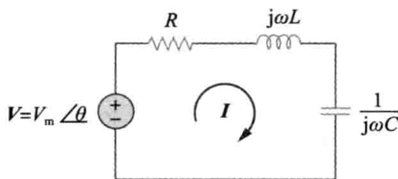


图15-1　串联谐振电路

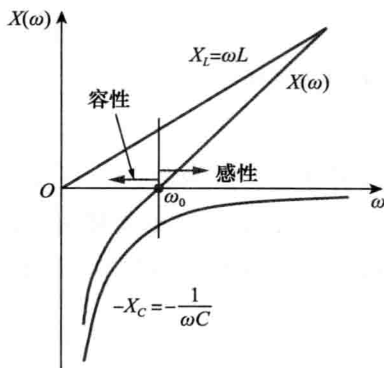


图15-2　X、X_L 和 X_C 的曲线

图15-2中的图形表示了输入阻抗虚部的变化，即

$$X(\omega)=\omega L-\frac{1}{\omega C} \tag{15-3}$$

在输入阻抗的虚部 X 为零时会引起谐振，即

$$\mathrm{Im}(\mathbf{Z})=X(\omega)=\omega L-\frac{1}{\omega C}=0 \tag{15-4}$$

满足这一条件的 ω 值称为**谐振频率**（resonant frequency）。因此，谐振条件为

$$\omega_0 L=\frac{1}{\omega_0 C} \tag{15-5}$$

即

$$\boxed{\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}(\mathrm{rad/s})} \tag{15-6}$$

因为 $\omega_0=2\pi f_0$，所以有

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}(\text{Hz}) \tag{15-7}$$

注意在谐振条件下，有：

1）阻抗是纯电阻，即 $\mathbf{Z}=R$。换句话说，LC 串联支路相当于短路，整个电源电压都加在电阻 R 的两端。

2）电压 $\mathbf{V}_s$ 和电流 $\mathbf{I}$ 为同相，所以功率因素为 1。

3）阻抗 $\mathbf{Z}(\omega)$ 的幅度最小。

4）电感两端电压和电容两端电压远大于电源电压：

$$\left(V_L = IX_L = \frac{V_m}{R}\omega_0 L,\quad V_C = -IX_C = -\frac{V_m}{R}\frac{1}{\omega_0 C}\right)$$

电路中电流幅度的频率响应为

$$I = |\mathbf{I}| = \frac{V_m}{\sqrt{R^2+(\omega L - 1/\omega C)^2}} \tag{15-8}$$

如图 15-3 所示；当频率轴的刻度为对数时，图中画出的曲线仅表现出了频率响应的对称性。RLC 电路吸收的平均功率为

$$P(\omega) = \frac{1}{2}I^2 R \tag{15-9}$$

在谐振时电路所吸收的功率最大，$I=V_m/R$，所以有

$$P(\omega_0) = \frac{1}{2}\frac{V_m^2}{R} \tag{15-10}$$

在特定频率 $\omega=\omega_1$，ω_2 时，吸收的功率为最大值的二分之一，即

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \frac{(V_m/\sqrt{2})^2}{2R} = \frac{V_m^2}{4R} \tag{15-11}$$

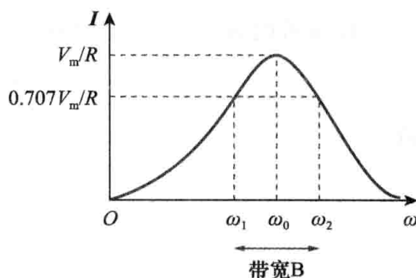


图 15-3 图 15-1 所示串联谐振电路电流幅度与频率曲线

因此，将 ω_1，ω_2 称为**半功率频率**（half-power frequency）。

将 $\mathbf{Z}$ 设为$\sqrt{2}R$ 即可得到半功率频率为

$$\sqrt{R^2+\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{2}R \tag{15-12}$$

对 ω 求解，得到

$$\boxed{\omega_1 = -\frac{R}{2L}+\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2+\frac{1}{LC}}} \tag{15-13a}$$

$$\boxed{\omega_2 = -\frac{R}{2L}+\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2+\frac{1}{LC}}} \tag{15-13b}$$

由式（15-6）和式（15-13），可得谐振频率与半功率频率的关系为

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega_2} \tag{15-14}$$

上式表示谐振频率是半功率频率的几何平均值。注意，由于频率响应一般是不对称的，因此通常情况下 ω_1 和 ω_2 也不是关于谐振频率 ω_0 对称的。不过，后面将会讲到，半功率频率关于谐振频率数值的对称性通常是一个比较合理的近似。

虽然图 15-3 中的曲线的峰值由 R 决定，但是宽度却取决于其他因素，如半功率频率。带宽（bandwith，BW）定义为两个半功率频率的差值，即

$$\text{BW} = \omega_2 - \omega_1 \tag{15-15}$$

带宽（BW）是两个半功率频率的差值。

该定义只是带宽常用定义之一[⊖]。严格来讲，式（15-15）中的BW是半功率带宽，因为它表示了两个半功率频率之间频率带的宽度。

例 15-1 如图 15-4，$R=2\Omega$，$L=1\text{mH}$，且 $C=0.4\mu\text{F}$。

（a）求谐振频率和半功率频率。

（b）求带宽。

（c）确定在频率为 ω_0、ω_1 及 ω_2 时的电流幅度。

（d）计算谐振及半功率频率点时的吸收功率。

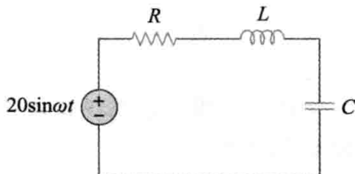


图 15-4 例 15-1 和 15-2 的电路图

解：（a）谐振频率为

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}=\frac{1}{\sqrt{10^{-3}\times 0.4\times 10^{-6}}}=50(\text{krad/s})$$

下半功率频率为

$$\omega_1=-\frac{R}{2L}+\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2+\frac{1}{LC}}=-\frac{2}{2\times 10^{-3}}+\sqrt{(10^3)^2+(50\times 10^3)^2}$$
$$=-1+\sqrt{1+2500}=49(\text{krad/s})$$

同样，上半功率频率为

$$\omega_2=1+\sqrt{1+2500}\text{krad/s}=51(\text{krad/s})$$

（b）带宽为

$$\text{BW}=\omega_2-\omega_1=51-49=2(\text{krad/s})$$

（c）当 $\omega=\omega_0$ 时，有

$$I=\frac{V_m}{R}=\frac{20}{2}=10(\text{A})$$

当 $\omega=\omega_1$，ω_2 时，有

$$I=\frac{V_m}{\sqrt{2}R}=\frac{10}{\sqrt{2}}=7.071(\text{A})$$

（d）在半功率频率点吸收的功率为

$$P=\frac{V_m^2}{4R}=\frac{20^2}{4\times 2}=50(\text{W})$$

◀

练习 15-1 在一个串联电路中，$R=4\Omega$，$L=25\text{mH}$，且 $C=0.625\mu\text{F}$。

（a）计算谐振频率。

（b）求 ω_1、ω_2 及 BW。

（c）确定在 $\omega=\omega_0$、ω_1，ω_2 时吸收的平均功率。令 $V_m=100\text{V}$。

答案：（a）8krad/s；（b）7920rad/s，8080rad/s，160rad/s；（c）1.25kW，0.625kW，0.625kW

15.3 品质因数

谐振电路中谐振的“锐度”数值上用**品质因数**（quality factor，Q）来衡量[⊜]。在谐振时，电路中无功能量在电路中的电感器和电容器之间来回振荡。对于任何谐振电路，品质因数是在谐振频率时无功功率与平均功率的比值，即

$$Q=\frac{\text{无功功率}}{\text{平均功率}} \tag{15-16}$$

⊖ 在计算机通信网络中，带宽是数据传输的速率除以 1s 内从一点传送到另一点的数据数量。

⊜ 注意：虽然 Q 也同样表示无功功率，但是这二者并不相同，不要混淆。它们的单位有助于区分二者。

在串联 RLC 电路中，

$$Q=\frac{I^2X_L}{I^2R}=\frac{\omega_0 L}{R}=\frac{I^2X_C}{I^2R}=\frac{1}{\omega_0 CR} \tag{15-17}$$

即

$$\boxed{Q=\frac{\omega_0 L}{R}=\frac{1}{\omega_0 CR}} \tag{15-18}$$

注意，品质因数是无量纲的。将式（15-13）代入式（15-15）可得到带宽 BW 和品质因数 Q 的关系。结果为

$$\mathrm{BW}=\frac{R}{L}$$

利用式（15-18），可得

$$\mathrm{BW}=\frac{R}{L}=\frac{\omega_0}{Q} \quad \Rightarrow \quad Q=\frac{\omega_0}{\mathrm{BW}} \tag{15-19}$$

即

$$\mathrm{BW}=\omega_0^2 CR$$

因此

谐振电路中的品质因数为谐振频率与带宽的比值。

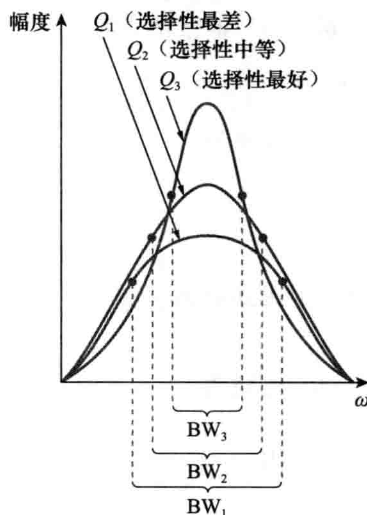


图 15-5 电路的 Q 值越高，带宽越小

Q 越高，谐振时电路的电流越大，曲线越尖锐。如图 15-5 所示，Q 值越高，电路的选择性越高但是带宽越小。*RLC* 电路的选择性（selectivity）是指电路对某一频率响应而排斥所有其他频率的能力[⊖]。如果电路的频率带宽较宽，则品质因数一定较低。

所设计的谐振电路通常应工作在谐振频率点或者谐振频率附近。当电路的品质因数大于或者等于 10 时，就称为高 Q 电路（high-Q-circuit）。在高 Q 电路（$Q\geqslant 10$）的所有实际应用中，半功率频率均关于谐振频率代数对称，且可以近似为

$$\boxed{\omega_1\approx\omega_0-\frac{\mathrm{BW}}{2},\quad \omega_2\approx\omega_0+\frac{\mathrm{BW}}{2}} \tag{15-20}$$

高 Q 电路经常用于通信网络中。

由上可知，谐振电路可以用以下五个相关参数来表征：两个半功率频率 ω_1，ω_2，谐振频率 ω_0，带宽 BW 以及品质因数 Q。注意式（15-18）与式（15-19）仅用于串联谐振电路。

例 15-2 在图 15-4 所示电路中，$R=2\Omega$，$L=2\text{mH}$，且 $C=0.4\mu\text{F}$。计算品质因数和半功率频率。

解： 可以用下述两种方法来求解。

方法 1：由例 15-1 可得，BW=2krad/s 或

$$\mathrm{BW}=\frac{R}{L}=\frac{2}{10^{-3}}=2(\text{krad/s})$$

品质因数为

$$Q=\frac{\omega_0}{\mathrm{BW}}=\frac{50\times10^3}{2\times10^3}=25$$

下半功率频率为

⊖ 注意：品质因数是衡量电路的选择性（或谐振的“尖锐性”）。

$$\omega_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} = -\frac{2}{2\times10^{-3}} + \sqrt{\left(\frac{2}{2\times10^{3}}\right)^2 + \frac{1}{10^{-3}\times0.4\times10^{-6}}}$$

$$= -10^3 + \sqrt{(10^3)^2 + (50\times10^3)^2} = -1 + \sqrt{1+2500} = 49(\text{krad/s})$$

同样，上半功率频率为

$$\omega_2 = 1 + \sqrt{1+2500}\text{krad/s} = 51(\text{krad/s})$$

方法 2：也可以先求得

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{50\times10^3\times10^{-3}}{2} = 25$$

由 Q，可得

$$\text{BW} = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{50\times10^3}{25} = 2(\text{krad/s})$$

由于 $Q>10$，所以这是一个高 Q 电路，可以用以下方式得到半功率频率：

$$\omega_1 = \omega_0 - \frac{\text{BW}}{2} = 50 - 1 = 49(\text{krad/s})$$

$$\omega_1 = \omega_0 + \frac{\text{BW}}{2} = 50 + 1 = 51(\text{krad/s})$$ ◀

练习 15-2　一个串联电路，其中 $R=4\Omega$，$L=25\text{mH}$。

(a) 计算品质因数为 50 时 C 的值。

(b) 求 ω_0、ω_1、ω_2 和 BW。　**答案：**(a) 0.625μF (b) 7920rad/s，8080rad/s，160rad/s

15.4　并联谐振

如图 15-6 所示的并联 RLC 电路为串联 RLC 电路的对偶电路。因此省去不必要的重复，由对偶可得，该电路的导纳为

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{I}/\boldsymbol{V} = \frac{1}{R} + \text{j}\omega C + \frac{1}{\text{j}\omega L} \tag{15-21}$$

即

$$\boldsymbol{Y} = \frac{1}{R} + \text{j}\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \tag{15-22}$$

当 $\boldsymbol{Y}$ 的虚部等于零时发生谐振，即

$$\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0 \tag{15-23}$$

或

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}(\text{rad/s})} \tag{15-24}$$

该式与串联谐振电路的式 (15-6) 相同。电压 $|\boldsymbol{V}|$ 与频率的关系如图 15-7 所示。注意到在谐振时，并联的 LC 组合作用相当于开路，使得全部的电流都流经 R。

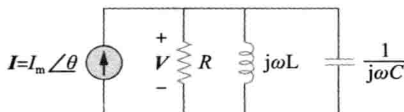


图 15-6　并联谐振电路

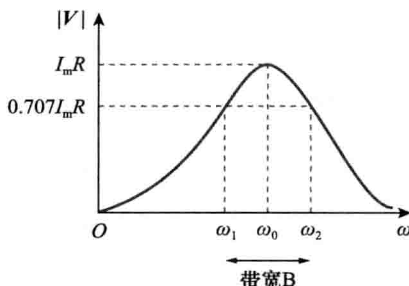


图 15-7　图 15-6 所示并联谐振电路的电压幅度与频率曲线

通过比较式（15-21）和式（15-2），可以发现图 15-1 和图 15-6 所示的电路具有对偶的特性。所以，将串联谐振电路的表达式中的 R、L 和 C 用 $1/R$、C 和 L 分别代替，就得到了并联谐振电路的如下表达式：

$$\omega_1 = -\frac{1}{2RC}+\sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2+\frac{1}{LC}} \tag{15-25a}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2RC}+\sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2+\frac{1}{LC}} \tag{15-25b}$$

$$\mathrm{BW} = \omega_2-\omega_1 = \frac{1}{RC} \tag{15-26}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{\mathrm{BW}} = \omega_0 R_C = \frac{R}{\omega_0 L} \tag{15-27}$$

同样，得到高 Q 电路的表达式（$Q \geqslant 10$）：

$$\omega_1 \approx \omega_0-\frac{\mathrm{BW}}{2}, \quad \omega_2 \approx \omega_0+\frac{\mathrm{BW}}{2}$$

表 15-1 总结了串联谐振电路和并联谐振电路的主要特性。除了本节和上节介绍的串联和并联电路以外，还有一些其他的谐振电路。例 15-4 讨论了一个典型的例子。

表 15-1 RLC 谐振电路特性总结*

特性	串联电路	并联电路
谐振频率 ω_0	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$
品质因素 Q	$\frac{\omega_0 L}{R}$或$\frac{1}{\omega_0 RC}$	$\frac{R}{\omega_0 L}$或$\omega_0 RC$
带宽 BW	$\frac{\omega_0}{Q}$	$\frac{\omega_0}{Q}$
半功率频率 ω_1，ω_2	$\omega_0 \pm \frac{\mathrm{BW}}{2}$	$\omega_0 \pm \frac{\mathrm{BW}}{2}$

*本表中半功率频率仅对于高 Q 电路有效。

对于谐振的讨论还应考虑振铃（ringing）现象。振铃是电子电路中的电压或电流产生期望之外的振荡或者近于振荡的现象。当电子脉冲在谐振电路中引起寄生电容或者寄生电感（即设计之外的而由构成电路材料所产生）时，就会产生振铃现象。由于振铃会引起电路中电流过大，导致能量浪费且造成元件过热，因而要避免振铃现象产生。

例 15-3 在如图 15-8 所示的并联 RLC 电路中，令 $R=8\text{k}\Omega$，$L=0.2\text{mH}$，且 $C=8\mu\text{F}$。

（a）计算 ω_0、Q 和 BW。

（b）求 ω_1 和 ω_2。

（c）确定电路在频率点 ω_0、ω_1 和 ω_2 消耗的功率。

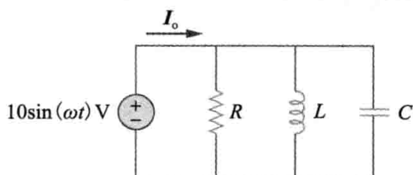


图 15-8 例 15-3 的电路图

解：（a）

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0.2\times10^{-3}\times8\times10^{-6}}} = \frac{10^5}{4} = 25(\text{krad/s})$$

$$Q = \frac{R}{\omega_0 L} = \frac{8\times10^3}{25\times10^3\times0.2\times10^{-3}} = 1600$$

$$\mathrm{BW} = \frac{\omega_0}{Q} = 15.625(\text{rad/s})$$

（b）鉴于 Q 的值，可以将该电路看作高 Q 电路。因此有

$$\omega_1 = \omega_0-\frac{\mathrm{BW}}{2} = 25000-7.812 = 24992(\text{rad/s})$$

$$\omega_2 = \omega_0 + \frac{BW}{2} = 25000 + 7.812 = 25008(\text{rad/s})$$

(c) $\omega=\omega_0$ 时，$\mathbf{Y}=1/R$ 或 $\mathbf{Z}=R=8\text{k}\Omega$。因而

$$\mathbf{I}_o = \mathbf{V}/\mathbf{Z} = \frac{10\angle 0°}{8000} = 1.25\angle 0°(\text{mA})$$

因为谐振时，全部的电流都流经 R，所以 $\omega=\omega_0$ 时消耗的平均功率为

$$P = \frac{1}{2}|\mathbf{I}_o|^2 R = \frac{1}{2}\times(1.25\times10^{-3})^2\times(8\times10^3) = 6.25(\text{mW})$$

即

$$P = \frac{V_m^2}{2R} = \frac{10^2}{2\times8\times10^3} = 6.25(\text{mW})$$

当 $\omega=\omega_1$、ω_2 时，

$$P = \frac{V_m^2}{4R} = 3.125(\text{mW})$$

◀

练习 15-3 一个并联电路，其中 $R=100\text{k}\Omega$，$L=20\text{mH}$，且 $C=5\text{nF}$。计算 ω_0、ω_1、ω_2、Q 和 BW。 **答案：** 100krad/s；99krad/s；101krad/s；50；2krad/s

例 15-4 确定如图 15-9 所示电路的谐振频率。

解： 输入导纳为

$$\mathbf{Y} = j\omega0.1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{2+j\omega2} = 0.1 + j\omega0.1 + \frac{2-j\omega2}{4+4\omega^2} = \left(0.1+\frac{1}{2+2\omega^2}\right) + j\omega\left(0.1-\frac{1}{2+2\omega^2}\right)$$

谐振时，$\text{Im}(\mathbf{Y})=0$，即

$$\omega_0 0.1 - \frac{\omega_0}{2+2\omega_0^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = 2(\text{rad/s})$$

◀

练习 15-4 计算如图 15-10 所示电路的谐振频率。 **答案：** 2.179rad/s

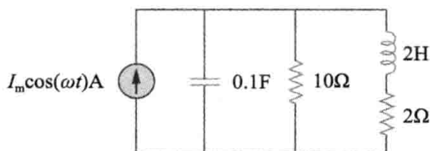


图 15-9 例 15-4 的电路图

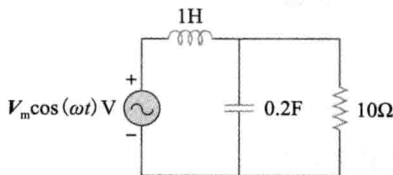


图 15-10 例 15-4 的电路图

15.5 计算机分析

15.5.1 PSipce

在获得电路频率响应时，PSipce 是辅助现代电路设计者的一项有用工具。使用 C.5 节介绍的 AC Sweep 可以得到频率响应。这里需要在 AC Sweep 的对话框中设定 Total Pts、Start Freq、End Freq，以及扫描类型（sweep type）。Total Pts 为频率扫描中的点数，Start Freq 和 End Freq 分别为起始频率和终止频率，单位为赫兹。想要知道 Start Freq 和 End Freq 该选择什么频率，就必须先画出频率响应的粗略草图，根据画出的草图找出感兴趣的频率范围。对于复杂电路，该做法不太可行，不过可以使用反复试验（trial-and-error）的方法。

共有三种扫描类型：

线性： 频率从 Start Freq 到 End Freq 线性变化，其等间隔点（或响应）为 Total。

倍频程： 从 Start Freq 到 End Freq 对频率进行倍频程对数扫描，扫描点数为每倍频程

Total。如果较高频率与较低频率的比值为 2∶1，则两频率相距为一倍频程，例如，100～200Hz、200～400Hz、400～800Hz 等。

十倍频程：从 Start Freq 到 End Freq 对频率进行十倍频程对数扫描，扫描点数为每十倍频程 Total。十倍频程是指因子为 10，例如，1～10、10～100Hz、100～1kHz 等。

根据之前的描述，当将电路中所有的独立源由 Start Freq 到 End Freq 改变（或者扫描）时，PSpice 就对电路进行正弦稳态分析。

Probe 窗口用于显示产生的图形输出。输出数据类型可以通过在 Trace Command Box 中给 V 或者 I 添加以下任一后缀来指定：

M 正弦曲线的幅度

P 正弦曲线的相位

dB 正弦曲线的幅度，单位为分贝，例如 20 lg（幅度）。

例 15-5 使用 PSpice 确定如图 15-11 所示的并联谐振电路的频率响应。

解：电路原理图如图 15-12 所示。使用交流电流电源 IAC 作为输入，其幅度为 1mA，相位为 0°。所求频率响应为 15-11 所示电路的输出电压 v_o。画完电路且保存为exam155.dsn 后，选择 PSpice/New Simulation Profile，弹出 New Simulation 对话框。输入“exam155”作为文件名且单击 Create，则会弹出 Simulation Setting 对话框。在 Simulation Setting 对话框中，在 Analysis Type 选项中选择 AC Sweep/Noise；在 AC Sweep Type 选项中选择 Linear。然后将 Start Freq 设为 10k、将 End Freq 设为 80k，将 Total Points 设为 10k。

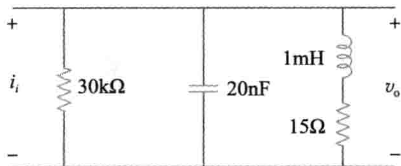


图 15-11　例 15-5 的电路图

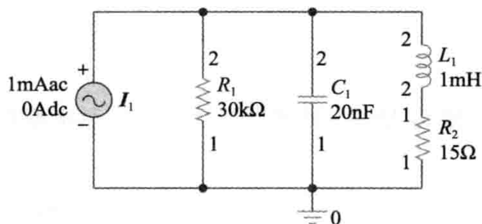


图 15-12　例 15-5 的 PSpice 电路原理图

设定完毕之后，就可以执行频率范围为 10kHz<f<80kHz 的 AC Sweep。然后选择 PSpice/Run 仿真电路。Probe 窗口将会自动生成，选择 Trace/Add Trace 及 V(C_1∶2)。（若在电路原理图中的节点 2 放置一个电压标记，作用是相同的）仿真结果如图 15-13 所示。从图中可以看出，谐振频率约为 36kHz。

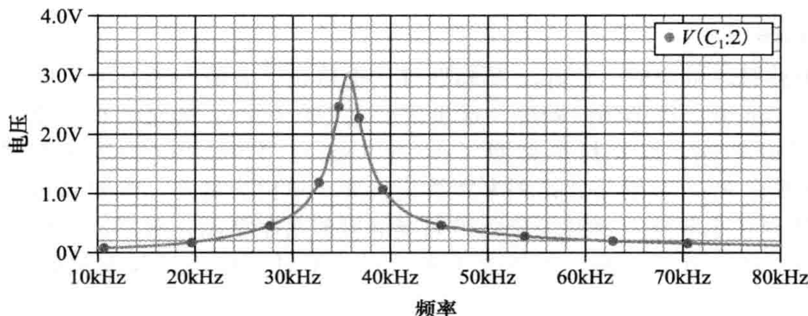


图 15-13　例 15-5 所示电路的频率响应

练习 15-5 试利用 PSpice 确定如图 15-14 所示的电路的频率响应（i_o）。

答案： 参见图 15-15 所示曲线

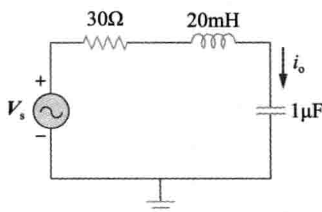


图 15-14 练习 15-5 和例 15-7 的电路图

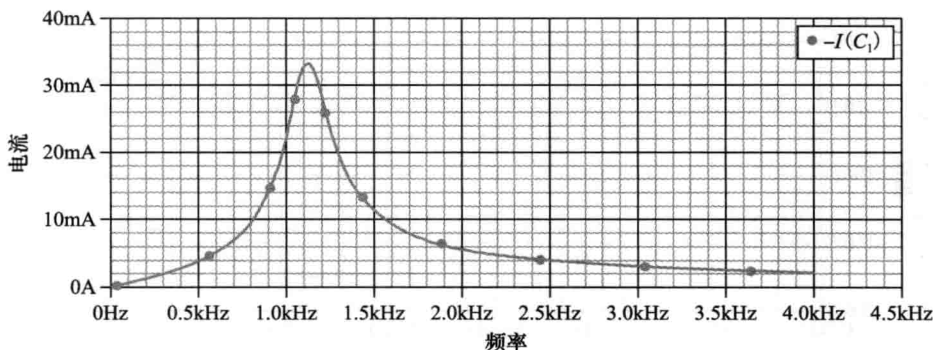


图 15-15 图 15-14 所示电路的频率响应

例 15-6 试利用 PSpice 确定如图 15-16 所示电路的频率响应。

解： 前面的例题和练习分别分析了并联电路和串联电路。而图 15-16 所示电路既不是并联也不是串联。设输入电压 v_s 为一正弦信号，幅度为 1V，相位为 0°。电路的 PSpice 原理图如图 15-17。在电容器的输出电压插入电压标记。

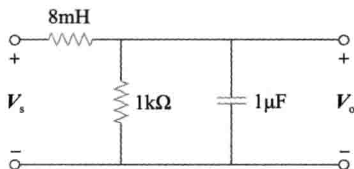


图 15-16 例 15-6 的电路图

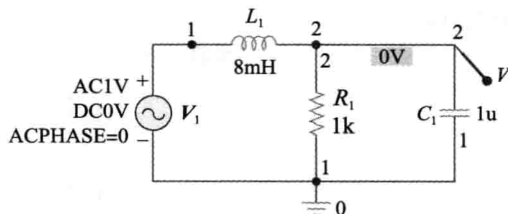
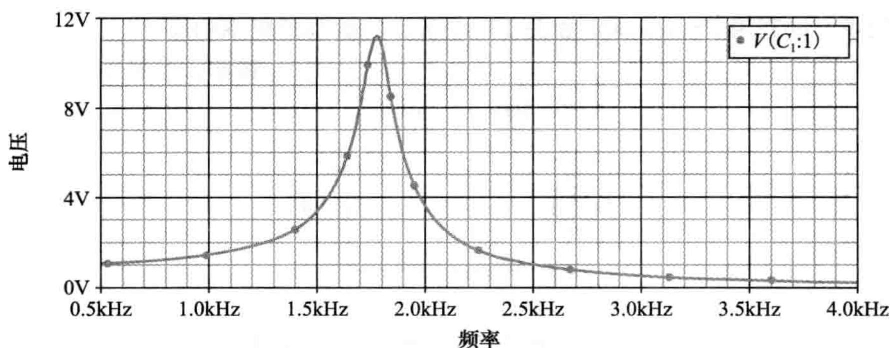


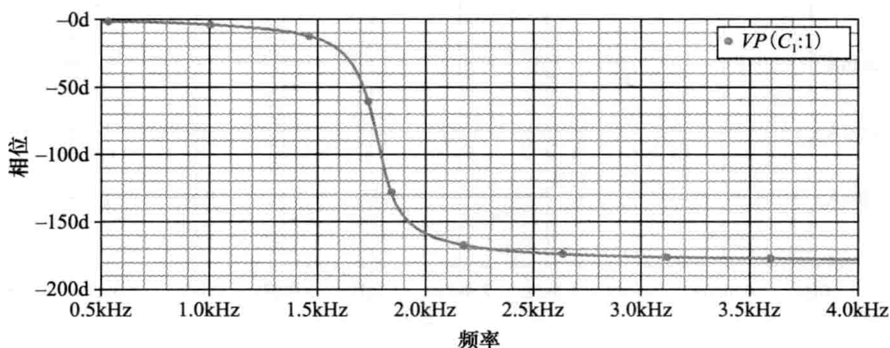
图 15-17 图 15-16 所示电路的 PSpice 电路原理图

画完电路且保存为 exam156. dsn 后，选择 PSpice/New Simulation Profile，弹出 New Simulation 对话框。输入 exam156 作为文件名且单击 Create，则会弹出 Simulation Setting 对话框。在 Simulation Setting 对话框中的 Analysis Type 选项中选择 AC Sweep/Noise；AC Sweep Type 选项选择 Linear。然后将起始频率 Start Freq 设为 500、将终止频率 End Freq 设为 4k，将 Points/Decade 设为 10。

设定完毕之后，就可以执行频率范围为 $500\text{Hz} < f < 4\text{kHz}$ 的 AC Sweep。然后选择 PSpice/Run 仿真电路。Probe 窗口将会自动生成，选择 Trace/Add Trace 及 V(C1：2) 或 VM(C1：2)。仿真结果如图 15-18a 所示。从图中可以看出，谐振频率约为 1. 8kHz。选择 Trace/Add Trace 且在 Trace Command 框中输入 VP(C1：1) 即可得到相位频率响应，如图 15-18b 所示。



a）幅度曲线



b）相位曲线

图 15-18 例 15-6 的频率响应

练习 15-6 试利用 PSpice 确定如图15-19所示的电路的频率响应。使用线性频率扫描，频率范围为 $1<f<10000$Hz，扫描点数为 1001。

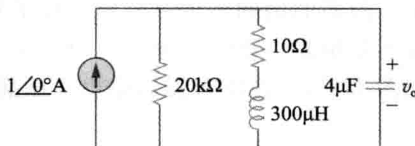


图 15-19 练习 15-6 的电路图

答案： 参见图 15-19

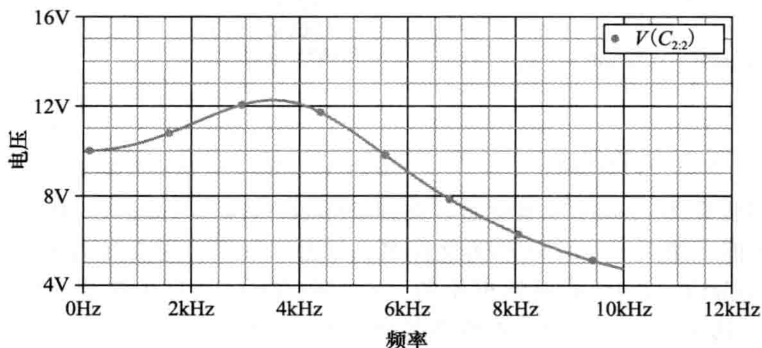


图 15-20 练习 15-6 所示电路的频率响应

15.5.2 Multisim

虽然 Multisim 不像 PSpice 一样提供单频率分析，但可以用于执行 D.4 节（附录 D）中讨论的 AC sweep，及求解电路的频率响应。读者在学习本节之前最好先阅读 D.4 节。

例 15-7 试利用 Multisim 确定如图 15-14 所示串联谐振电路的频率响应。

解： 首先画出如图 15-21 所示的电路。双击电压源符号将会弹出 AC Voltage 对话框，在对话框中，将交流分析幅度 AC Analysis Amplitude 设置为 1，交流分析相位 AC Analysis Phase 设置为 0，频率设置为 1kHz（频率的设置不影响分析结果）。

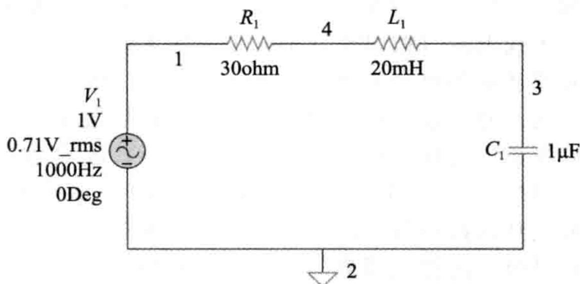


图 15-21 例 15-7 电路 Multisim 仿真图

Multisim 将会自动给节点编号。如果没有显示节点编号，可以选择 Options/sheet Properties，在 Net Names 中选择“Show all”，将会显示出电路中所有的节点编号。本例中响应从节点 3 获取，首先要设定仿真的频率范围，选择 Simulate/Analyses/AC Analysis，然后在 AC Analysis 对话框中将起始频率 FSTART 设为 1Hz，终止频率 FSTOP 设为 8kHz，扫描类型 Sweep type 设为十倍频程（Decade），Number of points per decade 设为 100，Vertical scale 设为线性（Linear）。（由图 15-15 可知本例中的频率范围，如果预先不知道频率范围，则需要通过反复试验来获取）在输出变量中，将 V（3）由左边的列表移动到右边的列表，就可以显示出节点 3 的电压。最后选择 Simulate，就得到如图 15-22 所示的频率响应（幅频和相频）。

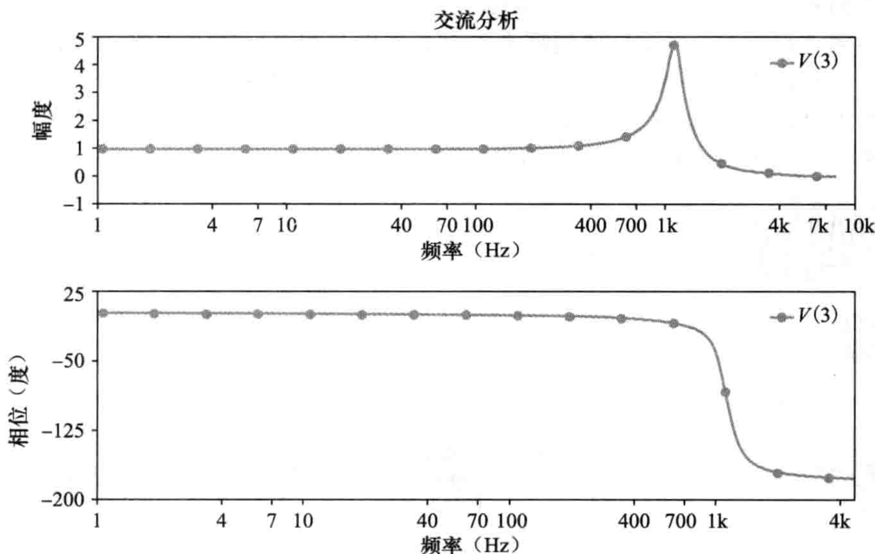


图 15-22 图 15-21 所示电路的频率响应 ◀

练习 15-7 试利用 Multisim 确定如图 15-11 所示的电路的频率响应。

答案： 参见图 15-13

15.6 应用实例

谐振电路的应用十分广泛，尤其是在电子、电力系统以及通信系统中的应用更为突出。在本节中，我们将分析一个谐振电路的实际应用。应用的重点不是理解设备如何工作的细节，而是理解本章中所分析的电路在实际设备中的应用。

在收音机和电视接收机中，通常使用串联和并联谐振电路来调台以及从射频载波中提取音频信号。例如，考虑如图 15-23 所示的调幅（AM）收音机接收机的框图。入射的调幅无线电波（数以千计不同频率的无线电波来自不同的广播电台）由天线接收。谐振电路需要从众多电台中选出一个入射的无线电波（图 15-23 给出了 RF 放大器部分）。由于所选中的信号一般都是非常微弱的，所以需要多级放大，以便产生能够听得见的音频信号。所以要使用射频（radio-frequency，RF）放大器来放大选中的广播信号，中频（intermediate-frequency，IF）放大器来放大由 RF 信号所决定的内部产生的信号，而音频放大器则放大到达扬声器之前音频信号。这种对信号的三级处理和放大要比用一个放大器在全部信号带范围内提供同样的放大量容易得多。

图 15-23 给出的 AM 收音机类型为超外差式收音机（superheterodyne receiver）。在早期的收音机中，每级放大器都必须调谐到输入信号的频率。这样，每级必须有多个调谐电路来覆盖全部的 AM 波段（530～1600kHz）。为了避免出现含有多个谐振电路，现代收音机都要采用混频器（frequency mixer）或者外差电路（heterodyne circuit），以产生同样的 IF 信号（455kHz）且保留加载在输入信号上的音频信号。要产生固定的中频信号，需要将两个分离变量电容的旋转器机械地相互耦合在一起，以便于通过单次控制使它们同时旋转，这称为同轴调谐（ganged tuning）。本地振荡器（local oscillator）与 RF 放大器联动在一起产生 RF 信号，该信号又与入射的无线电波结合在一起来通过混频器产生输出信号，输出信号中同时包含这两个信号的和频与差频。例如，如果谐振电路要调谐到接收 800kHz 的输入信号，则本地振荡器必须产生 1255kHz 的信号，使得在混频器的输出端出现两个频率的和频（1255＋800＝2055kHz）和差频（1255－800＝455kHz）。不过，实际中只使用差频（455kHz）。不管调到哪个电台，这个差频是所有的中级放大器各级的唯一谐振频率。在检波器的那一级，选出原始的音频信号（也包括语言信息）。检波器的功能主要是去除 IF 信号，而保留音频信号。音频信号被放大后驱动扬声器，扬声器相当于一个能力转换器，将电信号转换为声音信号。

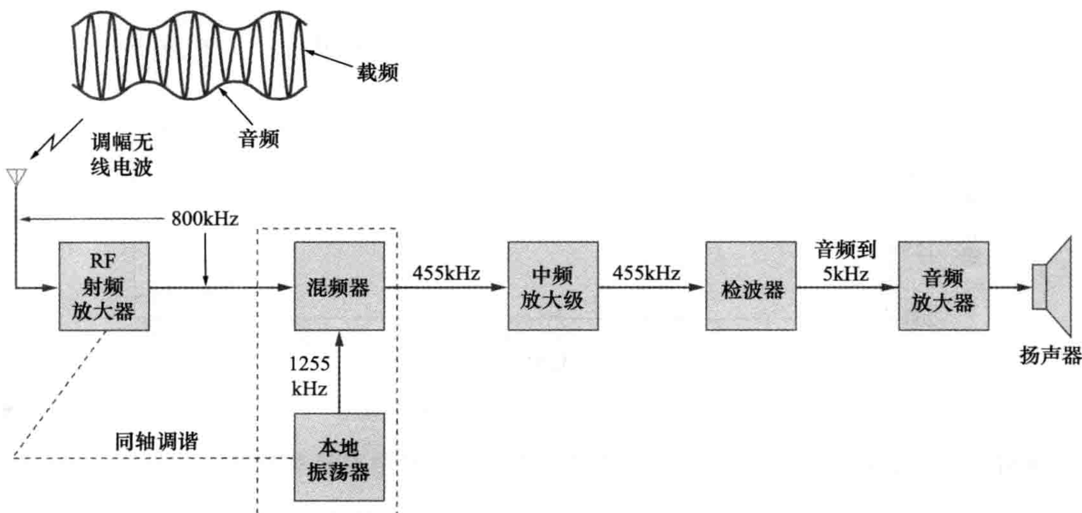


图 15-23 超外差式 AM 收音机的简化框图

这里讨论的例子是一个 AM 收音机的调谐电路，该电路也可用于调频（FM）收音机中，只是具有更宽的工作频带。

例 15-8 图 15-24 中画出了一台 AM 收音机的谐振电路或者调谐电路。给定 $L=1\mu H$，要使谐振频率可由 AM 频段的一端调整到另一端，试计算 C 值的取值范围？

解： AM 广播段的频率范围是 530kHz～1600kHz，需要计算该频段的低端和高端。由于图 15-24 的调谐电路是并联的，因此可以用 15.4 节的公式。由式（15-24）知

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

即

$$C = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 L}$$

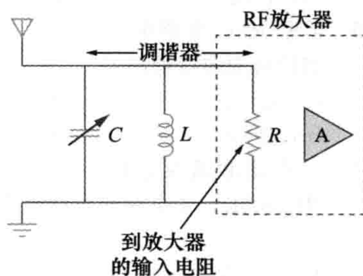


图 15-24 例 15-8 的调谐电路

对于 AM 频段的高端，$f_0=1600$kHz，与其相应的 C 值是：

$$C_1 = \frac{1}{4\pi^2 \times 1600^2 \times 10^6 \times 10^{-6}} = 9.9(\text{nF})$$

对于 AM 频段的低端，$f_0=530$kHz，与其相应的 C 值是：

$$C_2 = \frac{1}{4\pi^2 \times 530^2 \times 10^6 \times 10^{-6}} = 90.18(\text{nF})$$

所以，电容 C 必须是由 9.9nF 到 90.18nF 的可调（同轴）电容器。◀

练习 15-8 一个调频收音机，接收波的频率范围是从 88MHz 到 108MHz，其调谐电路是一个并联的 RLC 电路，其电感为一个 $4\mu H$ 的线圈，如果本地振荡器频率必须保持在载波频率之上，为 10.7MHz，计算要覆盖全部频段需要使用的可变电容器的容量范围。

答案： 0.543～0.8177pF

15.7 本章小结

1）谐振频率是电路中阻抗或者导纳的虚部为零时的频率。对于串联和并联 RLC 电路来说有

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2\pi f_0$$

2）半功率频率（ω_1、ω_2）是指功率消耗为在谐振频率时消耗功率的一半时的频率。谐振频率为半功率频率的几何平均值，即

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$$

3）带宽是两个半功率频率之间的频带。

$$\text{BW} = \omega_2 - \omega_1$$

4）品质因素用于衡量谐振峰值的尖锐程度，为谐振角频率和带宽的比值。

$$Q = \frac{\omega_0}{\text{BW}}$$

5）PSpice 和 Multisim 可以用于获取电路的频率响应，不过要在 AC Sweep 中指定响应的频率范围和频率范围内期望扫描的点数。

6）收音机接收机可以看作谐振电路的一个实际应用。它从天线接收到的所有广播信号中，利用谐振电路来对某个频率调谐。

复习题

1 40pF 的电容和 $90\mu H$ 的电感串联的电路谐振频率为：

(a) 36MHz (b) 24.5MHz

(c) 16.67MHz (d) 2.65MHz

2 12nF 的电容与多大的电感才能够在频率为 5KHz 时发生谐振？

(a) 2652H (b) 11.844H

(c) 3.333H (d) 84.43mH

3 串联 RLC 电路中的电感端电压下降为谐振时电压的 0.707 时的频率称为：

(a) 谐振频率 (b) 截止频率

(c) 半功率频率 (d) 带宽

4 两个半功率频率之间的差值称为：

(a) 品质因素 (b) 谐振频率

(c) 带宽 (d) 截止频率

5 RLC 串联电路中，品质因素正比于 R。

(a) 正确 (b) 错误

6 串联 RLC 电路中，以下哪个品质因素会使谐振时的曲线最陡峭？

(a) $Q=20$ (b) $Q=12$

(c) $Q=8$ (d) $Q=4$

7 一个串联谐振电路，其中电阻为 40Ω，X_L 为 2800Ω，该电路的品质因素是多少？

(a) 70

(b) 1.75

(c) 0.5714

8 并联 RLC 电路中，带宽 BW 正比于 R。

(a) 正确 (b) 错误

9 并联谐振电路工作在自身谐振频率时，相等的两个参数为：

(a) L 和 C (b) R 和 C

(c) R 和 L (d) X_C 和 X_L

10 谐振电路在其品质因素大于多少时被称为高 Q 电路：

(a) 1 (b) 10

(c) 100 (d) 1000

答案：1 (d)，2 (d)，3 (c)，4 (c)，5 (b)，6 (a)，7 (a)，8 (b)，9 (d)，10 (b)

习题

15.2 和 15.3 节

1 某串联 RLC 电路，$R=2\text{k}\Omega$，$L=40\text{mH}$，和 $C=1\mu\text{F}$。计算电路分别在谐振频率、四分之一谐振频率、二分之一谐振频率、两倍谐振频率以及四倍谐振频率时的阻抗。

2 某串联 RLC 电路，其中 $R=0.1\text{k}\Omega$，$L=10\text{mH}$，和 $C=5\text{nF}$。求：(a) 谐振频率，(b) 带宽，(c) 品质因素。

3 设计一个串联 RLC 电路，使其在谐振频率 $\omega_0=50\text{rad/s}$ 时阻抗为 10Ω，且品质因数为 80。求其带宽。

4 设计一个串联 RLC 电路，使其 $\text{BW}=20\text{rad/s}$ 且 $\omega_0=1000\text{rad/s}$。求该电路的 Q 值。

5 如图 15-25 所示电路，求 $v(t)$ 与 $i(t)$ 同相时的频率 ω_0。

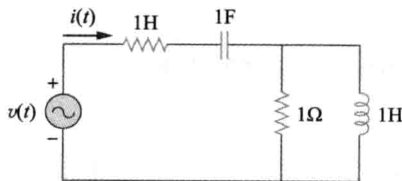


图 15-25 习题 5 的电路图

6 对如图 15-26 所示串联 RLC 电路，求：(a) 谐振时 X_C 的值；(b) 谐振时电流 $i(t)$ 的幅度；(c) 品质因数；(d) 带宽。

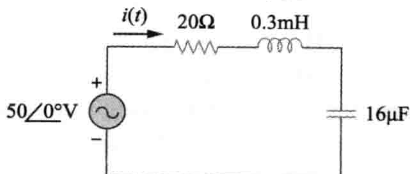


图 15-26 习题 6 的电路图

7 某串联谐振电路的谐振频率为 8kHz，且其品质因数为 20。(a) 求带宽。(b) 计算半功率频率。(c) 若 $R=10\Omega$，确定 X_C 的值。

8 某电路中包含一个电感值为 10mH 的线圈和一个 20Ω 的电阻，该电路与一个电容和 120Vrms 的发电机相串联。求：(a) 使该电路在 15kHz 发生谐振的电容值；(b) 谐振时流过线圈的电流；(c) 该电路的 Q 值。

9 某串联 RLC 电路，$R=4\text{k}\Omega$，且在 $f=4\text{MHz}$ 时，$X_L=40\text{k}\Omega$，$X_C=30\text{k}\Omega$。求其带宽和品质因数。

10 某频率为 60Hz 且 $V=12\angle 0^\circ$ V 的电压源添加到串联 RLC 电路中。令 $R=10\Omega$，$X_L=160\Omega$。(a) 确定产生串联谐振时的 C 值。(b) 求谐振时的最大电流。(c) 计算谐振时电感两端的电压。

11 要与 2.4mH 的线圈在 4.5kHz 产生串联谐振需要多大的电容值？

12 一个串联电路带宽为 6M rad/s，且在谐振频率 4M rad/s 时阻抗为 20Ω。计算：(a) 电感 L；(b) 电容 C；(c) 品质因数 Q；(d) 上下截止频率。

13 某 10mH 的电感，其内阻为 5Ω。该电感与一个电容和一个电压源，以及 15Ω 的戴维南等效电阻相串联。试求：(a) 在 2krad/s 产生谐振时的电容值；(b) 该电路的品质因数；(c) 该电路的带宽。

15.4 节

14 设计一个并联谐振电路使得 $\omega_0=10\text{rad/s}$ 且 $Q=20$。试计算电路的带宽。选 $R=10\Omega$。

15 在 10MHz，某并联电路 $R=5.6\text{k}\Omega$，$X_L=40\text{k}\Omega$ 和 $X_C=40\text{k}\Omega$。试计算该电路的

带宽。

16 一个并联谐振电路在其谐振频率 6×10^6 rad/s 的品质因数为 120。试计算带宽和半功率频率。

17 并联 RLC 电路谐振频率为 5.6MHz，品质因数为 80，电阻支路为 40kΩ。试确定另外两条支路的 L 和 C 的值。

18 一个并联 RLC 电路，$R=5\text{k}\Omega$，$L=8\text{mH}$ 且 $C=60\mu\text{F}$。试确定：(a) 谐振频率；(b) 带宽；(c) 品质因数。

19 并联 RLC 谐振电路的中心带宽导纳为 25mS，品质因数为 80，谐振频率为 200krad/s。计算 R、L 和 C 的值。试求带宽和半功率频率。

20 若习题 1 电路中元件为并联时，重做该题。

21 如图 15-27 所示"储能"电路，试求谐振频率。

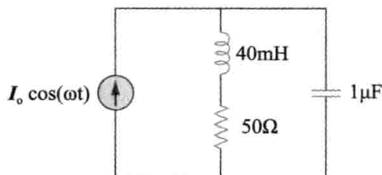


图 15-27 习题 21 和 31 的电路图

22 电阻为 2kΩ，半功率频率为 86kHz 和 90kHz 的并联谐振电路。试确定：(a) 电容；(b) 电感；(c) 谐振频率；(d) 带宽和 (e) 品质因数。

23 如图 15-28 所示电路，试求谐振频率 ω_0，品质因数 Q 和带宽 BW。

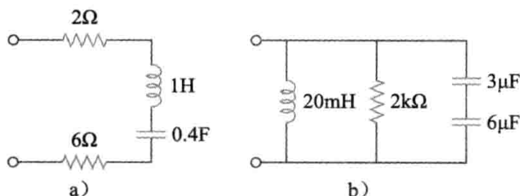


图 15-28 习题 23 的电路图

24 对于如图 15-29 所示的并联 RLC 电路，试确定：(a) ω_0；(b) ω_0 时的总阻抗；(c) Q；(d) 带宽。

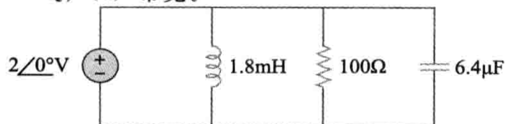


图 15-29 习题 24 的电路图

25 并联 RLC 电路在 2MHz 发生谐振，且 $Q=80$，$R=300\text{k}\Omega$。试计算 L 和 C 的值。

26 并联 RLC 电路的电阻为 2kΩ，且在 300kHz 时发生谐振。求可以获得 5kHz 带宽时的 Q、L 和 C 的值。

27 与 5pF 的电容器在 200Hz 产生并联谐振需要多大的电感？

28 参考图 15-30 所示的电路。令 $v=10\sin(\omega t)$。(a) 求谐振频率。(b) 计算谐振时电压源提供的功率。(c) 求取品质因数和带宽。

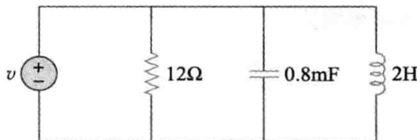


图 15-30 习题 28 的电路图

15.5 节

29 试用 PSpice 求取如图 15-31 所示电路的频率响应。其频率范围可通过反复试验确定。

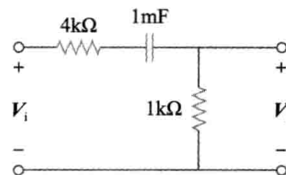


图 15-31 习题 29 和 33 的电路图

30 试利用 PSpice 求取如图 15-32 所示电路的频率响应（V_o 的幅度和相位）。从 1 到 1000Hz 使用线性频率扫描。

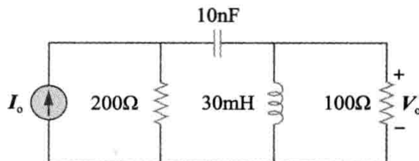


图 15-32 习题 30 的电路图

31 试利用 PSpice 求解习题 21。

32 试利用 PSpice 来确定如图 15-33 所示电路的谐振频率。

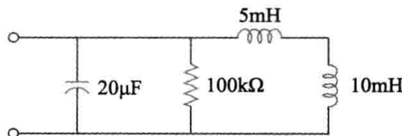


图 15-33 习题 32 的电路图

33 试利用 Multisim 重新求解习题 29。

34 试利用 Multisim 来获取如图 15-34 所示电路的频率响应。令 10Hz<f<10kHz。

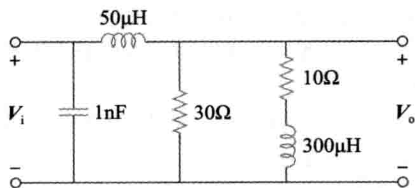


图 15-34 习题 34 的电路图

35 试利用 Multisim 确定如图 15-35 所示电路的频率响应。

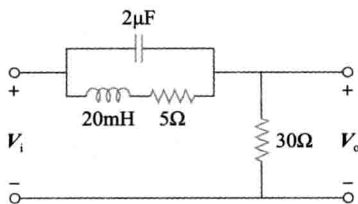


图 15-35 习题 35 的电路图

15.6 节

36 某无线电广播的谐振电路由一个 120pF 的电容和一个 240μH 电感并联组成。如果电感的内阻为 400Ω，则电路的谐振频率为多少？如果电感的内阻下降到 40Ω，那么谐振频率又是多少？

37 某串联调谐天线电路包含一个可变电容（40 到 360pF）和一个 240μH 的天线线圈，线圈直流内阻为 12Ω。(a) 求收音机可以调谐的无线信号的频率范围。(b) 确定频率范围中起始频率时的 Q 值。

38 某电子测试电路产生的谐振曲线的半功率频率为 432 和 454Hz。如果 Q=20，则电路的谐振频率是多少？

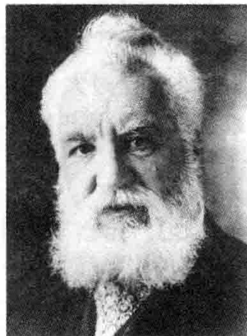
39 在某电子设备中，用到了串联电路，其中电阻为 100Ω，频率为 2MHz 时容抗为 5kΩ、感抗为 300Ω。试求其谐振频率和电路的带宽。

第16章 频率响应和波特图

成就没有颜色。

——蕾昂泰茵·普莱斯

历史人物



亚历山大·格拉汉姆·贝尔

(© Ingram Publishing)

亚历山大·格拉汉姆·贝尔（Alexander Graham Bell，1847—1922)，苏格兰裔美国科学家，发明了电话机。

贝尔出生在苏格兰爱丁堡市，他的父亲是著名语言教师亚历山大·梅尔维尔·贝尔（Alexander Melville Bell)。年轻的亚历山大从爱丁堡大学和伦敦大学毕业后也成为一名语言教师。1866年，他对语音电传输产生了浓厚的兴趣。在其兄长因肺结核病去世之后，他的父亲决定移居加拿大。此后亚历山大来到波士顿的一所聋哑学校工作，在那里他遇到了托马斯·沃森（Thomas A. Watson)，托马斯之后成为他电磁发射实验研究的助理。1876年3月10日，亚历山大发送了著名的第一条电话信息："Watson，come here，I want you"。本章介绍的一种对数单位——贝尔，就是为了纪念他而以他的名字命名的。



亨德里克·波特

(AIP Emilio Segre Visual Archives，Physics Today Collection)

亨德里克·波特（Hendrik W. Bode，1905—1982)，美国工程师，他发明了本章将进行讨论的波特图。

波特出生在美国威斯康星州麦迪逊，从俄亥俄州立大学获得本科和硕士学位。他任职于贝尔电话实验室，并在这里开始从事电子滤波器和均衡器的设计工作。在贝尔实验室工作期间，他获得了哥伦比亚大学的博士学位。波特在电子滤波器和均衡器方面的研究成果发表于他的著作《网络分析与反馈放大器设计》一书中，此书被认为是这个领域内的经典书籍。61岁时波特从贝尔电话实验室退休，被推选为哈佛大学系统工程专业的 Gordon Mckay 教授，此后波特任教并且指导研究生开展研究。波特是一系列科学和工程协会的成员和特别会员。

16.1 引言

在许多应用领域尤其是通信与控制系统中，电路的正弦稳态频率响应起到非常重要的作用。其中一种特殊的应用就是电子滤波器，滤波器可以抑制或消除不需要的频率信号，而允许需要的频率信号通过。在无线电收音机、电视机与移动电话系统中滤波器用于将不同的广播频率相互分离。

本章首先学习如何用分贝表示功率增益和电压增益，之后讨论传输函数和用来描述频率响应的工业标注方法——波特图。接着再讨论几种不同类型的滤波器——低通、高通、带通和带阻滤波器。最后一节介绍两种滤波器的应用实例。

16.2 分贝表示法

确定频率响应的一种更为系统的方法是利用波特图。在学习波特图的绘制方法之前，首先明确两个重要问题：在表示增益时对数与分贝的使用方法。由于绘制频率响应时对数可以方便地显示大跨度的频率范围，因此掌握对数表示是非常必要的。

由于波特图是基于对数坐标的，所以牢记如下对数性质是非常重要的：

1） $\log P_1P_2=\log P_1+\log P_2$ (16-1)

2） $\log P_1/P_2=\log P_1-\log P_2$ (16-2)

3） $\log P^n=n\log P$ (16-3)

4） $\log 1=0$ (16-4)

式（16-1）到式（16-4）适用于任何情况下的对数运算。通常表示电压或功率增益的比值不是过小就是过大，而不利于显示。基于以上原因，在通信系统中，增益以贝尔（bel）[⊖]为单位来度量。从历史上看，贝尔是用来度量两个功率之比的，即功率增益 G_p：

$$G_p=\text{贝尔数}=\lg\frac{P_2}{P_1} \tag{16-5}$$

分贝（dB）相当于1/10贝尔，因此有：

$$\boxed{G_p(\text{dB})=\text{分贝数}=10\lg\frac{P_2}{P_1}} \tag{16-6}$$

当 $P_1=P_2$时，功率没有变化，增益为0dB，当 $P_2=2P_1$ 时，增益为

$$G_p(\text{dB})=10\lg 2=3.01(\text{dB}) \tag{16-7}$$

当 $P_2=0.5P_1$ 时，增益为：

$$G_p(\text{dB})=10\lg 0.5=-3.01(\text{dB}) \tag{16-8}$$

式（16-7）与式（16-8）也说明了对数被广泛使用的另一个原因，即：一个变量倒数的对数就等于该变量对数的相反数。正分贝值表示增益，而负分贝值表示衰减或损耗。

另外，增益 G 还可以用电压比或电流比来表达。为了说明这个问题，考虑如图16-1所示的网络，如果 P_1 为输入功率，P_2 为输出（负载）功率，R_1 为输入电阻，R_2 为负载电阻，那么有

$$P_1=\frac{V_1^2}{R_1} \tag{16-9}$$

和

$$P_2=\frac{V_2^2}{R_2} \tag{16-10}$$

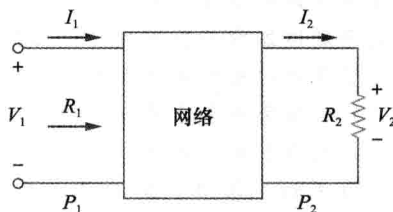


图16-1 一个四端网络的电压-电流关系

于是式（16-6）变为：

$$G_p(\text{dB})=10\lg\frac{P_2}{P_1}=10\lg\frac{V_2^2/R_2}{V_1^2/R_1}=20\lg\frac{V_2}{V_1}-10\lg\frac{R_2}{R_1} \tag{16-11}$$

当 $R_2=R_1$ 时（虽然不满足实际情况，但通常如此设定），在比较两个电压电平时用分贝表示电压增益，则式（16-11）变为

$$\boxed{G_v(\text{dB})=20\lg\frac{V_2}{V_1}} \tag{16-12}$$

表16-1具体给出了不同电压增益的dB值。

⊖ 历史摘记：单位贝尔是以电话发明人亚历山大·格雷厄姆·贝尔（Alexander Graham Bell）的名字命名的。

表 16-1 不同电压增益的 dB 值

增益 (V_o/V_1)	dB=20 log (V_o/V_1)	增益 (V_o/V_1)	dB=20 log (V_o/V_1)
1	0	100	40
2	6	1000	60
10	20	10000	80
20	26	100000	100

另一方面，对于电流而言，如果 $P_1=I_1^2R_1$，$P_2=I_2^2R_2$，则当 $R_1=R_2$ 时用 dB 表示的电流增益为：

$$G_I(\mathrm{dB}) = 20\ \lg\frac{I_2}{I_1} \tag{16-13}$$

由式（16-6）、式（16-12）与式（16-13）可知，如下两点非常重要：

1）由于功率与电压或电流之间呈平方关系（$P=V^2/R=I^2R$），所以 10 lg 用于表示功率增益，而 20 lg 用于表示电压或电流增益。

2）dB 值是同一类型的一个变量与另一个变量之比的对数度量。

分贝度量还可以用来表示功率的绝对量与其他基准量的比值。dBm 就是功率相比于 1mW 的分贝表示，即

$$\mathrm{dBm} = 10\ \lg\left(\frac{\text{实际功率值(单位为瓦特)}}{1\mathrm{mW}}\right) \tag{16-14}$$

如果实际功率为 P，那么有，

$$\mathrm{dBm} = 10\ \lg\left(\frac{P}{1\mathrm{mW}}\right) \tag{16-15a}$$

或者

$$P = (1\mathrm{mW}) \times 10^{\mathrm{dBm}/10} \tag{16-15b}$$

dB 的后缀 m 表示 1 毫瓦是 0dB 的基准值。dBm（或 dBmW）经常用在无线电广播、微波和光纤网络，作为绝对功率的一种简单度量方式。表 16-2 中概括了一些 dBm 的应用实例。

表 16-2 典型的 dBm 应用实例

dBm 值	功率	应用
80dBm	100000W	调频广播电台发射功率
60dBm	1000W	微波炉内的射频功率
27dBm	500mW	手机发射功率
26dBm	400mW	1800MHz 手机的最大输出功率
20dBm	100mW	100 米范围蓝牙 class 1 的输出功率
−70dBm	0.0000001mW	网络内无线信号平均功率的典型值
−127.5dBm	0.00000000000018mW	GPS 卫星的典型接收信号功率

例 16-1 试计算下列对数表达式的值。

(a) $\lg(0.6\times400)$

(b) $\lg\dfrac{8\times10^3}{10^{-2}}$

(c) $\lg200^3$

解：(a) $\lg(0.6\times400)=\lg0.6+\lg400=-0.2218+2.602=2.3802$

另一种计算方法就是利用 TI-89 Titanium 计算器，首先选择对数功能，不断按 CATALOG 键直到出现 log，然后按 ENTER 键。输入数字，

```
Log (0.6*400)
```

然后按 [◆] [ENTER]

计算结果为 2.3802。

(b) $\lg\frac{8\times10^3}{10^{-2}}=\lg8+\lg10^3-\lg10^{-2}=0.903+3-(-2)=5.903$

或利用 TI-89 Titanium 计算器进行计算。

```
log (8*10^3/10^-2)=5.903
```

(c) $\lg200^3=3\ \lg200=3(2.301)=6.903$

或利用 TI-89 Titanium 计算器进行计算。

```
log(200^3)=6.903
```

◀

练习 16-1 试计算下列对数表达式的值。

(a) $\lg(0.001)(56)$

(b) $\lg(0.62)^4$

(c) $\lg\frac{58000}{48}$

答案：(a) −1.2518 (b) −0.8304 (c) 3.082

例 16-2 试计算下列情况下的系统增益（单位为 dB）。

(a) $P_{in}=2\text{mW}$，$P_{out}=40\text{mW}$

(b) $P_{in}=6\mu\text{W}$，$P_{out}=1\mu\text{W}$

(c) $V_{in}=0.4\text{mV}$，$V_{out}=2.1\text{mV}$

(d) $V_{in}=1\text{V}$，$V_{out}=0.8\text{V}$

解：(a) $G_p(\text{dB})=10\ \lg\frac{P_{out}}{P_{in}}=10\ \lg\frac{40\text{mW}}{2\text{mW}}=13.01\text{dB}$

(b) $G_p(\text{dB})=10\ \lg\frac{P_{out}}{P_{in}}=10\ \lg\frac{1\mu\text{W}}{6\mu\text{W}}=-7.782\text{dB}$

(c) $G_v(\text{dB})=20\ \lg\frac{V_{out}}{V_{in}}=20\ \lg\frac{2.1\text{mV}}{0.4\text{mV}}=14.403\text{dB}$

(d) $G_v(\text{dB})=20\ \lg\frac{V_{out}}{V_{in}}=20\ \lg\frac{0.8\text{V}}{1\text{V}}=-1.9382\text{dB}$ ◀

练习 16-2

(a) 当系统输入功率为 1mW，输出功率为 60mW，试计算系统增益（单位为 dB)。

(b) 如果供电电压为 10mV 而输出电压为 2.4V，试计算电压增益（单位为 dB)。

答案：(a) 17.781dB；(b) 47.604dB

例 16-3 试将下列以 dB 为单位的功率转换为比值。

(a) 42.3dB (b) −26.5dB

解：(a) 如果

$$42.3\text{dB} = 10\ \lg\frac{P_2}{P_1}$$

那么则有，

$$42.3/10 = 4.23 = \lg\frac{P_2}{P_1} \quad\Rightarrow\quad \frac{P_2}{P_1} = 10^{4.23} = 16982.44$$

(b) 同理，

$$-26.5/10 =-2.65 = \lg\frac{P_2}{P_1} \quad\Rightarrow\quad \frac{P_2}{P_1} = 10^{-2.65} = 0.00224$$ ◀

练习 16-3 依据下列以 dB 为单位的功率，试计算相应的比值。

(a) 16.5dB (b) −47.6dB

答案：(a) 44.67 (b) 1.737×10^{-5}

例 16-4 网络的电压增益为 25dB。试计算当供电输入电压为 2mV 时的输出电压。

解： 首先将以 dB 为单位的增益转化为输入与输出电压之比，即

$$25\text{dB} = 20\lg\frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}} \quad \Rightarrow \quad \lg\frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}} = 25/20 = 1.25$$

因此，

$$\frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}} = 10^{1.25} = 17.78$$

$$V_{\text{out}} = 17.78V_{\text{in}} = 17.78(2\text{mV}) = 35.56(\text{mV})$$ ◀

练习 16-4 若网络的电压增益为 32dB。试计算当输出电压为 4.6V 时的供电输入电压。 **答案：** 0.1155V

例 16-5 (a) 将下列功率值转化为相对于 1mW 的分贝值：1nW，0.5W 和 12W。

(b) 试计算下列 dBm 值对应的功率（以 mW 为单位）：−13，5 和 30dBm。

解： (a) 可以采用两种方法来计算。

■ **方法 1** 利用式 (16-15a)，对于 1nW 有，

$$1\text{nW} = 10^{-9}\text{W} = 10^{-6}(\text{mW})$$

$$\text{dBm} = 10\lg\left(\frac{10^{-6}\text{mW}}{1\text{mW}}\right) = 10\times(-6) = -60(\text{dBm})$$

对于 0.5W 有，

$$0.5\text{W} = 500\text{mW}$$

$$\text{dBm} = 10\lg\left(\frac{500\text{mW}}{1\text{mW}}\right) = 10\times 2.7 = 27(\text{dBm})$$

对于 12W 有，

$$12\text{W} = 12000\text{mW}$$

$$\text{dBm} = 10\lg\left(\frac{12000\text{mW}}{1\text{mW}}\right) = 10\times 4.079 = 40.79(\text{dBm})$$

■ **方法 2** 式 (16-15a) 可以变为，

$$\text{dBm} = 10\lg\left(\frac{P(\text{单位为 W})}{10^{-3}}\right) = 30 + 10\lg(P(\text{单位为 W}))$$

对于 1nW 则有，

$$\text{dBm} = 30 + 10\lg^{(10^{-9})} = 30 - 90 = -60$$

对于 0.5W 则有，

$$\text{dBm} = 30 + 10\lg(0.5) = 30 - 3 = 27$$

对于 12W 则有，

$$\text{dBm} = 30 + 10\lg(12) = 30 + 10.79 = 40.79$$

(b) 利用式 (16-15b)

$$P = (1\text{mW})\times 10^{\text{dBm}/10}$$

对于−13dBm 则有，

$$P = 10^{-13/10} = 10^{-1.3} = 50.12\times 10^{-3}(\text{mW})$$

对于 5dBm 则有，

$$P = 10^{5/10} = 10^{0.5} = 3.16(\text{mW})$$

对于 30dBm 则有，

$$P = 10^{30/10} = 10^{3} = 1000(\text{mW})$$ ◀

练习 16-5 (a) 以 dBm 为单位表示 300μW 的光电输出功率。

(b) 25dBm 对应的功率为多少（单位为 mW）？ **答案：** (a) −5.23dBm；(b) 316.23mW

16.3 传输函数

在许多领域里深刻了解频率响应是非常重要的。传输函数 $\boldsymbol{H}(\omega)$（也称作**网络函数**（network function））是求解电路频率响应的一种有用的分析工具。实际上，电路的频率响应就是传输函数 $\boldsymbol{H}(\omega)$ 随 ω 由 $\omega=0$ 到 $\omega=\infty$ 变化的关系曲线。

传输函数是依赖于频率的输出信号与输入信号之比。以前在利用阻抗或导纳表示电压与电流的关系时，实际上隐含了传输函数的概念。一般而言，线性网络可以利用如图 16-2 所示的框图表示。

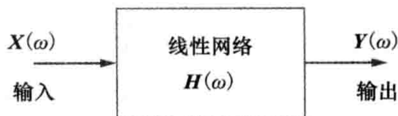


图 16-2 表示线性网络的框图

因此[⊖]，

$$\boldsymbol{H}(\omega)=\boldsymbol{Y}(\omega)/\boldsymbol{X}(\omega) \tag{16-16}$$

一般定义传输函数，假定初始条件为零。但是在交流电路分析中涉及的是稳态响应，而与初始条件不相关。

由于输入与输出可以是电路中任意位置的电压或电流，所以存在四种可能的传输函数：

$$\boldsymbol{H}(\omega)=\text{电压增益}=\frac{\boldsymbol{V}_o(\omega)}{\boldsymbol{V}_i(\omega)} \tag{16-17a}$$

$$\boldsymbol{H}(\omega)=\text{电流增益}=\frac{\boldsymbol{I}_o(\omega)}{\boldsymbol{I}_i(\omega)} \tag{16-17b}$$

$$\boldsymbol{H}(\omega)=\text{转移阻抗}=\frac{\boldsymbol{V}_o(\omega)}{\boldsymbol{I}_i(\omega)} \tag{16-17c}$$

$$\boldsymbol{H}(\omega)=\text{转移导纳}=\frac{\boldsymbol{I}_o(\omega)}{\boldsymbol{V}_i(\omega)} \tag{16-17d}$$

其中，下标 i 与 o 分别表示输入值与输出值。$\boldsymbol{H}(\omega)$ 是一个复数量，其模值为 $H(\omega)$，相位为 ϕ，也就是说，$\boldsymbol{H}(\omega)=H(\omega)\underline{/\phi}$。注意，由于式（16-17c）和（16-17d）中的传输函数为不同参量的比值，因此它们不能以 dB 为单位。

利用式（16-17）计算传输函数时，首先要将电路中的电阻、电感与电容用它们的阻抗 R，$\mathrm{j}\omega L$ 与 $1/\mathrm{j}\omega C$ 取代，得到频域等效电路，之后再利用已经掌握的电路分析方法确定式（16-17）中的相关变量。这样，通过绘制出电路传输函数的模与相位随频率变化的曲线，就可以得到电路的频率响应。利用计算机绘制传输函数可以节省大量的时间，参见 16.6 节讨论的 PSpice 和 Multisim 软件。

为了避免复数运算，在计算 $\boldsymbol{H}(\omega)$ 时，可以暂时利用 s 取代 $\mathrm{j}\omega$，这样可以简化计算过程，而在计算完毕后，再将 s 替换为 $\mathrm{j}\omega$。

例 16-6 对于如图 16-3a 所示的 RC 电路，试确定传输函数 $\boldsymbol{V}_o(\omega)/\boldsymbol{V}_s(\omega)$ 及其频率响应。假定 $v_s=V_m\cos(\omega t)$。

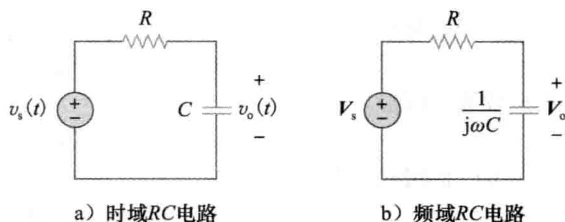


图 16-3 例 16-6 的电路原理图

解： 该电路的频域等效电路如图 16-3b 所示，根据分压原理，其传输函数可以表示为

$$\boldsymbol{H}(\omega)=\boldsymbol{V}_o(\omega)/\boldsymbol{V}_s(\omega)=\frac{1/\mathrm{j}\omega C}{R+1/\mathrm{j}\omega C}=\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega RC}$$

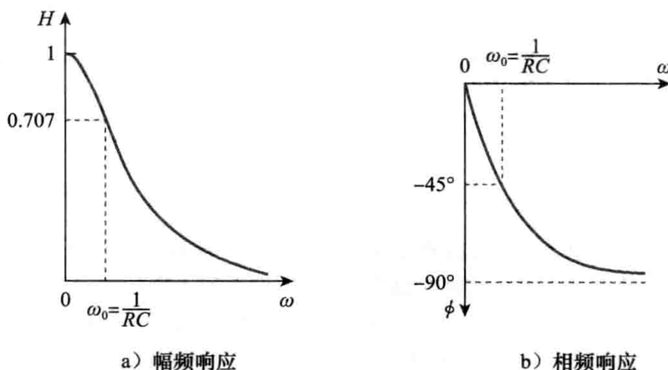
⊖ 此处 $\boldsymbol{X}(\omega)$ 与 $\boldsymbol{Y}(\omega)$ 分别表示网络的输入相量与输出相量，不应与表示电抗和导纳的同样符号相混淆。由于没有足够的英文符号可以将所有的电路变量区分开来，所以用某些符号表示多种意思一般来讲是允许的。

因此可得到 $\boldsymbol{H}(\omega)$ 的模与相位为

$$H=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega/\omega_0)^2}},\quad \phi=-\arctan\frac{\omega}{\omega_0}$$

其中，$\omega_0=1/RC$。要画出 $0<\omega<\infty$ 时 H 与 ϕ 的变化曲线，需确定一些关键点的取值，以便绘图。

当 $\omega=0$ 时，$H=1$ 且 $\phi=0°$；当 $\omega=\infty$ 时，$H=0$ 且 $\phi=-90°$。而当 $\omega=\omega_0$ 时，$H=1/\sqrt{2}$ 且 $\phi=-45°$。利用上述各点以及表 16-3 所示的若干点，即可得到如图 16-4 所示的频率响应。图 16-4 所示频率响应曲线的更多特征将在 16.5.1 节讨论低频滤波器时予以说明。



a）幅频响应　　b）相频响应

图 16-4　RC 电路的频率响应

表 16-3　例 16-6 中的相关数据

ω/ω_0	H	ϕ	ω/ω_0	H	ϕ
0	1	0	10	0.1	−84°
1	0.71	−45°	20	0.05	−87°
2	0.45	−63°	100	0.01	−89°
3	0.32	−72°	∞	0	−90°

◀

练习 16-6　试确定如图 16-5 所示 RL 电路的传输函数 $\boldsymbol{V}_o(\omega)/\boldsymbol{V}_s(\omega)$，并画出其频率响应。假定 $v_s=V_m\cos(\omega t)$。　**答案：**$\mathrm{j}\omega L/(R+\mathrm{j}\omega L)$；频率响应如图 16-6 所示

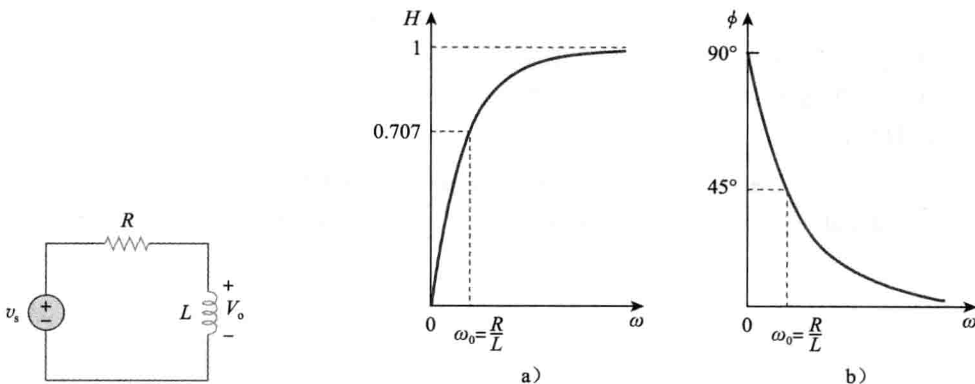


图 16-5　练习 16-6 的 RL 电路　　图 16-6　图 16-5 所示 RL 电路的频率响应

例 16-7　对于图 16-7 所示电路，试计算增益 $\boldsymbol{I}_o(\omega)/\boldsymbol{I}_i(\omega)$。

解：根据分流原理可得：

$$\boldsymbol{I}_o(\omega)=\frac{4+\mathrm{j}2\omega}{4+\mathrm{j}2\omega+1/\mathrm{j}0.5\omega}\boldsymbol{I}_i(\omega)$$

即：

$$\boldsymbol{I}_o(\omega)/\boldsymbol{I}_i(\omega)=\frac{\mathrm{j}0.5\omega(4+\mathrm{j}2\omega)}{1+\mathrm{j}2\omega+(\mathrm{j}\omega)^2}=\frac{s(s+2)}{s^2+2s+1},\quad s=\mathrm{j}\omega$$ ◀

练习 16-7　试计算如图 16-8 所示电路的传输函数 $\mathbf{V}_o(\omega)/\boldsymbol{I}_i(\omega)$。

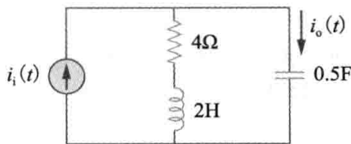


图 16-7　例 16-7 的电路原理图

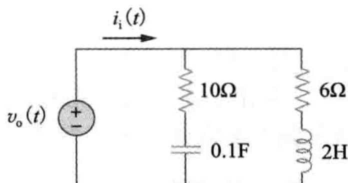


图 16-8　练习 16-7 的电路原理图

答案： $\dfrac{10(s+1)(s+3)}{s^2+8s+5},\quad s=\mathrm{j}\omega$

16.4　波特图

由前一节可以看出，由传输函数确定频率响应是一项很困难的任务。频率响应所涉及的频率范围通常跨度非常大，因此频率轴若采用线性刻度就显得很不方便。另外，确定传输函数幅度与相位曲线的重要特征还有更为系统的方法。鉴于上述原因，在实际中通常频率轴采用对数坐标，而幅度（单位为 dB）和相位分别采用线性刻度。传输函数的这种半对数曲线就称为**波特图**[⊖](Bode plot)，现已成为一种工业标准。波特图与前一节介绍的非对数曲线包含有同样的信息，但是稍后我们会看到，绘制波特图要容易很多。

波特图是传输函数的模（单位为分贝）和相位（单位为度）与频率关系的半对数曲线图。

传输函数可以写为

$$\boldsymbol{H}=H\,\underline{/\phi}=H\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}\tag{16-18}$$

两边取自然对数可以得到：

$$\ln\boldsymbol{H}=\ln H+\ln\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}=\ln H+\mathrm{j}\phi\tag{16-19}$$

因此，$\ln\boldsymbol{H}$ 的实部是幅度的函数，而其虚部就是相位。在幅度波特图中，增益为：

$$\boxed{H(\mathrm{dB})=20\lg H}\tag{16-20}$$

增益曲线是一条分贝（dB）与频率的关系曲线。表 16-4 给出了一些 H 值及其对应的分贝值。在相位波特图中则为相位 ϕ（单位为度）与频率的关系。幅频曲线与相频曲线均绘制在半对数坐标纸上。

表 16-4　某些特定（电压/电流）的增益值及其对应的分贝值

幅度 H	$20\lg H$（dB）	幅度 H	$20\lg H$（dB）
0.001	−60	$\sqrt{2}$	3
0.01	−40	2	6
0.1	−20	10	20
0.5	−6	20	26
$1/\sqrt{2}$	−3	100	40
1	6	1000	60

式（16-16）所示的传输函数可以用带有实部和虚部的因式来表示，其中一种表示方

⊖ 波特图是以贝尔电话实验室的工程师波特（Hendrik W. Bode，1905～1982）的名字命名的，以纪念他在 20 世纪 30 年代到 40 年代期间所做的前瞻性的工作。

法可以记为：

$$\boldsymbol{H}(\omega)=\frac{K(\mathrm{j}\omega)^{\pm1}(1+\mathrm{j}\omega/z_1)[1+\mathrm{j}2\zeta_1\omega/\omega_k+(\mathrm{j}\omega/\omega_k)^2]}{(1+\mathrm{j}\omega/p_1)[1+\mathrm{j}2\zeta_2\omega/\omega_n+(\mathrm{j}\omega/\omega_n)^2]} \tag{16-21}$$

式（16-21）所示的 $\boldsymbol{H}(\omega)$ 的表达式称为标准形式（standard form）。此时式（16-21）看起来比较复杂，可以将其分解为七种不同的因式，处理起来就要容易很多。鉴于此种情形，$\boldsymbol{H}(\omega)$ 可由七种不同的因式构成，传输函数正是这些因式的各种组合。这七种因式是：

1）增益 K

2）过原点[⊖]的因式 $(\mathrm{j}\omega)^{-1}$ 或 $(\mathrm{j}\omega)$

3）频率轴的线性因式 $1/(1+\mathrm{j}\omega/p_1)$ 或 $(1+\mathrm{j}\omega_o/z_1)$

4）二阶因式 $1/[1+\mathrm{j}2\zeta_2\omega/\omega_n+(\mathrm{j}\omega/\omega_n)^2]$ 或 $[1+\mathrm{j}2\zeta_1\omega/\omega_k+(\mathrm{j}\omega/\omega_k)^2]$

在绘制波特图时，首先单独绘制各因式的曲线，之后再将其相加起来。由于采用了对数运算，所以各因式可以单独考虑，再将它们相加组合成波特图。正是因为对数在数学处理上的便利，使得波特图成为一种强有力的工程工具。

下面画出以上所列七个因式的直线渐近线，我们会看到，这些直线渐近线（也就是波特图），与真实波特图曲线非常的相似。

1）常数项：对于增益 K，其幅度为 $20\lg K$，相位为 $0°$，两者均与频率无关。因此，增益的幅频特性与相频特性曲线如图 16-9 所示。如果 K 是负的，其幅度仍然为 $20\lg|K|$，而相位为 $\pm180°$。

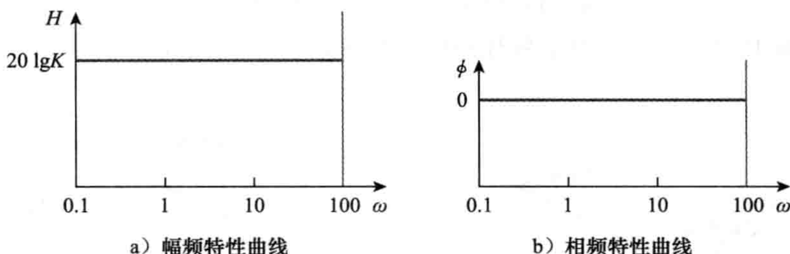


图 16-9　增益 K 的波特图

2）过原点的因式：对于原点处的因式 $(\mathrm{j}\omega)$，其幅度为 $20\lg\omega$，相位为 $90°$，其波特图如图 16-10 所示，由图可见，幅频特性曲线的斜率为 20dB/十倍频程[⊜]，而相频特性是固定的，与频率无关。

因式 $(\mathrm{j}\omega)^{-1}$ 的波特图与因式 $(\mathrm{j}\omega)$ 的波特图非常类似，只是幅频特性曲线的斜率为 −20dB/十倍频程，而相位为 $-90°$。一般情况下，对于 $(\mathrm{j}\omega)^N$，其中 N 为整数，或正或负都可以，则其幅频特性曲线的斜率为 $20N$dB/十倍频程，而相位为 $90N$ 度。

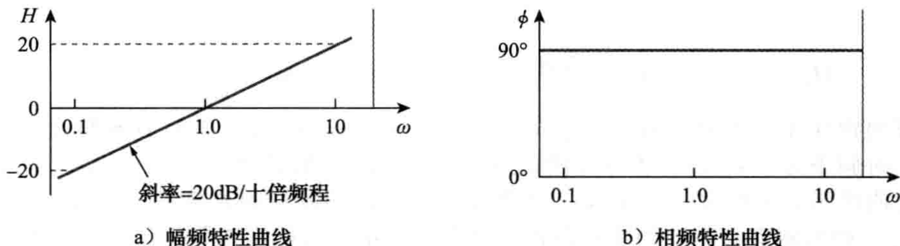


图 16-10　$(\mathrm{j}\omega)$ 的波特图

⊖ 原点位于 $\omega=1$，且对数增益为 0。

⊜ 十倍频程（decade）是指频率之间的间隔成 10 倍的关系，例如 ω_0 与 $10\omega_0$，或者 10Hz 与 100Hz。

3）频率轴的线性因式：对于因式（$1+j\omega/z_1$），其幅度为 $20\lg|1+j\omega/z_1|$，相位为 $\tan^{-1}\omega/z_1$。因此可以得到，

$$H(\mathrm{dB})=20\lg\left|1+\frac{j\omega}{z_1}\right| \quad\Rightarrow\quad 20\lg 1=0 \quad 当\ \omega\to 0 \tag{16-22}$$

$$H(\mathrm{dB})=20\lg\left|1+\frac{j\omega}{z_1}\right| \quad\Rightarrow\quad 20\lg\frac{\omega}{z_1} \quad 当\ \omega\to\infty \tag{16-23}$$

由此可见，当 ω 较小时，可以用零（斜率为零的直线）来近似其幅频特性曲线，而当 ω 较大时，可以用斜率为 20dB/十倍频程的直线近似其幅频特性曲线。两渐近线相交于频率 $\omega=z_1$，称为转折频率（corner frequency 或 break frequency）。于是，近似幅频特性曲线如图 16-11a 所示，图中也给出了实际的幅频特性曲线，由图可见，除了转折频率 $\omega=z_1$ 外，近似曲线非常接近于实际曲线，而在转折频率处，其偏差为

$$20\lg|(1+j_1)|=20\lg\sqrt{2}=3(\mathrm{dB})$$

相位 $\arctan(\omega/z_1)$ 可以表示为

$$\phi=\arctan\left(\frac{\omega}{z_1}\right)=\begin{cases}0, & \omega=0\\ 45^\circ, & \omega=z_1\\ 90^\circ, & \omega\to\infty\end{cases} \tag{16-24}$$

作为直线近似，当 $\omega\leqslant z_1/10$ 时，令 $\phi\approx 0$；当 $\omega=z_1$ 时，令 $\phi\approx 45^\circ$；当 $\omega\geqslant 10z_1$ 时，令 $\phi\approx 90^\circ$，如图 16-11b 所示，同时图中也给出了实际的相频特性曲线。

因式 $1/(1+j\omega/p_1)$ 的波特图与图 16-11 类似，只是转折频率为 $\omega=p_1$，幅频特性曲线的斜率为 -20dB/十倍频程，相频特性曲线的斜率为 -45°/十倍频程。

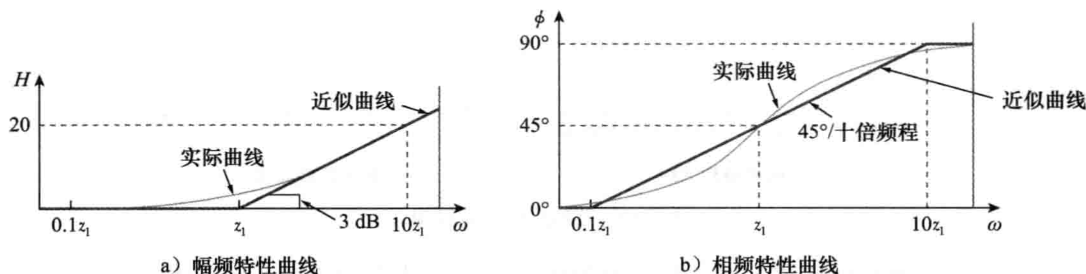


图 16-11 因式（$1+j\omega/z_1$）的波特图

4）二阶因式：$1/[1+j2\zeta_2\omega/\omega_n+(j\omega/\omega_n)^2]$ 的幅度为 $-20\lg|1+j2\zeta_2\omega/\omega_n+(j\omega/\omega_n)^2|$，其相位为 $-\arctan(2\zeta_2\omega/\omega_n)/(1-\omega^2/\omega_n^2)$。但是，

$$H_{\mathrm{dB}}=-20\lg\left|1+\frac{j2\zeta_2\omega}{\omega_n}+\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right| \quad\Rightarrow\quad 0\ 当\ \omega\to 0 \tag{16-25}$$

并且，

$$H_{\mathrm{dB}}=-20\lg\left|1+\frac{j2\zeta_2\omega}{\omega_n}+\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right| \quad\Rightarrow\quad -40\lg\frac{\omega}{\omega_n}\ 当\ \omega\to\infty \tag{16-26}$$

因此，幅频特性曲线由两条渐近线组成：其中一条是 $\omega<\omega_n$ 时，斜率为零的直线，另一条是 $\omega>\omega_n$ 时斜率为 -40dB/十倍频程的直线，其中 ω_n 为转折频率。图 16-12a 所示为近似幅频特性曲线与实际幅频特性曲线。由图可见，实际的幅频特性取决于阻尼因子 ζ_2 与转折频率 ω_n。如果需要高精度的幅频特性，则需要在渐近线的转折频率的邻域内叠加一个明显的峰值。但是，为了简单起见，仍然可以采用直线近似。二阶因式的相位可以表达为

$$\phi=-\arctan\frac{2\zeta_2\omega/\omega_n}{1-\omega^2/\omega_n^2}=\begin{cases}0, & \omega=0\\ -90^\circ, & \omega=\omega_n\\ -180^\circ, & \omega\to\infty\end{cases} \tag{16-27}$$

该相频特性曲线是一条起点位于 $\omega_n/10$ 处，终点位于 $10\omega_n$ 处，斜率为 $-90°$/十倍频程的直线，如图 16-12b 所示。同样可以观察到由阻尼系数引起的实际曲线与渐近线之间的差别。二阶因式的幅频特性与相频特性的渐近线与线性因式的相同，这是因为重因式 $(1+\mathrm{j}\omega/\omega_n)^2$ 就等于 $\zeta_2=1$ 时的二阶因式 $1/[1+\mathrm{j}2\zeta_2\omega/\omega_n+(\mathrm{j}\omega/\omega_n)^2]$。因此，只要采用渐近线，二阶因式就可以看作线性因式的平方。

对于二阶因式 $[1+\mathrm{j}2\zeta_1\omega/\omega_k+(\mathrm{j}\omega/\omega_k)^2]$，由于其幅频特性曲线的斜率为 40dB/十倍频程，而相频特性曲线的斜率为 90°/十倍频程，所以其波特图只需将图 16-12 所示曲线反转即可。

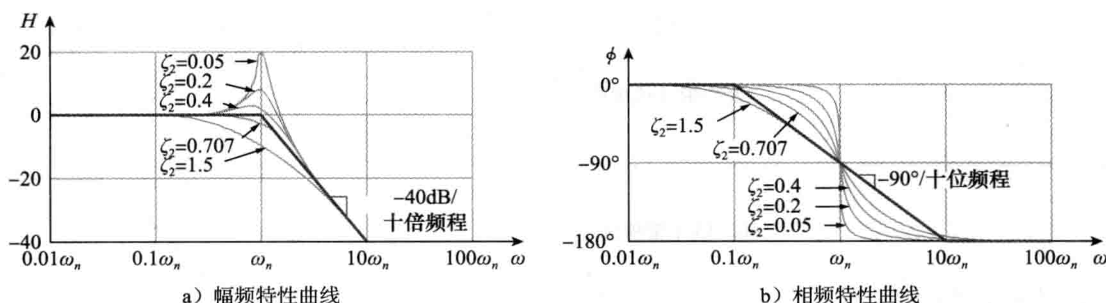


图 16-12　二阶因式 $1/[1+\mathrm{j}2\zeta_2\omega/\omega_n+(\mathrm{j}\omega/\omega_n)^2]$ 的波特图

表 16-5 总结了上述七种因式的波特图。为了绘制式（16-21）所示传输函数 $\boldsymbol{H}(\omega)$ 的波特图，首先要在半对数坐标纸上标记出各转折频率点，按上述方法分别画出每个因式的波特图，之后将各个图形相加合并，从而得到传输函数的波特图。合并的过程通常是从左到右，在各转折频率处适当地改变渐近线的斜率。以下例题说明上述绘制波特图的过程。

表 16-5　幅频特性与相频特性的波特图渐近线总结

因子	幅频特性	相频特性
K	20 lg$K$ ω	0° ω
$(\mathrm{j}\omega)^N$	20N dB/十倍频程 1　ω	90N° ω
$\dfrac{1}{(\mathrm{j}\omega)^N}$	1　ω −20N dB/十倍频程	ω −90N°

（续）

因子	幅频特性	相频特性
$\left(1+\frac{j\omega}{z}\right)^N$	20N dB/十倍频程；z；ω	90N°；0°；$\frac{z}{10}$；z；10z；ω
$\frac{1}{(1+j\omega/p)^N}$	p；ω；−20N dB/十倍频程	$\frac{p}{10}$；p；10p；0°；ω；−90N°
$\left[1+\frac{2j\omega\zeta}{\omega_n}+\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^N$	40N dB/十倍频程；ω_n；ω	180N°；0°；$\frac{\omega_n}{10}$；ω_n；$10\omega_n$；ω
$\frac{1}{[1+2j\omega\zeta/\omega_k+(j\omega/\omega_k)^2]^N}$	ω_k；ω；−40N dB/十倍频程	$\frac{\omega_k}{10}$；ω_k；$10\omega_k$；0°；ω；−180N°

例 16-8 试画出传输函数

$$\boldsymbol{H}(\omega)=\frac{200j\omega}{(j\omega+2)(j\omega+10)}$$

的波特图。

解： 首先将 $\boldsymbol{H}(\omega)$ 转化为标准形式，可得

$$H(\omega)=\frac{10j\omega}{(1+j\omega/2)(1+j\omega/10)}$$

$$=\frac{10\ |\ j\omega\ |}{|\ 1+j\omega/2\ ||\ 1+j\omega/10\ |}\ \underline{/(90^\circ-\arctan\omega/2-\arctan\omega/10)}$$

因此，$\boldsymbol{H}(\omega)$ 的幅度与相位分别为

$$H_{dB}=20\ \lg 10+20\ \lg\ |\ j\omega\ |-20\ \lg\left|1+j\frac{\omega}{2}\right|-20\ \lg\left|1+j\frac{\omega}{10}\right|$$

$$\phi=90^\circ-\arctan\frac{\omega}{2}-\arctan\frac{\omega}{10}$$

由此可见，两个转折频率分别位于 $\omega=2$，10rad/s 处，画出其幅频特性与相频特性中每一项的渐近线如图 16-13 中虚线所示。从 y 轴开始将各条渐近线进行相加合并，得到如图中实线所示总的波特图。

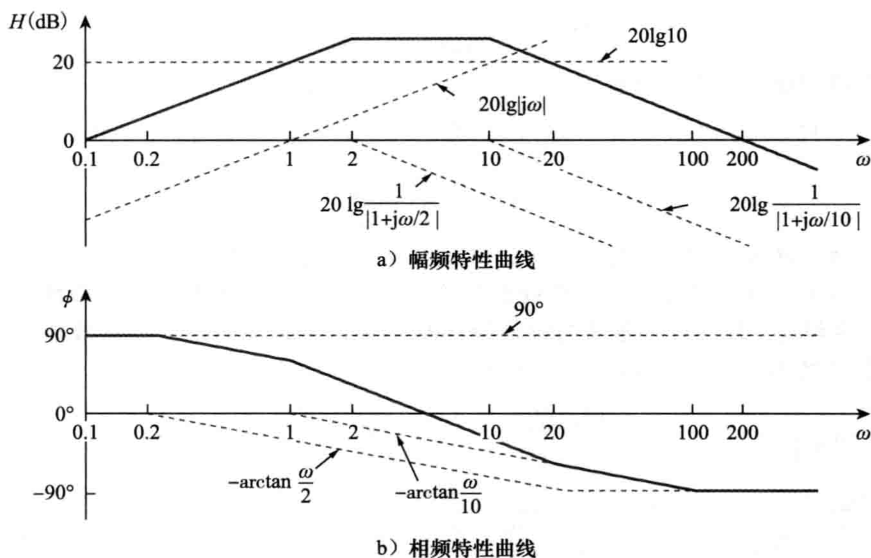


图 16-13　例 16-8 的波特图

◀

练习 16-8　试画出如下传输函数的波特图：

$$H(\omega)=\frac{5(j\omega+2)}{j\omega(j\omega+10)}$$

答案： 参见图 16-14

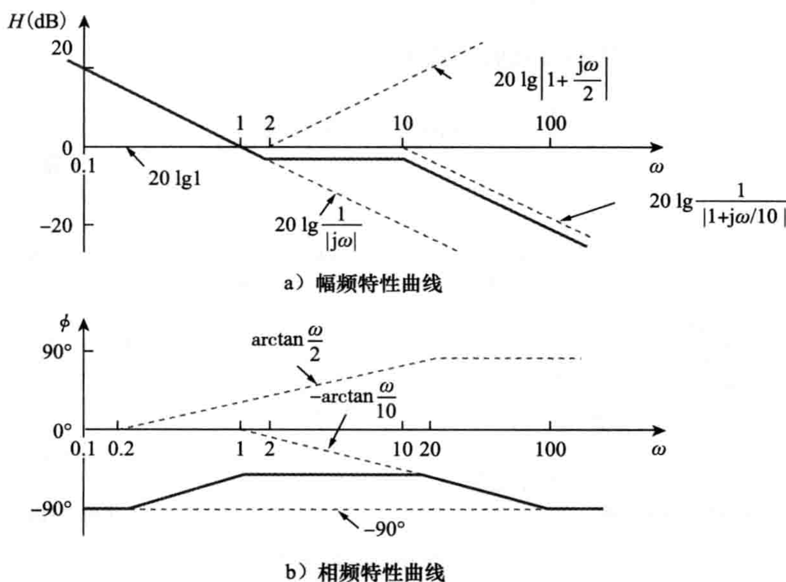


图 16-14　练习 16-8 的波特图

例 16-9 试画出如下传输函数的波特图：

$$H(\omega)=\frac{j\omega+10}{j\omega(j\omega+5)^2}$$

解： 将 $H(\omega)$ 转化为标准形式，可得：

$$\boldsymbol{H}(\omega)=\frac{0.4(1+\mathrm{j}\omega/10)}{\mathrm{j}\omega(1+\mathrm{j}\omega/5)^2}$$

由标准形式得到幅度与相位分别为：

$$H_{\mathrm{dB}}=20\ \lg0.4+20\ \lg\left|1+\frac{\mathrm{j}\omega}{10}\right|-20\ \lg\ |\ \mathrm{j}\omega\ |-40\ \lg\left|1+\frac{\mathrm{j}\omega}{5}\right|$$

$$\phi=0^\circ+\arctan\frac{\omega}{10}-90^\circ-2\arctan\frac{\omega}{5}$$

由此可见，两个转折频率分别位于 $\omega=5$，10rad/s 处。对于转折频率 $\omega=5$rad/s 处的因式，由于是二阶因子，所以其幅频特性曲线的斜率为－40dB/十倍频程，相频特性曲线的斜率为－90°/十倍频程。$\boldsymbol{H}(\omega)$ 中各项的幅频特性曲线与相频特性曲线（如虚线所示）以及整个 $\boldsymbol{H}(\omega)$ 的波特图（如实线所示）如图 16-15 所示。

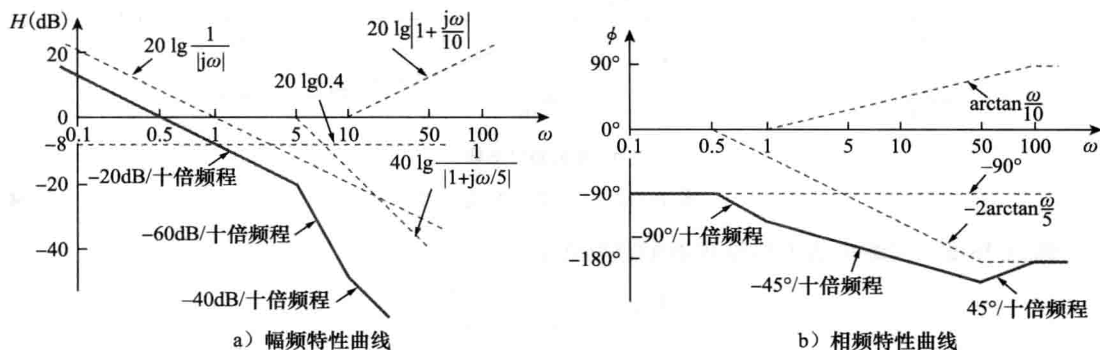


图 16-15 例 16-9 的波特图

练习 16-9 试画出如下传输函数的波特图：

$$\boldsymbol{H}(\omega)=\frac{50\mathrm{j}\omega}{(\mathrm{j}\omega+4)(\mathrm{j}\omega+10)^2}$$

答案： 参见图 16-16

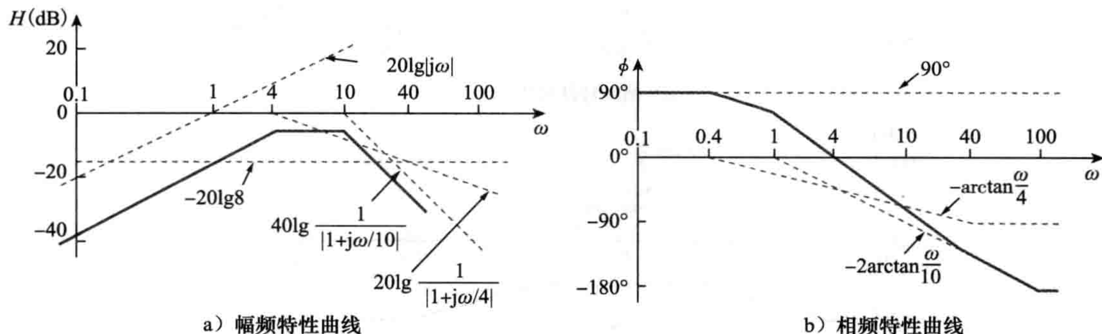


图 16-16 练习 16-9 的波特图

例 16-10 试画出如下传输函数的波特图：

$$\boldsymbol{H}(s)=\frac{s+1}{s^2+60s+100},\quad s=\mathrm{j}\omega$$

解： 将 $\boldsymbol{H}(s)$ 转化为标准形式：

$$\boldsymbol{H}(\omega)=\frac{1/100(1+\mathrm{j}\omega)}{1+\mathrm{j}\omega6/10+(\mathrm{j}\omega/10)^2}$$

其中，二阶因式的转折频率为 $\omega_n=10$rad/s，则其幅度与相位分别为

$$H_{dB}=-20\lg100+20\lg|1+j\omega|-20\lg\left|1+\frac{j6\omega}{10}-\frac{\omega^2}{100}\right|$$

$$\phi=0°+\arctan\omega-\arctan\left[\frac{\omega6/10}{1-\omega^2/100}\right]$$

波特图如图 16-17 所示。注意二阶因式在 $\omega=\omega_k$ 处按双重线性因式来处理，即 $(1+j\omega/\omega_k)^2$，这是一种近似方法。

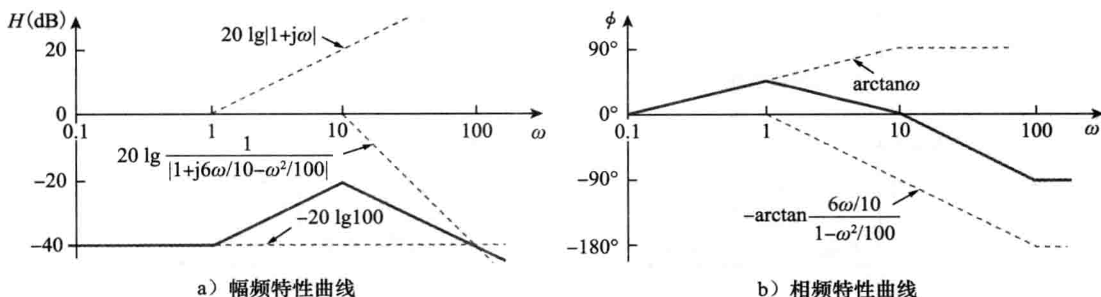


图 16-17　例 16-10 的波特图

练习 16-10　试画出如下传输函数的波特图：

$$H(s)=\frac{10}{s(s^2+80s+400)}$$

答案： 参见图 16-18

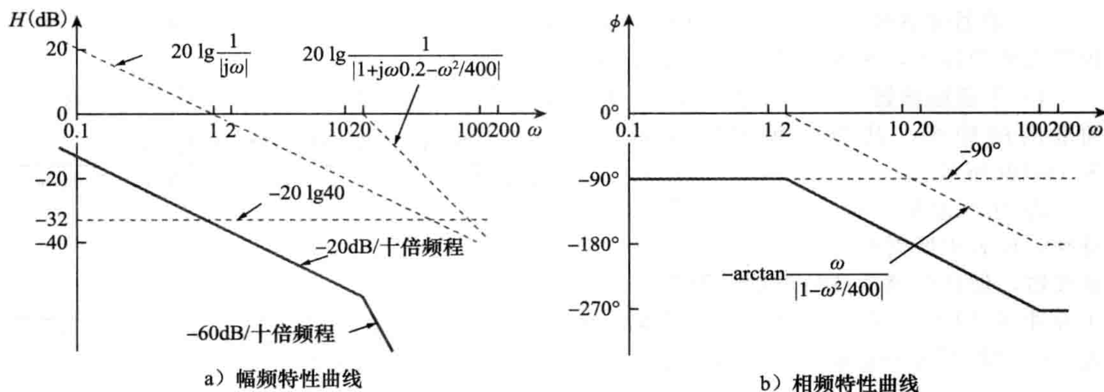


图 16-18　练习 16-10 的波特图

16.5　滤波器

滤波器的概念从一开始就是电子工程技术发展中一个必不可少的组成部分，没有电子滤波器，某些技术成果将不可能实现。鉴于滤波器的突出作用，许多学者和工程技术人员在其理论、设计与制造等问题上付出了大量的努力，发表并出版了很多关于滤波器的论文和专著。本章对滤波器的讨论只是一个简要介绍。

滤波器是一个使期望频率的信号通过、同时阻止（衰减）其他频率的信号，或者是阻止（衰减）不需要的频率信号而让其他频率信号通过的电路。

滤波器作为一种频率选择装置，可以将信号的频谱限制在某个特定的频带范围内。在无线电接收机与电视机中，可以利用滤波器从空间大量的广播信号中选出所需的信号频

道。除了本节介绍的滤波器外，还有其他类型的滤波器，如数字滤波器、机电滤波器和微波滤波器等，均已超出本书的讨论范围，不予讨论。

如图 16-19 所示，滤波器有如下的四种类型：

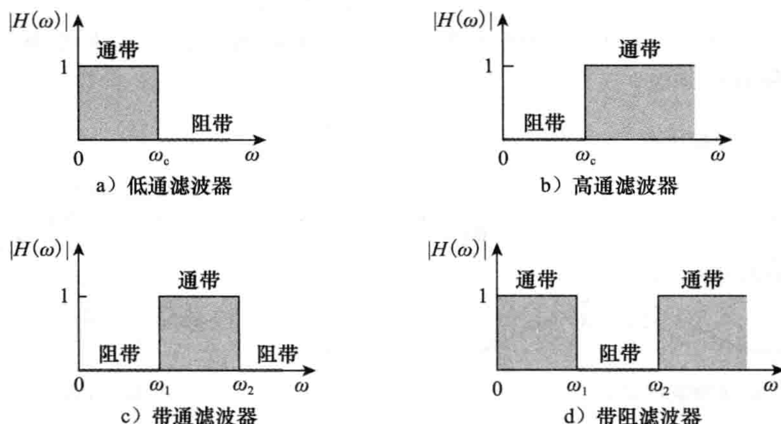


图 16-19 四类滤波器的理想频率响应

1）**低通滤波器**（lowpass filter）：允许低频通过，阻止高频通过，其理想频率响应如图 16-19a 所示。

2）**高通滤波器**（highpass filter）：允许高频通过，阻止低频通过，其理想频率响应如图 16-19b 所示。

3）**带通滤波器**（bandpass filter）：允许某个频带范围内的频率通过，阻止或衰减该频带之外的频率，其理想频率响应如图 16-19c 所示。

4）**带阻滤波器**（bandstop filter）：允许某个频带范围外的频率通过，阻止或衰减该频带内的频率，其理想频率响应如图 16-19d所示。

表 16-6 总结了以上四类滤波器的特性，该表中所列的特性仅适用于简单滤波器，但还应该注意滤波器的种类不止表中所列的几种。下面讨论实现表 16-6中所列各种滤波器的典型电路。

表 16-6 各类滤波器特性的总结

滤波器类别	$H(0)$	$H(\infty)$	$H(\omega_c)$ 或 $H(\omega_0)$
低通	1	0	$1/\sqrt{2}$
高通	0	1	$1/\sqrt{2}$
带通	0	0	1
带阻	1	1	0

注：ω_c 为低通滤波器和高通滤波器的截止频率，ω_0 为带通滤波器与带阻滤波器的中心频率。

16.5.1 低通滤波器

当串联 RC 电路的输出取自电容两端的电压时，就构成一个典型的低通滤波器，如图 16-20 所示。该电路的传输函数为（也可参见例 16-6）：

$$\boldsymbol{H}(\omega)=\boldsymbol{V}_o/\boldsymbol{V}_i=\frac{1/\mathrm{j}\omega C}{R+1/\mathrm{j}\omega C}$$

$$\boldsymbol{H}(\omega)=\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega RC} \tag{16-28}$$

由此可见，$\boldsymbol{H}(0)=1$，$\boldsymbol{H}(\infty)=0$。$|H(\omega)|$ 的频率特性曲线以及理想的频率特性曲线如图 16-21 所示。半功率频率相当于波特图中的转折频率，但在滤波器中通常称为截止频率（cutoff frequency）ω_c，令 $\boldsymbol{H}(\omega)$ 的模等于 $1/\sqrt{2}$即可得到截止频率：

$$H(\omega_c)=\frac{1}{\sqrt{1+\omega_c^2R^2C^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \tag{16-29}$$

其中，

$$\omega_c = \frac{1}{RC} \tag{16-30}$$

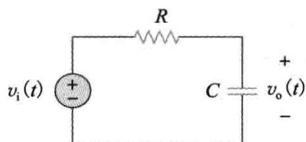


图 16-20　低通滤波器

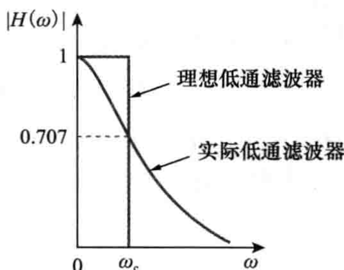


图 16-21　低通滤波器的理想频率响应与实际频率响应

截止频率[⊖]也可以称为滚降频率（rolloff frequency）。因此，

低通滤波器是只允许从直流到截止频率 ω_c 之间的频率信号通过的滤波器。

当串联 RL 电路的输出取自电阻器两端的电压时，也可以构成低通滤波器。当然，低通滤波器还存在其他多种电路形式。

16.5.2　高通滤波器

当串联 RC 电路的输出取自电阻器两端的电压时，就构成了高通滤波器，如图 16-22 所示。其传输函数为

$$\boldsymbol{H}(\omega) = \mathbf{V}_o/\mathbf{V}_i = \frac{R}{R + 1/\mathrm{j}\omega C}$$
$$\boldsymbol{H}(\omega) = \frac{\mathrm{j}\omega RC}{1 + \mathrm{j}\omega RC} \tag{16-31}$$

由此可见，$\boldsymbol{H}(0)=0$，$\boldsymbol{H}(\infty)=1$。$|\boldsymbol{H}(\omega)|$ 的频率特性曲线如图 16-23 所示，其转折频率或截止频率为

$$\omega_c = \frac{1}{RC} \tag{16-32}$$

因此，

高通滤波器是指允许大于其截止频率 ω_c 的频率信号通过的滤波器。

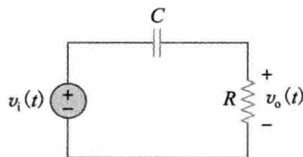


图 16-22　高通滤波器

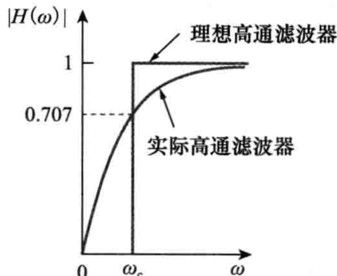


图 16-23　高通滤波器的理想频率响应与实际频率响应

当串联 RL 电路的输出取自电感器两端的电压时，也可以构成一个高通滤波器。

⊖ 截止频率是传输函数 $\boldsymbol{H}$ 的模下降至最大值的 70.71%时所对应的频率，也可以认为是电路消耗的功率为其最大值的一半时所对应的频率。

16.5.3 带通滤波器

如果以 RLC 串联谐振电路中电阻两端的电压作为输出，就可构成一个带通滤波器，如图 16-24 所示，其传输函数为

$$\boldsymbol{H}(\omega)=\mathbf{V}_{\mathrm{o}}/\mathbf{V}_{\mathrm{i}}=\frac{R}{R+\mathrm{j}(\omega L-1/\omega C)} \tag{16-33}$$

由此可见，$\boldsymbol{H}(0)=0$，$\boldsymbol{H}(\infty)=0$，为 $|H(\omega)|$ 的幅频特性曲线如图 16-25 所示。带通滤波器使得以 ω_0 为中心的一个频带（$\omega_1<\omega<\omega_2$）内的信号通过，其中心频率由下式确定：

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{16-34}$$

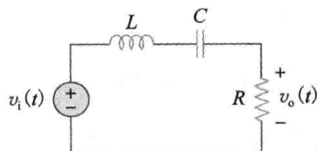


图 16-24 带通滤波器

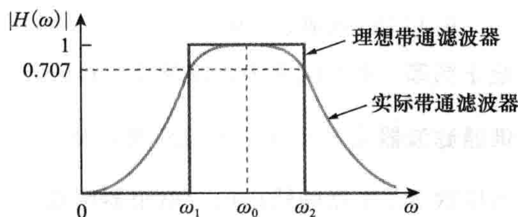


图 16-25 带通滤波器的理想频率响应与实际频率响应

因此，

带通滤波器是允许 $\omega_1<\omega<\omega_2$ 频带内所有频率通过的滤波器。

由于如图 16-24 所示的带通滤波是一个串联谐振电路，所以该滤波器的半功率频率、带宽以及品质因数均可由 15.2 节的公式确定。

带通滤波器也可以由如图 16-20 所示的低通滤波器（其 $\omega_2=\omega_c$）与如图 16-22 所示的高通滤波器（其 $\omega_1=\omega_c$）两者的级联构成。

16.5.4 带阻滤波器

阻止两个指定频率（ω_1 与 ω_2）之间的频带信号通过的滤波器称为带阻滤波器（bandstop/bandreject filter）或陷波滤波器（notch filter）。当 RLC 串联谐振电路的输出取自 LC 串联组合两端时，即构成带阻滤波器，如图 16-26 所示，其传输函数为

$$\boldsymbol{H}(\omega)=\mathbf{V}_{\mathrm{o}}/\mathbf{V}_{\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{j}(\omega L-1/\omega C)}{R+\mathrm{j}(\omega L-1/\omega C)} \tag{16-35}$$

由式可见，$\boldsymbol{H}(0)=1$，$\boldsymbol{H}(\infty)=1$。$|\boldsymbol{H}(\omega)|$ 的幅频特性曲线如图 16-27 所示，其中心频率为：

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{16-36}$$

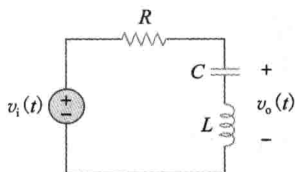


图 16-26 带阻滤波器；例 16-12 的电路原理图

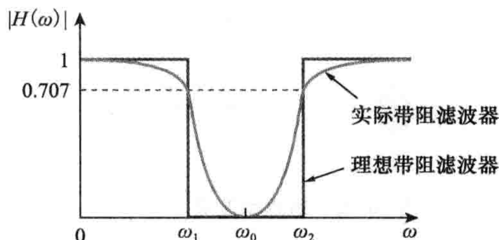


图 16-27 带阻滤波器的理想频率响应与实际频率响应

同理，带阻滤波器的半功率频率、带宽以及品质因数，仍然可以利用 15.2 节中的串联谐振电路的公式来计算，这里的 ω_0 称为抑制频率（frequency of rejection），而相应的带

宽（$B=\omega_2-\omega_1$）称为**抑制带宽**（bandwidth of rejection）。因此，

> **带阻滤波器**是抑制或消除在 $\omega_1<\omega<\omega_2$ 频带内所有频率成分的滤波器。

注意：具有相同 R、L、C 值的带通滤波器的传输函数与带阻滤波器的传输函数相加可以得到在任何频率下都为 1 的频率响应。当然，一般而言这一结论是不成立的，但对本节所讨论的两个电路是成立的，这是因为其中一个电路的特性恰好与另一个电路的特性相反。

本节的最后总结几点注意事项。

1）由式（16-29）、式（16-31）、式（16-33）以及式（16-35）可知，无源滤波器的最大增益为 1（或 0dB）。若想使得增益大于 1，应该采用有源滤波器，但它已超出本书的讨论范围。

2）本节所讨论的各种类型的滤波器还可以采用其他方法得到。

3）本节讨论的滤波器都比较简单，还有许多其他滤波器具有更锐利的选择特性和更复杂的频率响应。

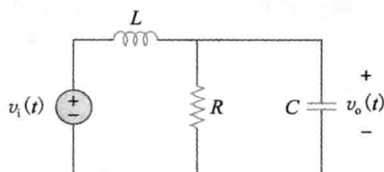


图 16-28　例 16-11 的电路原理图

例 16-11　试确定如图 16-28 所示滤波器的类别，并计算其转折（截止）频率，设定电路中 $R=2\text{k}\Omega$，$L=2\text{H}$，$C=2\mu\text{F}$。

解：电路的传输函数为

$$\boldsymbol{H}(s)=\mathbf{V}_o/\mathbf{V}_i=\frac{R\ /\!/\ 1/sC}{sL+R\ /\!/\ 1/sC},\quad s=\text{j}\omega \tag{16-11-1}$$

其中，

$$R\ /\!/\ \frac{1}{sC}=\frac{R/sC}{R+1/sC}=\frac{R}{1+sRC}$$

将其代入式（16-11-1），可得：

$$\boldsymbol{H}(s)=\frac{R/(1+sRC)}{sL+R/(1+sRC)}=\frac{R}{s^2RLC+sL+R},\qquad s=\text{j}\omega$$

即

$$\boldsymbol{H}(\omega)=\frac{R}{-\omega^2RLC+\text{j}\omega L+R} \tag{16-11-2}$$

由于 $\boldsymbol{H}(0)=1$ 且 $\boldsymbol{H}(\infty)=0$，所以由表 16-6 可知图 16-28 所示电路是一个二阶低通滤波器。则传输函数 $\boldsymbol{H}$ 的模为

$$H=\frac{R}{\sqrt{(R-\omega^2RLC)^2+\omega^2L^2}} \tag{16-11-3}$$

其转折频率就是半功率频率，即 $\boldsymbol{H}$ 下降至其 $1/\sqrt{2}$ 时对应的频率。由于 $H(\omega)$ 的直流值为 1，所以在转折频率处，式（16-11-3）两边取平方可以得到：

$$H^2=\frac{1}{2}=\frac{R^2}{(R-\omega_c^2RLC)^2+\omega_c^2L^2}$$

即

$$2=(1-\omega_c^2LC)^2+\left(\frac{\omega_cLC}{R}\right)^2$$

将 R、L、C 的值代入上式可得：

$$2=(1-\omega_c^2 4\times10^{-6})^2+(\omega_c10^{-3})^2$$

假定 ω_c 的单位为 krad/s，则有：

$$2=(1-4\omega_c)^2+\omega_c^2\quad\Rightarrow\quad 16\omega_c^4-7\omega_c^2-1=0$$

求解关于 ω_c^2 的二次方程，得到 $\omega_c^2=0.5509$，或 $\omega_c=0.742\text{krad/s}=742\text{rad/s}$。由于 $\omega_c=2\pi f_c$，所以也就是 $f_c=118.6\text{Hz}$。◀

练习 16-11　对于如图 16-29 所示电路，试确定其传输函数 $\mathbf{V}_o(\omega)/\mathbf{V}_i(\omega)$，并判断该电路代表的滤波器类型，同时计算其转折频率。设定 $R_1=100\Omega=R_2$，$L=2\text{mH}$。

答案： $\dfrac{R^2}{R_1+R_2}\left(\dfrac{j\omega}{j\omega+\omega_c}\right)$；

$$\omega_c=\frac{R_1R_2}{(R_1+R_2)\ L}=25\text{krad/s}$$

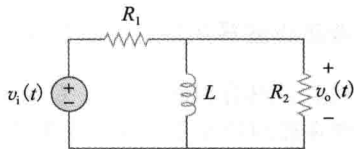


图 16-29　练习 16-11 的电路原理图

例 16-12　如图 16-26 所示的带阻滤波器，若要抑制 200Hz 的正弦信号而允许其他频率信号通过，试计算其 L 与 C 值。假定 $R=150\Omega$，带宽为 100Hz。

解： 利用 15.2 节串联谐振电路的公式，可以得到：

$$\text{BW}=2\pi\times 100=200\pi(\text{rad/s})$$

而且，

$$\text{BW}=\frac{R}{L}\quad\Rightarrow\quad L=\frac{R}{\text{BW}}=\frac{150}{200\pi}=0.2387(\text{H})$$

抑制 200Hz 的正弦信号表明 $f_0=200\text{Hz}$，于是图 16-27 中的 ω_0 为

$$\omega_0=2\pi f_0=2\pi\times 200=400\pi$$

由于 $\omega_0=1/\sqrt{LC}$，所以：

$$C=\frac{1}{\omega_0^2 L}=\frac{1}{(400\pi)^2\times(0.2387)}=2.66(\mu\text{F})$$ ◀

练习 16-12　试设计一个如图 16-24 所示的带通滤波器，其低截止频率为 20.1kHz，高截止频率为 20.3kHz。假定 R=20kΩ，试计算 L、C 和 Q。　**答案：** 7.96H；3.9pF；101

16.6 计算机辅助分析

16.6.1 PSpice

PSpice 软件的使用方法与第十五章中介绍的相类似，唯一的不同之处在于本节将利用 PSpice 软件绘制幅度波特图和相位波特图。

正如 15.5 节所述，PSpice 有三种扫描类型。

- 线性（Linear）：频率从起始频率（Start Freq）到终止频率（End Freq）等间隔点（或响应）线性变化，扫描点数为 Total。
- 倍频程（Octave）：从起始频率（Start Freq）到终止频率（End Freq）对频率进行倍频程对数扫描，扫描点数为每倍频程 Total。所谓倍频程是指因子为 2 的频率关系。例如从 20kHz 到 40kHz 为一个倍频程。
- 十倍频程（Decade）：起始频率（Start Freq）到终止频率（End Freq）对频率进行十倍频程对数扫描，扫描点数为每十倍频程 Total。所谓十倍频程是指频率比为 1∶10 的频率间隔，例如从 20kHz 到 200kHz 为十倍频程。

根据之前的详细描述可知，PSpice 由起始频率（Start Freq）到终止频率（End Freq）改变（或者扫描）电路中所有的独立源的频率，从而实现电路的正弦稳态分析。

PSpice A/D 窗口用于显示图形输出。输出数据类型可以通过在 Trace Command Box 中给 V 或者 I 添加以下后缀来指定：

M　正弦曲线的幅度（峰值）

P　正弦曲线的相位

dB　正弦曲线的幅度，单位为分贝，即 20log10（幅度）

例 16-13 利用 PSpice 试计算如图 16-30 所示电路的增益和 $\mathbf{V}_o$ 的相位波特图。

解：由于本题关注的是波特图，所以对 300Hz＜f＜30kHz 的频率范围采用十倍频程扫描，则每十倍频程 101 个扫描频率点。之所以选择这个频率范围，是因为该电路的谐振频率在此范围之内。回顾之前的知识，谐振频率为

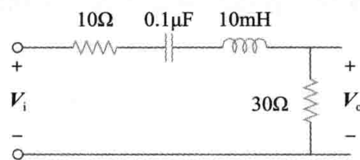


图 16-30 例 16-13 和练习 16-15 的电路原理图

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 31.62\text{krad/s} \quad 或 \quad f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 5.03\text{kHz}$$

绘制如图 16-31 所示的 PSpice 原理图，并保存为 1613.dsn，然后选择 PSpice/New Simulation Profile。在新的仿真对话框中输入“exam1613”作为文件名并单击创建。在仿真设置对话框进行参数设置，分析类型（Analysis Type）选择交流扫描/噪声（AC Sweep/Noise），交流扫描类型（AC Sweep Type）选择对数/十倍频程（Logarithmic/Decade）。起始频率（Start Freq）输入 300，终止频率（Final Freq）输入 30k，Points/Decade 输入 101。

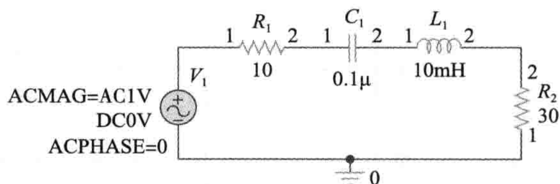
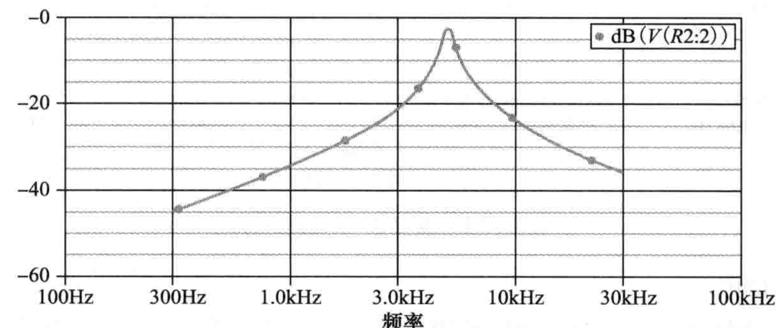
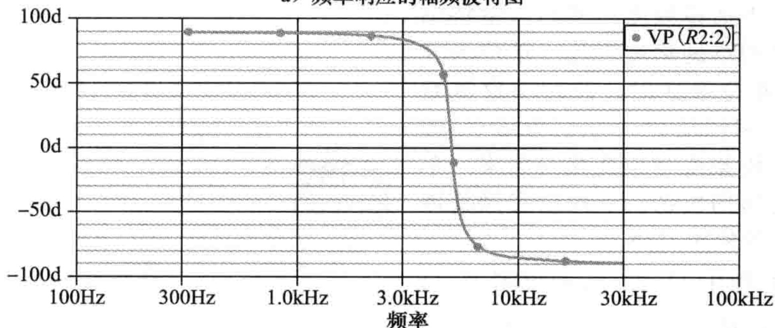


图 16-31 图 16-30 所示电路的 PSpice 电路示意图

运行 PSpice/Run 开始对电路进行仿真，如果没有错误则自动弹出 Probe 窗口。为了得到波特图，在 PSpice A/D 窗口中选择 Trace/Add,，并在 Trace Command 对话框中输入 dB(V(R2：2))，得到如图 16-32a 所示的幅度波特图。要确定相频特性曲线，在 Probe 窗口中选择 Trace/Add,，并在 Trace Command 对话框中输入 VP(R2：2)，得到如图 16-32b 所示的相位波特图。从图 16-32 可以看出该电路为带通滤波器。



a）频率响应的幅频波特图



b）频率响应的相位波特图

图 16-32 例 16-13 的波特图

练习 16-13 如图 16-33 所示网络，试利用 PSpice 确定从 1kHz 到 100kHz 频率范围 $\mathbf{V}_o$ 的波特图，在该频率范围内每十倍频程 20 个点。

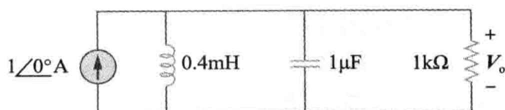
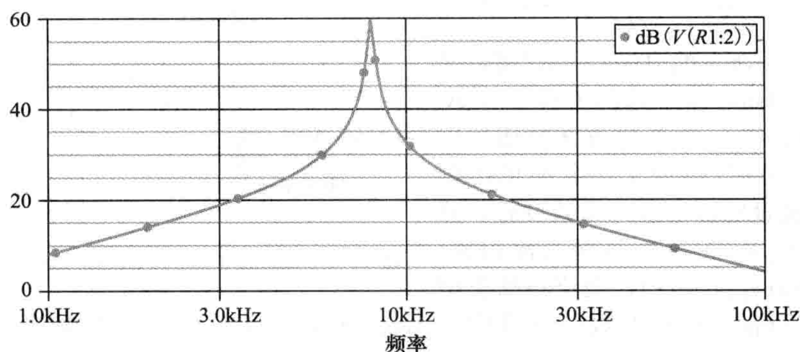
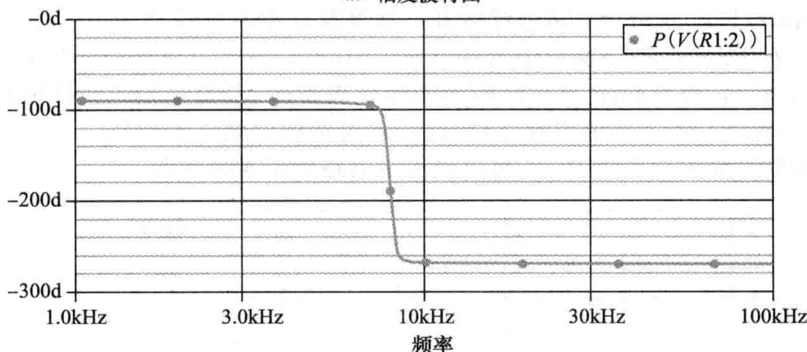


图 16-33 练习 16-13 和练习 16-14 的电路原理图

答案： 参见图 16-34



a）幅度波特图



b）幅度波特图

图 16-34 练习 16-13 的波特图

16.6.2 Multisim

Multisim 软件中含有绘制波特图的特殊工具——波特图仪，它可以显示电压增益响应或相位响应。当选择幅度模式时，波特图仪测量电路中两点的幅度之比（单位为分贝）；当选择相位模式时，波特图仪测量电路中两点的相位变化（单位为度）。波特图仪描绘出增益或相位变化与频率（单位为赫兹）之间的关系。下面以实例具体说明波特图仪的使用方法。

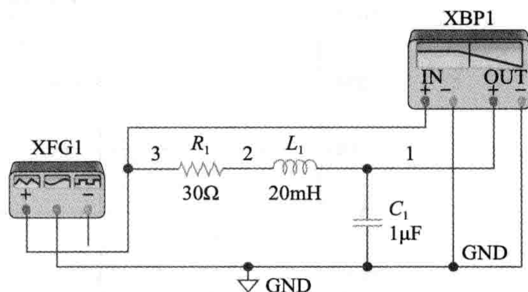


图 16-35 例 16-14 的 Multisim 示意图

例 16-14 利用 Multisim 画出图 15-14 所示电路的波特图（参见第十五章）。

解： 首先画出图 16-35 所示的 Multi-

sim 电路示意图，并利用函数发生器代替图 15-21 的交流电压源。双击函数发生器（XFG1）的符号，将频率设置为 1kHz 且幅度为 1V。类似地，双击波特图仪（XBP1）的符号，选择幅度（Magnitude）模式，纵坐标刻度类型选择对数（Log）且从－40dB 到 40dB，横坐标需刻度类型选择对数且从 1Hz 到 10kHz。保存文件并选择 Simulate/Run。在电路仿真运行过程中，双击波特图仪，则可以显出幅度波特图。设置模式为相位时，可以得到相位波特图。如图 16-36 所示即为幅度波特图和相位波特图。

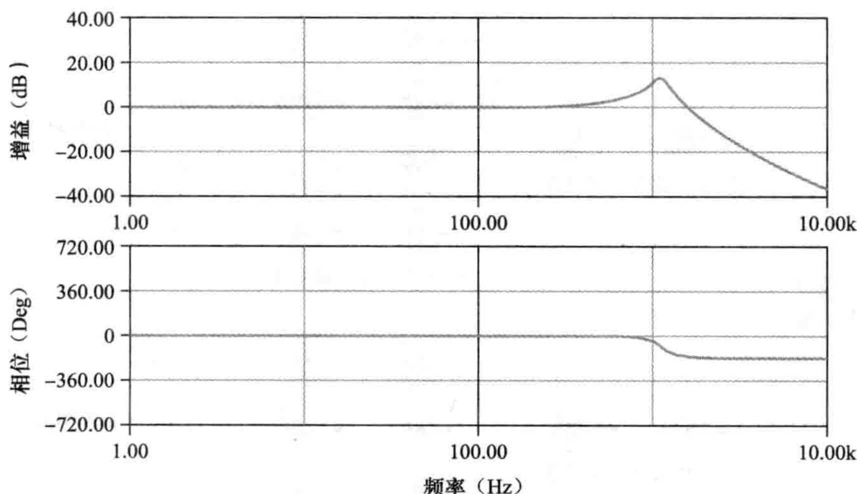


图 16-36　例 16-14 的幅度波特图和相位波特图 ◀

练习 16-14　利用 Multisim 软件重做练习 16-13。　**答案：**参见图 16-34

16.7 应用

滤波器的应用非常广泛，尤其是在电子学、电力系统和通信系统中应用颇多。例如，截止频率大于 60Hz 的高通滤波器可以消除各种通信电子系统中的 60Hz 电力线噪声。通信系统中为了从相同频率范围内的大量信号中选取出期望的信号就必须对信号进行滤波处理（同 15.6 节讨论的无线电接收机情况相同），同时滤波还可以将噪声的影响和对期望信号的干扰最小化。本节中将讨论两个滤波器的应用实例。

16.7.1 按键式电话机

滤波器的一种典型应用就是如图 16-37 所示的按键式电话机，其键盘共 4 行 3 列 12 个按钮。这种排列方式通过七种音调可以产生 12 种不同的信号，而这七种音调又分为低频组（697Hz 到 941Hz）和高频组（1209Hz 到 1477Hz）两组。按某个按钮会产生唯一对应于该按钮的一对频率的两个正弦信号之和。例如，按数字按钮 6 就会产生同时具有 770Hz 和 1477Hz 两个频率的正弦信号。

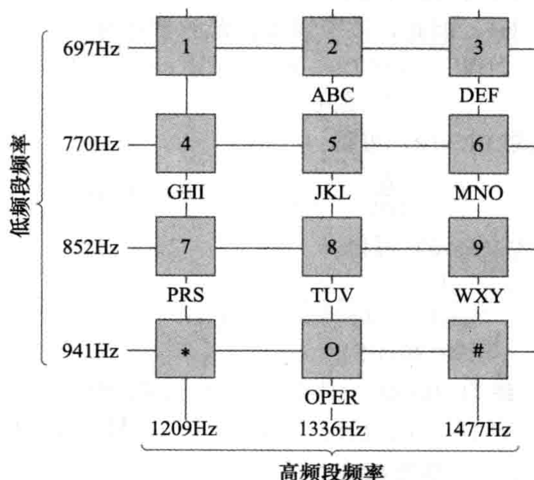


图 16-37　按键式电话机拨号的频率排列
（图片来自：G. Daryanani，Principles of Active Network Synthesis and Design (New York：John Wiley & Sons)，1976，p. 79.）

拨出电话号码时，会将一组信号传送到电话局，通过检测这组信号所包含的频

率实现对按键信息的解码。拨号检测方案的框图如图 16-38 所示。信号首先经过放大，之后通过低通滤波器（LP）与高通滤波器（HP）将信号分到各自相应的频率分组，利用限幅器（L）将各组信号转换为方波。接着，利用 7 个带通滤波器（BP）识别出不同频率的单音信号，即各带通滤波器仅允许其中一个频率通过，而阻止其他频率通过。各滤波器之后为一个检测器（D），当其输入电压超过某个电平时，就触发工作。检测器的输出为交换系统提供连接主叫和被叫时所需的直流信号。

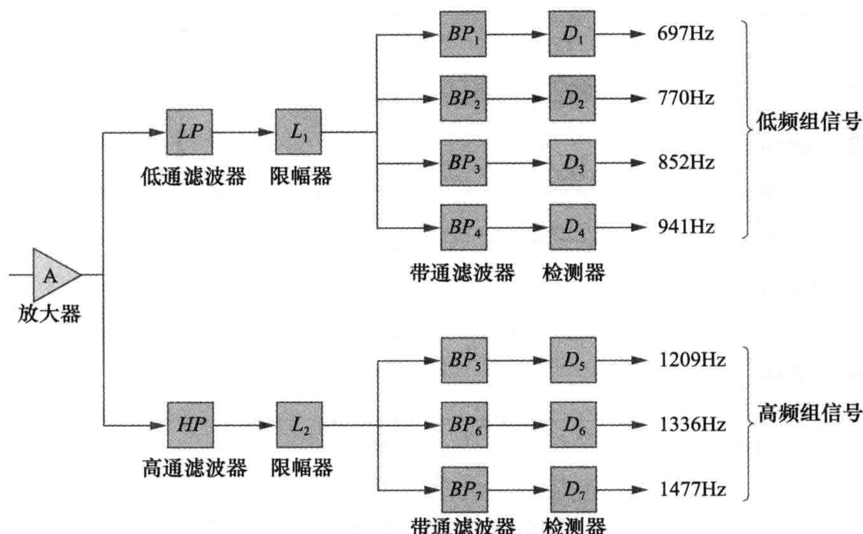


图 16-38　拨号检测方案的框图

（图片来自：G. Daryanani，Principles of Active Network Synthesis and Design（New York：John Wiley & Sons），1976，p. 79.）

例 16-15 在电话电路中，采用标准的 600Ω 电阻器与 *RLC* 串联电路，试设计如图 16-38所示的带通滤波器 BP_2。

解： 串联 *RLC* 电路构成的带通滤波器为如图 16-24 所示，由于 BP_2 允许 697Hz 到 852Hz 的频率通过，并且其中心频率为 $f_0=770\text{Hz}$，因此，该带通滤波器的带宽为：

$$\text{BW}=2\pi(f_2-f_1)=2\pi(852-697)=973.89(\text{rad/s})$$

由式（15-19）可得：

$$L=\frac{R}{\text{BW}}=\frac{600}{973.89}=0.616(\text{H})$$

由式（15-6）可得：

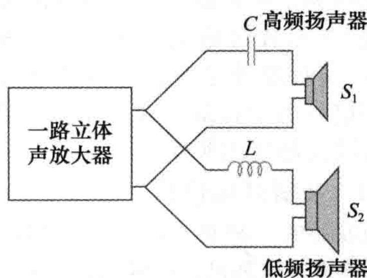
$$C=\frac{1}{\omega_0^2 L}=\frac{1}{4\pi^2 f_0^2 L}=\frac{1}{4\pi^2\times770^2\times0.616}=69.36(\text{nF})$$

◀

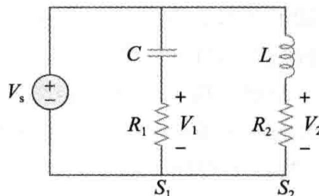
练习 16-15 对于带通滤波器 BP_6，重做例 16-15的设计。**答案：** 0.356H；39.86nF

16.7.2 交叉网络

滤波器的另一个典型应用是交叉网络（crossover network），它可以将音频放大器的输出耦合至低频扬声器与高频扬声器，如图 16-39a所示。



a）包括两个扬声器的交叉网络



b）等效电路模型

图 16-39　交叉网络

交叉网络主要由一个高通 RC 滤波器与一个低通 RL 滤波器组成，它将高于预定交叉频率 f_c 的高频信号送至高频扬声器（即高音喇叭），而将低于 f_c 的低频信号送至低频扬声器（即低音喇叭）。这些扬声器的设计满足了某种频率响应。低频扬声器是重现信号低频部分的低音喇叭，其最高频率约 3kHz，而高音喇叭则重现大约 3kHz 到 20kHz 的音频信号。两类扬声器组合在一起即可重现整个音频范围的信号，并提供最优频率响应。

利用电压源代替放大器即可得到如图 16-39b 所示的交叉网络的近似等效电路，图中扬声器的电路模型为电阻器。高通滤波器的传输函数 V_1/V_s 为：

$$H_1(\omega)=\frac{V_1}{V_s}=\frac{j\omega R_1 C}{1+j\omega R_1 C} \tag{16-37}$$

同理，低通滤波器的传输函数为：

$$H_2(\omega)=\frac{V_2}{V_s}=\frac{R_2}{R_2+j\omega L} \tag{16-38}$$

选择 R_1、R_2、L 与 C 的值，可以使两个滤波器具有相同的转折频率，即交叉频率（crossover frequency），如图 16-40 所示。

交叉网络的基本原理也用于电视接收机的谐振电路中，因为电视接收机利用它将射频载波中的视频波段与音频波段分离开。通过交叉网络后，低频段（频率范围 30Hz 到大约 4MHz 为图像信息）信号进入电视接收机的视频放大器，而高频段（即 4.5MHz 左右的声音信息）信号进入电视接收机的声音放大器。

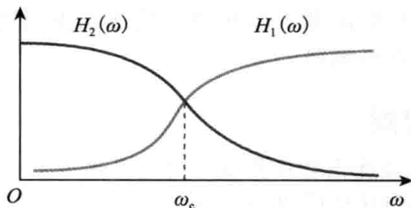


图 16-40　图 16-39 所示交叉网络的频率响应

例 16-16 在如图 16-39 所示的交叉网络中，假定各扬声器的等效电阻为 6Ω，试计算交叉频率为 2.5kHz 时 C 与 L 的值。

解：对于高通滤波器，有：

$$\omega_c=2\pi f_c=\frac{1}{R_1 C}$$

即：

$$C=\frac{1}{2\pi f_c R_1}=\frac{1}{2\pi\times 2.5\times 10^3\times 6}=10.61(\mu\text{F})$$

对于低通滤波器，有：

$$\omega_c=2\pi f_c=\frac{R_2}{L}$$

即：

$$L=\frac{R_2}{2\pi f_c}=\frac{6}{2\pi\times 2.5\times 10^3}=382(\mu\text{H})$$ ◀

练习 6-16　如果图 16-39 中各扬声器的电阻为 8Ω 且 $C=10\mu$F，试计算 L 与交叉频率的值。

答案：0.64mH；1.989kHz

16.8　本章小结

1）传输函数 $\boldsymbol{H}(\omega)$ 为输出响应 $\boldsymbol{Y}(\omega)$ 与输入激励 $\boldsymbol{X}(\omega)$ 之比，即 $\boldsymbol{H}(\omega)=\boldsymbol{Y}(\omega)/\boldsymbol{X}(\omega)$。

2）频率响应是指传输函数随频率的变化关系。

3）分贝为对数增益的单位，如果功率增益为 G，则其等效的分贝值为 $G_{dB}=10\lg G$，如果电压（或电流）增益为 G，则其等效的分贝值为 $G_{dB}=20\lg G$。注意，dBm 是用分贝

(dB) 表示测量功率与1毫瓦 (1mW) 功率之比的缩写。

4) 波特图是传输函数的幅度与相位随频率变化的半对数直线，利用由 $\boldsymbol{H}(\omega)$ 的因式定义的转折频率可以绘制 H (单位为 dB) 与 ϕ (单位为度) 的渐近线。
5) 滤波器是一种通过 (或阻止) 某个频带信号而阻止 (或通过) 其他频带信号的电路，无源滤波器由电阻、电容与电感构成。
6) 常用的四类滤波器包括低通滤波器、高通滤波器、带通滤波器与带阻滤波器。
7) 低通滤波器仅允许频率低于截止频率 ω_c 的信号通过。
8) 高通滤波器仅允许频率高于截止频率 ω_c 的信号通过。
9) 带通滤波器仅允许频率在指定范围 ($\omega_1<\omega<\omega_2$) 以内的信号通过
10) 带阻滤波器仅允许频率在指定频率范围 ($\omega_1>\omega>\omega_2$) 以外的信号通过。
11) 如果在 PSpiee 软件的 AC Sweep 中设置电路响应的频率范围以及该范围内的扫描点数，则可以利用 PSpice 确定电路的频率响应。
12) 按键式电话机与交叉网络是滤波器的两个典型应用实例。按键式电话系统利用滤波器将不同频率的单音信号分离开，用于驱动电子交换机。交叉网络将不同频率范围的信号分离开，以便将其传送到不同的设备中，对音响系统而言，就是传送到低音喇叭与高音喇叭。

复习题

1 如果输出功率与输入功率之比为 1000∶1，则该比值用 dB 表示为，
(a) 3dB (b) 30dB
(c) 300dB (d) 1000dB

2 某网络中输入电压为 2mV，而输出电压为 4V，则用 dB 表示的电压增益为，
(a) −33dB (b) 33dB
(c) 66dB (d) 152dB

3 在幅度波特图中，因子 $1/(5+j\omega)^2$ 的斜率为：
(a) 20dB/十倍频程
(b) 40dB/十倍频程
(c) −40dB/十倍频程
(d) −20dB/十倍频程

4 在相位波特图中，$[1+j10\omega-\omega^2/25]^2$ 的斜率为：
(a) 45°/十倍频程 (b) 90°/十倍频程
(c) 135°/十倍频程 (d) 180°/十倍频程

5 如果高通滤波器的最大输出电压为 1V，则半功率点输出电压为，
(a) 0V (b) 0.707V
(c) 1V (d) 1.414V

6 在半功率点，滤波器的输出从最大值下降为，
(a) −10dB (b) −3dB
(c) 0dB (d) 3dB

7 某滤波器仅允许频率高过特定频率的信号通过，则该滤波器被称为，
(a) 低通 (b) 高通
(c) 带通 (d) 带阻

8 哪类滤波器可以用于选择无线广播电台的信号?
(a) 低通 (b) 高通
(c) 带通 (d) 带阻

9 某电压源为 RC 低通滤波器提供频率为 0~40kHz、幅度恒定的一个信号，负载电阻器电压最大的频率位于：
(a) dc (b) 10kHz
(c) 20kHz (d) 40kHz

10 带阻滤波器会衰减除调谐信号外的任意信号。
(a) 正确 (b) 错误

答案：1 (b)，2 (c)，3 (c)，4 (d)，5 (b)，6 (b)，7 (b)，8 (c)，9 (a)，10 (a)

习题

16.2 节

1 给定 X 为以下各值，试计算 $\lg X$ 的值：
(a) 10^{-4} (b) 46000
(c) 10^8 (d) 0.2114

2 若 $Y=\lg X$，试由 Y 确定 X
(a) 4 (b) 0.003

(c) 6.5 (d) −2.3

3 计算下列情况获得增益的分贝数：

(a) $P_{in}=6\text{mW}$，$P_{out}=100\text{mW}$

(b) $V_{in}=3\text{mV}$，$V_{out}=40\text{V}$

(c) $P_{in}=10\mu\text{W}$，$P_{out}=60\text{mW}$

(d) $V_{in}=300\mu\text{V}$，$V_{out}=8\text{V}$

4 当输入电压为20mV时，某放大器的输出电压为3.8V，则放大器的增益比多少？增益为多少分贝？

5 如果 H_{dB} 等于下列值，试计算相应的 $|\boldsymbol{H}(\omega)|$。

(a) 0.05dB (b) −6.2dB

(c) 104.7dB

6 如果 $\boldsymbol{H}(\omega)$ 等于下列各式，试确定 $\boldsymbol{H}(\omega)$ 在 $\omega=1\text{rad/s}$ 时的模值（单位为dB）与相位（单位为度）。

(a) 0.05 (b) 125

(c) $\dfrac{10\text{j}\omega}{2+\text{j}\omega}$ (d) $\dfrac{3}{1+\text{j}\omega}+\dfrac{6}{2+\text{j}\omega}$

7 某发射器的输出电路连接着功率表，表的读数为24W，则用dBm表示的功率为多少？

8 将下列功率表示为dBm形式：10μW，13mW以及50W。

9 将下列dBm值转换为功率：−5，6和40dBm。

10 给定系统如图16-41所示，试确定系统的整体增益，用dB表示。

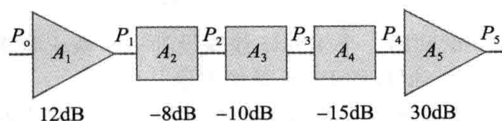


图16-41 习题10的电路原理图

11 如图16-42所示的三级系统，试计算系统的输出功率和系统总的功率增益，用dB表示。

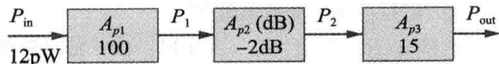


图16-42 习题11的电路原理图

12 某放大器输入功率为60mW，输出功率为10mW，试确定衰减dB数。

13 在特定频率，比率 V_{out}/V_{in} 为0.2，将该比率表示为dB。

14 放大器的功率增益为4，将其用dB表示。

16.3节

15 试计算如图16-43所示 RC 电路的传输函数 $\boldsymbol{V}_o/\boldsymbol{V}_i$，并利用 $\omega_o=1/RC$ 表示该传输函数。

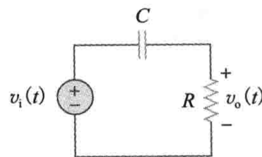


图16-43 习题15的电路原理图

16 试计算如图16-44所示 RL 电路的传输函数 $\boldsymbol{V}_o/\boldsymbol{V}_i$，并利用 $\omega_o=R/L$ 表示该传输函数。

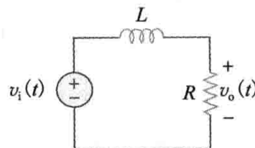


图16-44 习题16和习题34的电路原理图

17 给定电路如图16-45所示，试计算传输函数 $H(s)=V_o(s)/V_i(s)$。

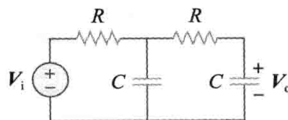


图16-45 习题17的电路原理图

18 试计算如图16-46所示电路的传输函数 $\boldsymbol{H}(\omega)$。

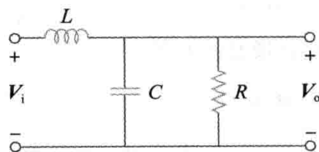


图16-46 习题18的电路原理图

19 所示的电路，按照上一题要求计算。

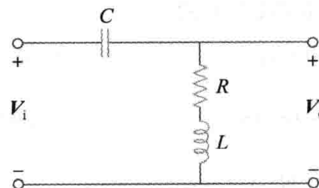


图16-47 习题19的电路原理图

20 试计算如图16-48所示的 RLC 电路的传输函数 $\boldsymbol{V}_o/\boldsymbol{V}_i$。

21 如图16-49所示电路，按照习题13的要求计算。

22 试计算如图16-50所示电路的传输函

数$H(\omega)$。

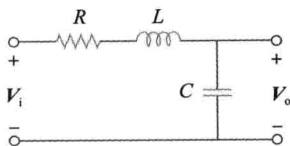


图 16-48 习题 20 的电路原理图

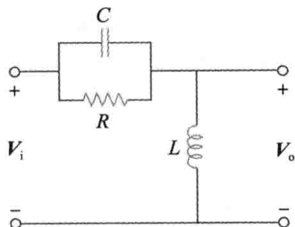


图 16-49 习题 21 的电路原理图

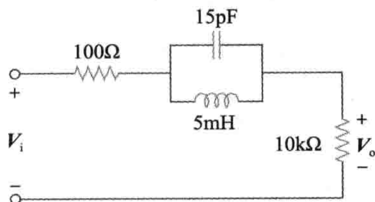


图 16-50 习题 22 的电路原理图

16.4 节

23 某阶梯网络的电压增益为

$$\boldsymbol{H}(\omega)=\frac{10}{(1+\mathrm{j}\omega)(10+\mathrm{j}\omega)}$$

试画出该增益的波特图。

24 试画出 $\boldsymbol{H}(\omega)=\dfrac{50}{\mathrm{j}\omega(5+\mathrm{j}\omega)}$ 的波特图。

25 试画出 $\boldsymbol{H}(\omega)=\dfrac{10+\mathrm{j}\omega}{\mathrm{j}\omega(2+\mathrm{j}\omega)}$ 的波特图。

26 传输函数为 $T(s)=\dfrac{s+1}{s(s+10)}$， $s=\mathrm{j}\omega$，试画出其幅度波特图与相位波特图。

27 试画出 $G(s)=\dfrac{s+1}{s^2(s+10)}$ 的波特图。

28 试画出 $\boldsymbol{H}(\omega)=\dfrac{50(\mathrm{j}\omega+1)}{\mathrm{j}\omega(-\omega^2+10\mathrm{j}\omega+25)}$ 的波特图。

29 试画出 $H(s)=\dfrac{40(s+1)}{(s+2)(s+10)}$， $s=\mathrm{j}\omega$ 的幅度波特图与相位波特图。

30 试画出 $G(s)=\dfrac{s}{(s+2)^2(s+1)}$， $s=\mathrm{j}\omega$ 的幅度波特图与相位波特图。

31 试画出 $G(s)=\dfrac{(s+2)^2}{s(s+5)^2(s+10)}$， $s=\mathrm{j}\omega$ 的波特图。

32 试画出 $\boldsymbol{T}(\omega)=\dfrac{10\mathrm{j}\omega(1+\mathrm{j}\omega)}{(10+\mathrm{j}\omega)(100+10\mathrm{j}\omega-\omega^2)}$ 的波特图。

33 试画出下列 $H(s)$ 的幅度波特图。

(a) $10/(s+1)$ (b) $(s+1)/(s+10)$

16.5 节

34 试证明图 16-44 所示电路为低通滤波器，并计算当 $L=2\text{mH}$ 且 $R=10\text{k}\Omega$ 时的转折频率 f_c。

35 试计算如图 16-51 所示电路的传输函数 $\boldsymbol{V}_o/\boldsymbol{V}_s$，并证明该电路为低通滤波器。

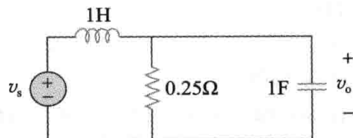


图 16-51 习题 35 的电路原理图

36 试确定低通滤波器 $\boldsymbol{H}(\omega)=\dfrac{4}{2+\mathrm{j}\omega 10}$ 的转折频率，试求 $\omega=2\text{rad/s}$ 时 $\boldsymbol{H}(\omega)$ 的增益（单位为 dB）与相位。

37 试确定如图 16-52 所示滤波器的类型，并计算转折频率 f_c。

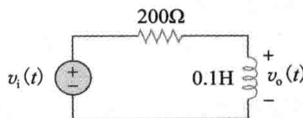


图 16-52 习题 37 的电路原理图

38 试利用一个 40mH 线圈设计一个截止频率为 5kHz 的 RL 低通滤波器。

39 某高通 RL 滤波器的截止频率为 100kHz，$L=40\text{mH}$，试计算 R。

40 试设计一个截止频率为 10kHz 与 11kHz 的 RLC 串联带通滤波器，假定 $C=80\text{pF}$，试计算 R、L 与 Q。

41 利用 300pF 的电容器，试设计一个截止频率为 2kHz 的 RC 高通滤波器。

42 试确定 $R=10\Omega$、$L=25\text{mH}$、$C=0.4\mu\text{F}$ 的 RLC 串联带通滤波器的频率范围，并计算其品质因数。

43 某 RLC 串联带阻滤波器的电路参数为：$R=2\text{k}\Omega$，$L=0.1\text{H}$，$C=40\text{pF}$，试计算：

(a) 中心频率， (b) 半功率频率，

(c) 品质因数。

44 试计算如图 16-53 所示带阻滤波器的带宽与中心频率。

45 试计算如图 16-54 所示滤波器的谐振频率，并

判断该滤波器是带通还是带阻滤波器。

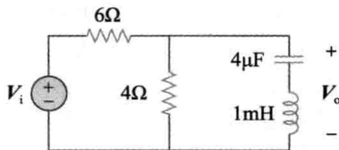


图 16-53　习题 44 的电路原理图

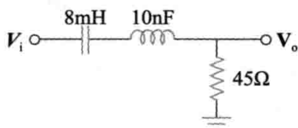


图 16-54　习题 45 的电路原理图

46　由 1.8kΩ 电阻与电容串联构成低通滤波器，若 $V_o/V_i=0.2$，试计算该电容的电抗值。

47　试计算如图 16-55 所示带通滤波器的带宽。

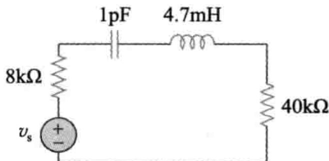


图 16-55　习题 47 的电路原理图

48　设计截止频率为 500Hz 的 RC 低通滤波器，令 $C=0.45\mu F$。利用计算机仿真证明验证该设计。

49　低通滤波器的输入电压为 20mV，对应的输出电压为 800μV，试计算该低通滤波器的增益（单位为 dB）。

16.6 节

50　试利用 PSpice 确定如图 16-56 所示电路的频率响应。

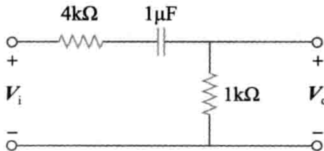


图 16-56　习题 50 和习题 56 的电路原理图

51　试利用 PSpice 确定如图 16-57 所示电路 $\mathbf{V}_o/\mathbf{I}_i$ 的幅频特性曲线与相频特性曲线。

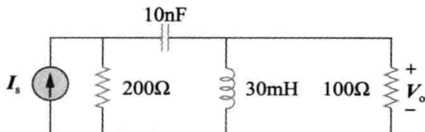


图 16-57　习题 51 和习题 57 的电路原理图

52　试画出如图 16-58 所示网络在频率区间 $0.1<f<100$Hz内的响应曲线，并确定该滤波器的类型以及计算 ω_0。

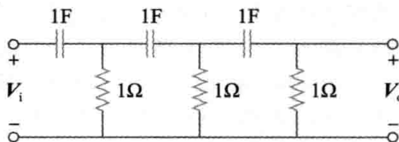


图 16-58　习题 52 的电路原理图

53　试利用 PSpice 绘制如图 16-59 所示电路中 $\mathbf{V}_o$ 的幅度波特图与相位波特图。

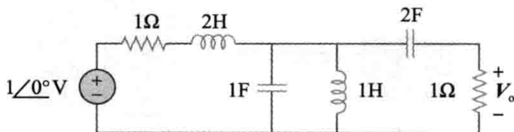


图 16-59　习题 53 的电路原理图

54　试利用 PSpice 绘制如图 16-60 所示电路的幅频特性曲线。

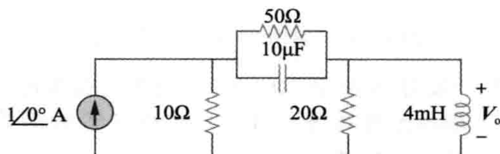


图 16-60　习题 54 的电路原理图

55　试利用 PSpice 绘制如图 16-61 所示电路的幅频特性曲线。

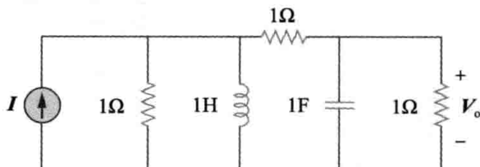


图 16-61　习题 55 的电路原理图

56　试利用 Multisim 绘制如图 16-56 所示电路的幅度波特图。

57　试利用 Multisim 重做习题 51。

58　试利用 Multisim 绘制如图 16-62 所示电路的波特图。

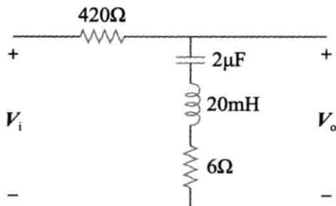


图 16-62　习题 58 的电路原理图

16.7节

59 在某紧急情况下，工程师需要构造一个 RC 高通滤波器，可供他使用为一个 10pF 电容，一个 30pF 电容，一个 1.8kΩ 电阻以及一个 3.3kΩ 电阻。试计算利用上述元件可能出现的最高截止频率。

60 *如图 16-63 所示的交叉电路是与低音扬声器相连的低通滤波器，试计算传输函数 $\mathbf{H}(\omega)=\mathbf{V}_o/\mathbf{V}_i$。

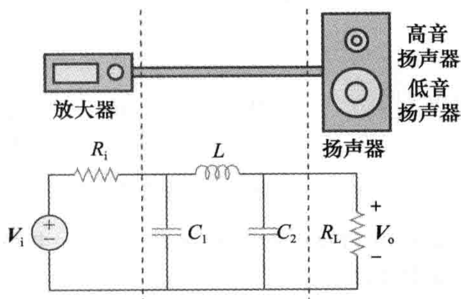


图 16-63 习题 60 的电路原理图

61 *如图 16-64 所示的交叉电路是与高音扬声器相连的高通滤波器，试确定传输函数 $\mathbf{H}(\omega)=\mathbf{V}_o/\mathbf{V}_i$。

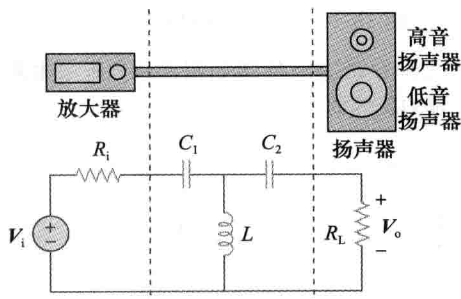


图 16-64 习题 61 的电路原理图

62 在某应用中需设计一个简单的 RC 低通滤波器来抑制高频噪声。如果期望的转折频率为 20kHz，且 $C=0.5\mu F$，试计算电阻值 R。

63 在放大器电路中需要采用一个简单的高通 RC 滤波器来阻隔直流成分，而通过时变成分，如果要求截止频率为 15Hz，$C=10\mu F$，试计算电阻值 R。

64 实际的 RC 滤波器应考虑电源和负载电阻的非理想特性，如图 16-65 所示的电路。令 $R=4k\Omega$，$C=40nF$，试确定以下两种情况下的截止频率：

(a) $R_s=0$，$R_L=\infty$；

(b) $R_s=1k\Omega$，$R_L=5k\Omega$

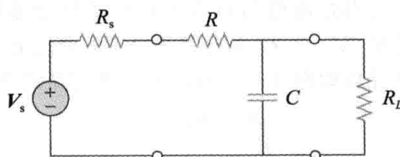


图 16-65 习题 64 的电路原理图

65 某低品质因数、双调谐带通滤波器如图 16-66所示，试利用 PSpice 绘制 $\mathbf{V}_o(\omega)$ 的幅度特性曲线。

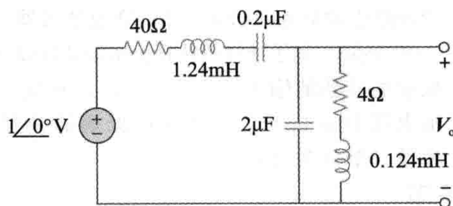


图 16-66 习题 65 的电路原理图

66 某卫星发射器的输出功率为 2kW，输入功率为 1W。试计算功率增益（单位为 dB）。

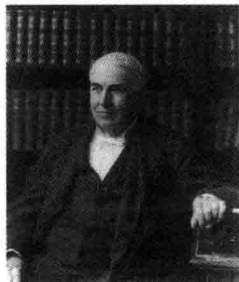
第17章
三相电路

社会总是没有准备好接受任何一项发明，每个新鲜事物一开始都会受到阻挠，发明者需要经过多年的努力才能让人们相信他的发明，又需要经过多年才能将发明引进。

托马斯·阿尔瓦·爱迪生

历史人物

爱迪生（Thomas Alva Edison，1847－1931）可能是美国最伟大的发明家，他拥有1093项发明专利，包括有历史意义的创造发明，比如白炽电灯泡、电极和第一个商业电影等。



托马斯·阿尔瓦·爱迪生
（图片由美国国会图书馆提供）

爱迪生生于俄亥俄州，是家里七个孩子中最小的一个，他不喜欢学校，只接受了三个月的正规教育。在家里由他母亲教他，但他很快就学会了自己阅读。1868年，爱迪生读了法拉第的一本书，激发了他的灵感。1876年，他迁居新泽西州的门罗公园，管理一个研究实验室，实验室拥有一批很好的工作人员，他的许多发明亦都出自这个实验室。他的实验室成为现代研究组织的典范。

由于爱迪生兴趣广泛并拥有大量的发明和专利，他开始建立工厂来制造他发明的产品。他设计了第一座发电站提供电力照明，以爱迪生作为典范和领导者的正规电子工程教育于19世纪80年代中叶开始兴起。

尼古拉·特斯拉（Nikola Tesla，1856－1943）是克罗地亚裔美国工程师，他的一些发明——例如感应电动机和第一个多相交流电源系统——极大地影响了交流电和直流电之争的尘埃落定，促进了交流电的应用。他还负责确定美国地区的交流供电系统的标准工作频率为60Hz。



尼古拉·特斯拉（图片由美国博物馆提供）

特斯拉出生于奥匈帝国（现在的克罗地亚）的一个牧师家庭。他有惊人的记忆力，并对数字特别感兴趣。1884年，特斯拉移民美国，首先为爱迪生工作。那时美国正处于“直流电一交流电之争”，以乔治·威斯汀豪斯（1846—1914）为首的一派主张用交流电，而以爱迪生为首一派的坚持采用直流电。特斯拉对交流电更有兴趣，因此他离开了爱迪生，加入威斯汀豪斯的队伍。通过努力，特斯拉的多相交流发电系统、传输和配电系统等发明被大家接受，并获得很高的声誉。他一生拥有700多个专利，他的其他发明还包括高压变压器（特斯拉线圈）和无线输送系统等。磁通密度的单位——特斯拉，就是以他的名字命名的。

17.1 引言

在本章之前，本书的内容都是围绕单相电路的。单相交流电力系统是发电机通过一对电线（传输线）与负载相连接，图 17-1a 所示为一个单相双线系统，图中 V_p（峰值，不是有效值）是一个电源电压的幅度，ϕ 是相位。实际应用中更常见的是如图 17-1b 所示的单相三线系统。该系统包括两个完全相同的电源（相同的振幅、相同的相位），通过两根外接线和一根中性线与两个负载相连接。例如，常见的家用供电系统就是单相三线系统，因为其终端电压具有相同的振幅和相同的相位。

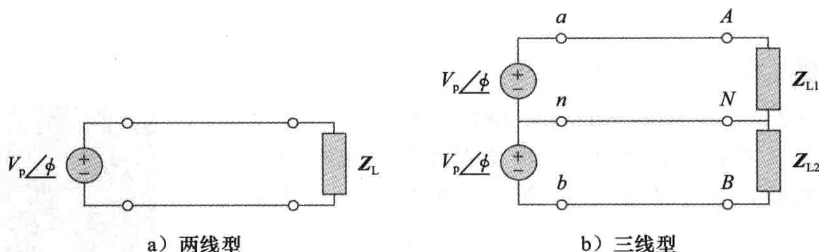


图 17-1　单相系统

几个交流电源工作在频率相同、相位不同的电路或系统中，称为多相（polyphase）的系统。图 17-2 所示为一个两相三线系统，图 17-3 所示为一个三相四线系统。与单相系统不同，两相系统是由一个包括两个相互垂直的绕组的发电机所构成，它产生的电压相位一个滞后于另一个 90°。同理，三相系统是由一个含有三个绕组的发电机产生的，绕组放置的方式使产生的三个电压源幅度和频率相同，但是相位彼此相差 120°。到目前为止，三相系统是应用最普遍、最经济的多相系统。本章将主要讨论三相系统。

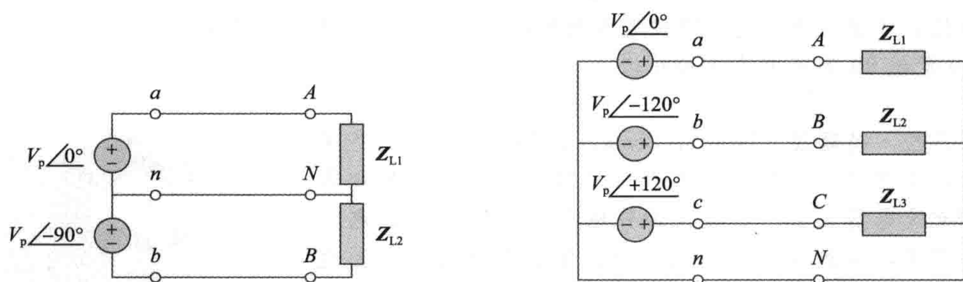


图 17-2　两相三线系统　　　图 17-3　三相四线系统

三相电路之所以重要，至少有三个原因。首先，几乎所有的供电厂产生并配送的都是三相电，其工作频率在美国是 60Hz（或 $\omega=377\text{rad/s}$），而在世界其他一些地区是 50Hz（$\omega=314\text{rad/s}$）（参见表 14-1）。当需要单相或者两相输入时，可以从三相系统中提取，而不需要单独去发电。即使需要超过三相时，例如铝厂为了将铝熔化，需要 48 相电源，可以通过对所提供的三相电源进行一定处理而获得。其次，三相系统的瞬时功率是恒定的（而非波动的），详见 17.8 节的讨论。这样就可以实现均匀的功率传输，并减少三相机器的振动。最后，在提供相同功率的前提下，三相系统比单相系统更为经济，而且三相系统所需的传输线数量少于等效的单相系统所需的传输线数量。

本章将首先讨论平衡三相电压，之后分析平衡三相系统的四种可能结构，然后讨论非平衡三相系统。接着学习如何利用 PSpice 软件分析对称和非对称三相系统。最后，讨论本章所讲的概念在三相功率测量以及民用供电系统中的实际应用问题。

17.2 三相发电机

三相电压一般是由三相交流发电机产生（经常被称为交流发电机（alternator）），交流发电机的横截面如图 17-4 所示。发电机主要由转动磁铁（称为转子）及其周围环绕的静止绕组（称为定子）组成，端子 a-a'、b-b' 和 c-c' 的三个分离的绕组或线圈，围绕定子 120°等间隔排列。例如，绕组 a-a' 表示线圈的一端进入纸面，另一端从纸面出来。随着转子的转动，其磁场“切割”来自三个线圈的磁通而在线圈中产生感应电压。因为线圈彼此间隔 120°，因此线圈中产生的感应电压的幅度相等，相位差 120°，如图 17-5 所示。由于每个线圈本身可以看作一个单相发电机，所以三相发电机既可以给单相负载供电，也可以给三相负载供电。图 17-6 所示是典型的三相电能传输结构。

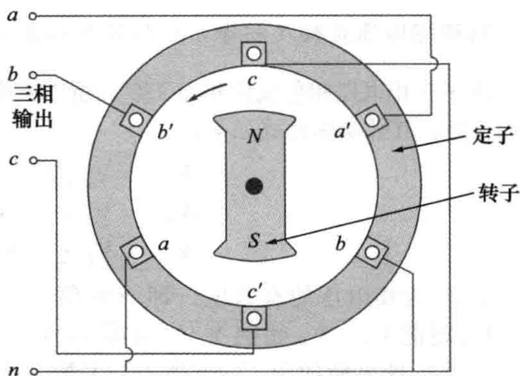


图 17-4 三相发电机

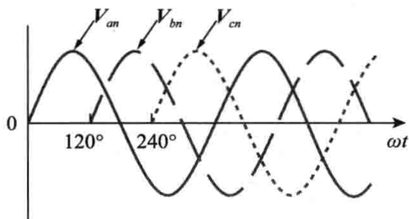


图 17-5 相位彼此相差 120°的发电机输出电压

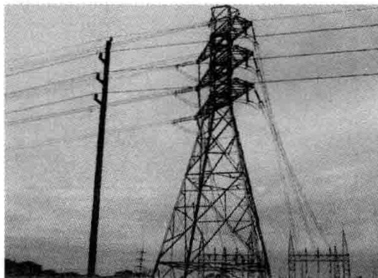
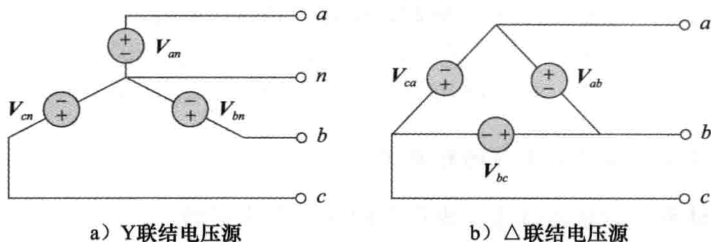


图 17-6 三相电能传输
（© Sarhan M. Musa）

典型的三相系统是由通过三条或四条线路（即传输线）与负载相连的三个电压源组成的（三相电流源很少见）。三相系统与三个单相电路等效。三相系统中的电压源既可以是 Y 联结，如图 17-7a 所示，也可以是△联结，如图 17-7b 所示。



a）Y联结电压源　　b）△联结电压源

图 17-7 三相电压源

17.3 对称三相电压

首先讨论图 17-7(a) 所示的 Y 联结电压源。电压 $\mathbf{V}_{an}$、$\mathbf{V}_{bn}$ 和 $\mathbf{V}_{cn}$ 分别表示线路 a、b、c 和中性线 n 之间的电压，称为相电压（phase voltage）。如果这些电压源具有相同的幅度和频率 ω，但相位彼此相差 120°，则称这组电压是平衡的或对称的。对称三相电表示

$$\mathbf{V}_{an}+\mathbf{V}_{bn}+\mathbf{V}_{cn}=0 \tag{17-1}$$

$$|\mathbf{V}_{an}|=|\mathbf{V}_{bn}|=|\mathbf{V}_{cn}| \tag{17-2}$$

因此，

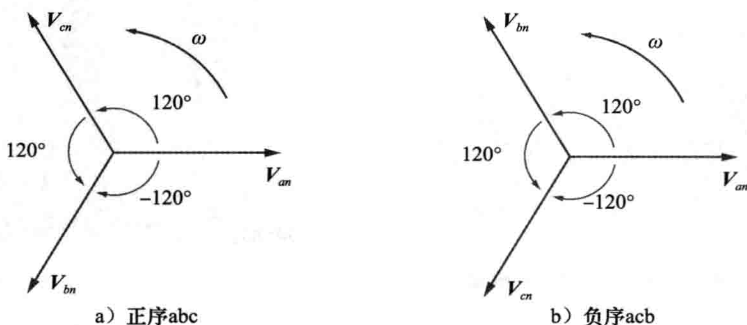
对称相电压是幅度相等，相位彼此相差120°的电压。

由于三相电压相位彼此相差120°，所以就会出现两种可能的组合方式。一种是图17-8a所示的正序，其数学表达式如下：

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{V}_{an}&=V_p\angle 0^\circ\\ \mathbf{V}_{bn}&=V_p\angle -120^\circ\\ \mathbf{V}_{cn}&=V_p\angle -240^\circ=V_p\angle +120^\circ\end{aligned}} \tag{17-3}$$

其中，V_p为相电压的有效值，即rms值[1]。这种组合称为abc顺序或正序。按照这种相序，$\mathbf{V}_{an}$超前$\mathbf{V}_{bn}$，$\mathbf{V}_{bn}$超前$\mathbf{V}_{cn}$。当图17-4中转子沿逆时针方向转动时，就会产生abc顺序。另外一种可能如图17-8b所示，其数学表达式为：

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{V}_{an}&=V_p\angle 0^\circ\\ \mathbf{V}_{cn}&=V_p\angle -120^\circ\\ \mathbf{V}_{bn}&=V_p\angle -240^\circ=V_p\angle +120^\circ\end{aligned}} \tag{17-4}$$



a）正序abc　　b）负序acb

图17-8 相序

这种组合称为acb顺序，或称负序。对于这种相序，$\mathbf{V}_{an}$超前$\mathbf{V}_{cn}$，$\mathbf{V}_{cn}$超前$\mathbf{V}_{bn}$。当图17-4中转子沿顺时针方向转动时，就会产生acb顺序。容易证明，式（17-3）与式（17-4）中的电压满足式（17-1）与式（17-2）。例如，由式（17-3）可得：

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{an}+\mathbf{V}_{bn}+\mathbf{V}_{cn}&=V_p\angle 0^\circ+V_p\angle -120^\circ+V_p\angle +120^\circ\\ &=V_p(1.0-0.5-j0.866-0.5+j0.866)=0\end{aligned} \tag{17-5}$$

相序是指电压经过各自最大值的时间次序。

相序是由相量图中相量经过某一固定点的次序来决定的[2]。

在图17-8a中，当相量以频率ω沿逆时针方向转动时，它们以次序$abcabca\cdots\cdots$经过水平轴，因此，相序为abc或者bca或cab。同理，图17-8b中的相量沿逆时针方向转动时，它们经过水平轴的次序为$acbacba\cdots\cdots$，即acb顺序。相序在三相电配电系统中非常重要。比如，相序决定了与电源相连接的电动机的转动方向[3]。

---

[1] 按照电力系统的一般习惯，除非特别说明，本章出现的电压与电流均指有效值。

[2] 注意：相序有时候也会看成相电压随时间变化达到峰值时的顺序。

[3] 提示：随着时间的增加，各相量（即正弦矢量）以角速度ω转动。

与发电机的联结方式类似，根据终端应用的不同，三相负载的联结也可以分为Y联结和△联结。Y联结负载如图17-9a所示，△联结负载如图17-9b所示。图17-9a中的中性线的有无取决于该系统是四线系统还是三线系统（当然，中性线连接对于△联结在拓扑结构上是不可能的）。如果各相负载阻抗的大小或相位不相等，则相应的Y联结或△联结负载称为非平衡的或非对称的）。

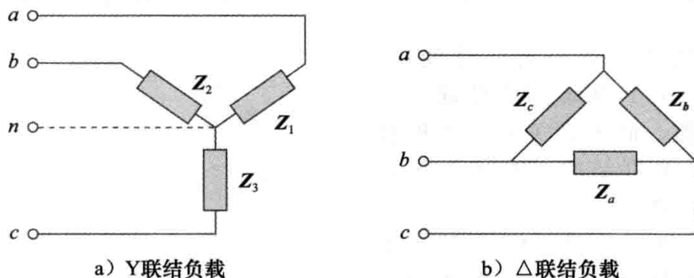


图17-9　三相负载联结的两种可能结构

对称负载是指各相阻抗在大小和相位上都相等的负载。

对于对称Y联结负载而言[⊖]：

$$\boldsymbol{Z}_1=\boldsymbol{Z}_2=\boldsymbol{Z}_3=\boldsymbol{Z}_Y \tag{17-6}$$

其中，$\boldsymbol{Z}_Y$ 为每一相的负载阻抗。对于△联结负载而言：

$$\boldsymbol{Z}_a=\boldsymbol{Z}_b=\boldsymbol{Z}_c=\boldsymbol{Z}_\triangle \tag{17-7}$$

其中，$\boldsymbol{Z}_\triangle$ 为每一相的负载阻抗。由式（11-70）可知

$$\boldsymbol{Z}_\triangle=3\boldsymbol{Z}_Y \quad 或 \quad \boldsymbol{Z}_Y=\frac{1}{3}\boldsymbol{Z}_\triangle \tag{17-8}$$

因此，式（17-8）可实现Y联结负载与△联结负载之间的相互转换。

由于三相电源与三相负载都可以采用Y联结或△联结，所以会出现四种可能的联结情况：

Y-Y联结，即Y联结的电源与Y联结的负载相连。

Y-△联结

△-△联结

△-Y联结

以下几节将逐一讨论这些可能的联结结构。

例17-1 试确定以下电压组的相序：

$$v_{an}(t)=200\cos(\omega t+10°)$$
$$v_{bn}(t)=200\cos(\omega t-230°)$$
$$v_{cn}(t)=200\cos(\omega t-110°)$$

解：将已知电压用相量形式表示为

$$\boldsymbol{V}_{an}=200\underline{/10°},\boldsymbol{V}_{bn}=200\underline{/-230°},\boldsymbol{V}_{cn}=200\underline{/-110°}$$

由此可见，$\boldsymbol{V}_{an}$ 超前 $\boldsymbol{V}_{cn}$ 120°，$\boldsymbol{V}_{cn}$ 超前 $\boldsymbol{V}_{bn}$ 120°。因此，是 acb 相序。◀

练习17-1　假定为正序（abc），如果已知 $V_{bn}=110\underline{/30°}$，试求 V_{an} 与 V_{cn}。

答案：$110\underline{/150°}$；$110\underline{/-90°}$

⊖ 提示：Y联结负载由与中性线节点相连接的三个阻抗组成，而△联结负载由连接成回路的三个阻抗组成。在两种联结情况下，三个阻抗相等时称负载是平衡的或对称的。

17.4 对称 Y-Y 联结

对于任何对称的三相系统，都可以化简为等效的 Y-Y 联结系统，也是最容易分析的系统。因此本节首先讨论 Y-Y 系统。对该系统的分析是解决所有对称三相系统的关键所在。

对称 Y-Y 系统是一个由对称 Y 联结电源与对称 Y 联结负载构成的三相系统。

Y-Y 系统被公共事业公司广泛使用，原因有二。第一，Y-Y 联结为中性线在电源处接地提供方便，而不必关心功率的传输方向。第二，Y-Y 联结的成本比△-Y 联结或△-△联结的成本小一些。

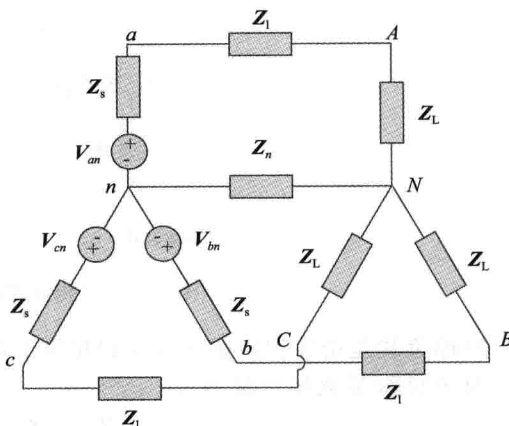


图 17-10 包括电源阻抗、输电线阻抗和负载阻抗在内的对称四线 Y-Y 系统

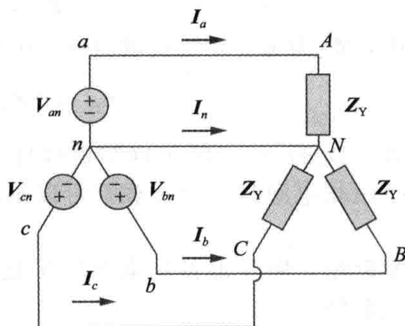


图 17-11 对称 Y-Y 联结

考虑图 17-10 所示为对称四线 Y-Y 系统。其中 Y 联结负载与 Y 联结电源相连接。假定负载是对称的，即各负载阻抗相等。虽然阻抗 $\mathbf{Z}_Y$ 表示各相的负载阻抗，但它可以看作各相的源阻抗 $\mathbf{Z}_s$、线阻抗 $\mathbf{Z}_l$ 和负载阻抗 $\mathbf{Z}_L$ 之和，因为这三个阻抗是串联的。如图 17-10 所示，$\mathbf{Z}_s$ 表示发电机各相绕组的内阻抗，$\mathbf{Z}_l$ 表示连接电源相与负载相之间的线阻抗，$\mathbf{Z}_L$ 表示各相的负载阻抗，$\mathbf{Z}_n$ 为中性线阻抗。因此，一般有：

$$\mathbf{Z}_Y = \mathbf{Z}_s + \mathbf{Z}_\ell + \mathbf{Z}_L \tag{17-9}$$

与 $\mathbf{Z}_L$ 相比，$\mathbf{Z}_s$、$\mathbf{Z}_l$ 与 Z_n 通常是非常小的，因此，如果没有给出电源阻抗或线阻抗，可以假定 $\mathbf{Z}_Y = \mathbf{Z}_L$。无论怎样，总可以将阻抗合并在一起，如图 17-10 所示的 Y-Y 系统即可化简为图 17-11 所示的系统。

对于正序而言，相电压（即输电线与中性线之间的电压）⊖为

$$\mathbf{V}_{an} = V_p \angle 0^\circ$$

$$\mathbf{V}_{bn} = V_p \angle -120^\circ \tag{17-10}$$

$$\mathbf{V}_{cn} = V_p \angle +120^\circ$$

而输电线与输电线之间，简称线电压。线电压 $\mathbf{V}_{ab}$、$\mathbf{V}_{bc}$ 和 $\mathbf{V}_{ca}$ 是与相电压有关的⊜。例如，

$$\mathbf{V}_{ab} = \mathbf{V}_{an} + \mathbf{V}_{nb} = \mathbf{V}_{an} - \mathbf{V}_{bn} = V_p \angle 0^\circ - V_p \angle -120^\circ$$

$$= V_p\left(1 + \frac{1}{2} + \mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}V_p \angle 30^\circ \tag{17-11a}$$

同理，可以得到：

$$\mathbf{V}_{bc} = \mathbf{V}_{bn} - \mathbf{V}_{cn} = \sqrt{3}V_p \angle -90^\circ \tag{17-11b}$$

$$\mathbf{V}_{ca} = \mathbf{V}_{cn} - \mathbf{V}_{an} = \sqrt{3}V_p \angle -210^\circ \quad 或 \quad 150^\circ \tag{17-11c}$$

因此，线电压 $\mathbf{V}_L$ 的幅度是相电压 $\mathbf{V}_p$ 的$\sqrt{3}$倍，即

⊖ 我们使用术语“相”来指 Y 和△联结中每一个分支，包括电源或者负载。

⊜ 线电压指线之间的电压，相电压是相阻抗间电压。相电压与中性点有关，线电压与另一根线有关。

$$\boxed{V_L = \sqrt{3}V_p} \tag{17-12}$$

其中，

$$V_p = |\boldsymbol{V}_{an}| = |\boldsymbol{V}_{bn}| = |\boldsymbol{V}_{cn}| \tag{17-13}$$

且

$$V_L = |\boldsymbol{V}_{ab}| = |\boldsymbol{V}_{bc}| = |\boldsymbol{V}_{ca}| \tag{17-14}$$

线电压超前相应的相电压 30°，图 17-12a 也可以说明这种情况，图中还指出如何由相电压来确定线电压 $\boldsymbol{V}_{ab}$，而图 17-12b 所示为三个线电压的相量图。由该图可见，$\boldsymbol{V}_{ab}$ 超前 $\boldsymbol{V}_{bc}$ 120°，$\boldsymbol{V}_{bc}$ 超前 $\boldsymbol{V}_{ca}$ 120°，所以与相电压一样，线电压之和为 0。

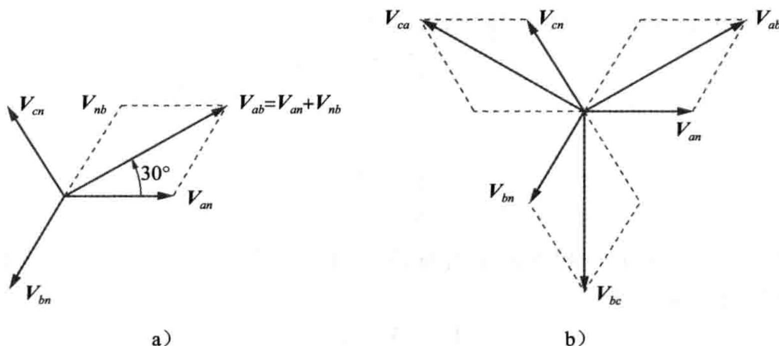


图 17-12 说明线电压与相电压之间关系的相量图

对于图 17-11 中各相应用 KVL，得到线电流为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{I}_a &= \boldsymbol{V}_{an}/\boldsymbol{Z}_Y = \frac{V_p \angle 0^\circ}{Z_Y} \\
\boldsymbol{I}_b &= \boldsymbol{V}_{bn}/\boldsymbol{Z}_Y = \frac{V_{an} \angle -120^\circ}{Z_Y} = \boldsymbol{I}_a \angle -120^\circ \\
\boldsymbol{I}_c &= \boldsymbol{V}_{cn}/\boldsymbol{Z}_Y = \frac{V_{an} \angle -240^\circ}{Z_Y} = \boldsymbol{I}_a \angle -240^\circ \quad \text{或} \quad \boldsymbol{I}_a \angle +120^\circ
\end{aligned} \tag{17-15}$$

可以推断出，线电流之和为 0，即：

$$\boldsymbol{I}_a + \boldsymbol{I}_b + \boldsymbol{I}_c = 0 \tag{17-16}$$

所以

$$\boldsymbol{I}_n = -(\boldsymbol{I}_a + \boldsymbol{I}_b + \boldsymbol{I}_c) = 0 \tag{17-17a}$$

或者

$$\boldsymbol{V}_{nN} = \boldsymbol{Z}_n \boldsymbol{I}_n = 0 \tag{17-17b}$$

也就是说，中性线两端的电压为零。因此，去掉中性线并不会对系统产生任何影响。实际上，在长距离电力传输中，多个三线系统的导体就是利用大地本身作为系统的中性线导体。以这种方式设计的电力系统的所有关键点都要良好接地，以保证安全。

线电流是各条线路中的电流，而相电流则是电源或负载的各相电流。但是在 Y-Y 系统中，线电流与相电流是相等的，习惯上总是假定线电流是由电源流向负载的，所以只用一个下标字母表示线电流。

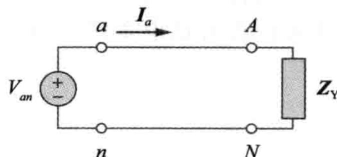


图 17-13 单相等效电路

分析对称 Y-Y 系统的另一种方法是按每一相来计算。首先看其中一相，例如 a 相，其单相等效电路如图 17-13 所示。通过单相分析，得到线电流 $\boldsymbol{I}_a$ 为

$$\boxed{\boldsymbol{I}_a = \boldsymbol{V}_{an}/\boldsymbol{Z}_Y} \tag{17-18}$$

由 $\boldsymbol{I}_a$ 以及相序关系，可以确定其他线电流。因此，只要系统

是对称的，仅分析其中一相即可，即使在没有中性线的情况下，对三线系统也可以采用相同的分析方法。

例 17-2 试计算图 17-14 所示三线 Y－Y 系统的线电流。

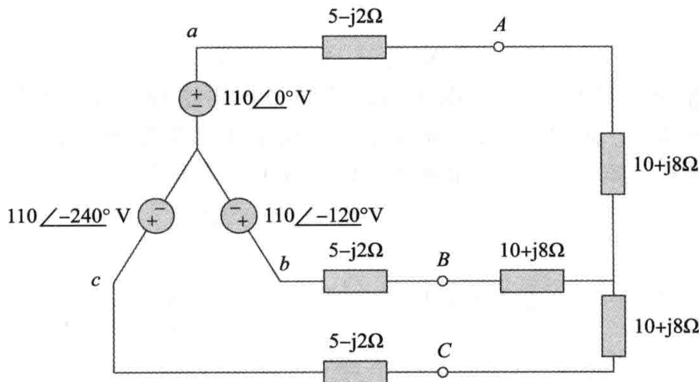


图 17-14 例 17-2 和 17-6 的三线 Y－Y 系统

解：如图 17-14 所示的三相电路是对称的，可以用 17-13 所示的单相等效电路来代替。由单相电路分析可以确定 $\boldsymbol{I}_a$ 为

$$\boldsymbol{I}_a = \boldsymbol{V}_{an}/\boldsymbol{Z}_Y$$

其中 $\boldsymbol{Z}_Y=(5-j2)+(10+j8)=15+j6=16.155\angle 21.8^\circ$（Ω），

因此，

$$\boldsymbol{I}_a = \frac{110\angle 0^\circ}{16.155\angle 21.8^\circ} = 6.81\angle -21.8^\circ(\text{A})$$

由于图 17-14 的源电压是正序的，所以线电流也是正序的，因此：

$$\boldsymbol{I}_b = \boldsymbol{I}_a\angle -120^\circ = 6.81\angle -141.8^\circ(\text{A})$$

$$\boldsymbol{I}_c = \boldsymbol{I}_a\angle -240^\circ = 6.81\angle -261.8^\circ(\text{A}) = 6.81\angle 98.2^\circ(\text{A})$$ ◀

练习 17-2 各相阻抗为 $0.4+j0.3\Omega$ 的 Y 联结对称三相发电机，与各相负载阻抗为 $24+j19\Omega$的 Y 联结对称负载相连。连接发电机与负载的线路阻抗为每相 $0.6+j0.7\Omega$，假定电源电压为正序，并且 $\boldsymbol{V}_{an}=120\angle 30^\circ$，试求：(a) 线电压；(b) 线电流。

答案：(a) $207.85\angle 60^\circ$（V），$207.85\angle -60^\circ$（V），$207.85\angle -180^\circ$（V）；(b) $3.75\angle -8.66^\circ$（A），$3.75\angle -128.66^\circ$（A），$3.75\angle -248.66^\circ$（A）

17.5 对称 Y-△联结

供电厂构建 Y-△变压器组是 Y-△联结的一个典型应用（变压器将在下一章介绍）。这种连接可以同时用于单相和三相负载。

对称 Y-△系统是指由对称 Y 联结电源与对称△联结负载构成的系统。

对称 Y-△系统如图 17-15 所示[⊖]。其中电源是 Y 联结的，而负载是△联结。显然地，该系统没有从电源到负载的中性线。假定电源为正序，则各相电压为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}_{an} &= V_p\angle 0^\circ \\ \boldsymbol{V}_{bn} &= V_p\angle -120^\circ \\ \boldsymbol{V}_{cn} &= V_p\angle +120^\circ\end{aligned} \tag{17-19}$$

⊖ 这种系统是实际中使用最多的三相系统，因为三相电源通常是 Y 联结的，而三相负载通常是△联结的。

由 17-4 节可知，线电压为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}_{ab} &= \sqrt{3}V_p \angle 30^\circ = \boldsymbol{V}_{AB} \\ \boldsymbol{V}_{bc} &= \sqrt{3}V_p \angle -90^\circ = \boldsymbol{V}_{BC} \\ \boldsymbol{V}_{ca} &= \sqrt{3}V_p \angle -210^\circ \quad \text{或} \quad \sqrt{3}V_p \angle +150^\circ = \boldsymbol{V}_{CA}\end{aligned} \tag{17-20}$$

由此可见，在该系统结构中，线电压等于负载阻抗两端的电压。由这些电压可以确定各相电流为

$$\boldsymbol{I}_{AB} = \boldsymbol{V}_{AB}/\boldsymbol{Z}_\triangle, \quad \boldsymbol{I}_{BC} = \boldsymbol{V}_{BC}/\boldsymbol{Z}_\triangle, \quad \boldsymbol{I}_{CA} = \boldsymbol{V}_{CA}/\boldsymbol{Z}_\triangle \tag{17-21}$$

上述负载电流具有相同的幅度，但相位相差 120°。

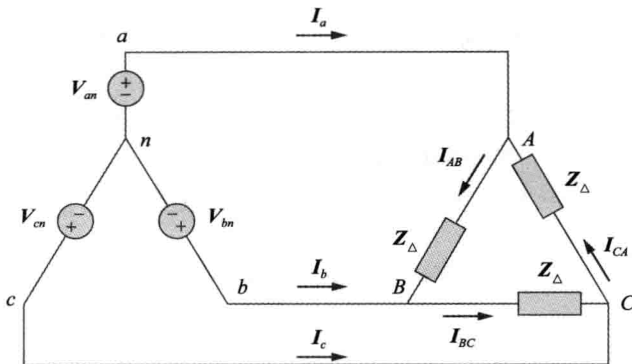


图 17-15　对称 Y-△联结

求解相电流的另一种方式是应用 KVL。例如，对回路 $aABbna$ 应用 KVL，可以得到：即：

$$-\boldsymbol{V}_{an} + \boldsymbol{Z}_\triangle \boldsymbol{I}_{AB} + \boldsymbol{V}_{bn} = 0$$

$$\boldsymbol{I}_{AB} = \frac{\boldsymbol{V}_{an} - \boldsymbol{V}_{bn}}{\boldsymbol{Z}_\triangle} = \frac{\boldsymbol{V}_{ab}}{\boldsymbol{Z}_\triangle} = \frac{\boldsymbol{V}_{AB}}{\boldsymbol{Z}_\triangle} \tag{17-22}$$

与式（17-21）一样。这是求解相电流的更一般的方法。

在节点 A、B、C 处应用 KCL，即可由相电流求得线电流，于是：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{I}_a &= \boldsymbol{I}_{AB} - \boldsymbol{I}_{CA} \\ \boldsymbol{I}_b &= \boldsymbol{I}_{BC} - \boldsymbol{I}_{AB} \\ \boldsymbol{I}_c &= \boldsymbol{I}_{CA} - \boldsymbol{I}_{BC}\end{aligned} \tag{17-23}$$

因为，

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{I}_{CA} = \boldsymbol{I}_{AB} \angle -240^\circ, \\ &\boldsymbol{I}_a = \boldsymbol{I}_{AB} - \boldsymbol{I}_{CA} = \boldsymbol{I}_{AB}(1 - 1\angle -240^\circ) = \boldsymbol{I}_{AB}(1 + 0.5 - \mathrm{j}0.866) = \boldsymbol{I}_{AB}\sqrt{3}\angle -30^\circ(\mathrm{A})\end{aligned} \tag{17-24}$$

表明线电流 I_L 的幅度是相电流 I_P 幅度的$\sqrt{3}$倍，即

$$\boxed{I_L = \sqrt{3} I_p} \tag{17-25}$$

其中，

$$I_L = |\boldsymbol{I}_a| = |\boldsymbol{I}_b| = |\boldsymbol{I}_c| \tag{17-26}$$

且

$$I_p = |\boldsymbol{I}_{AB}| = |\boldsymbol{I}_{BC}| = |\boldsymbol{I}_{CA}| \tag{17-27}$$

而且，在假定正序下，线电流较其对应的相电流滞后 30°。图 17-16 是说明相电流与线电流之间关系的相量图。

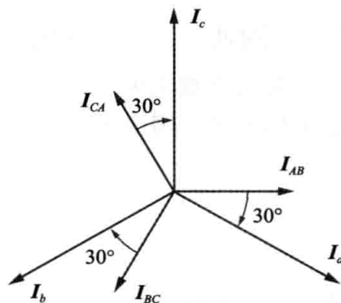


图 17-16　说明相电流和线电流之间关系的相量图

分析 Y-△电路的另一种方法是将△联结的负载转换为等效的 Y 联结负载。由式（11-70）给出的△-Y 转换公

式，可得：

$$\boxed{\boldsymbol{Z}_{\mathrm{Y}} = \frac{1}{3}\boldsymbol{Z}_{\triangle}} \tag{17-28}$$

转换后即可得到如图 17-11 所示的 Y-Y 系统。图 17-15 所示的 Y-△系统可以用图 17-17 所示的单相等效电路代替。这样只需计算线电流，再利用式（17-25）以及各相电流超前其对应的线电流 30°的规律确定相电流。

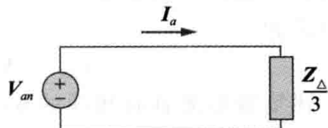


图 17-17 对称 Y-△电路的单相等效电路

例 17-3 某对称 abc 相序 Y 联结电源，其 $\boldsymbol{V}_{an}=100\,\underline{/10^\circ}$ V，与一个各相阻抗为 (8+j4)Ω 的对称△联结负载相连，试计算相电流与线电流。

解：本例可以用两种方法求解：

方法 1：负载阻抗为

$$\boldsymbol{Z}_{\triangle} = 8 + \mathrm{j}4 = 8.944\,\underline{/26.57^\circ}(\Omega)$$

如果相电压 $\boldsymbol{V}_{an}=100\,\underline{/10^\circ}$，则线电压为：

$$\boldsymbol{V}_{ab} = \boldsymbol{V}_{an}\sqrt{3}\,\underline{/30^\circ} = 100\sqrt{3}\,\underline{/(10^\circ + 30^\circ)} = \boldsymbol{V}_{AB}$$

即

$$\boldsymbol{V}_{AB} = 173.2\,\underline{/40^\circ}(\mathrm{V})$$

相电流为

$$\boldsymbol{I}_{AB} = \boldsymbol{V}_{AB}/\boldsymbol{Z}_{\triangle} = \frac{173.2\,\underline{/40^\circ}}{8.944\,\underline{/26.57^\circ}} = 19.36\,\underline{/13.43^\circ}(\mathrm{A})$$
$$\boldsymbol{I}_{AB} = \boldsymbol{I}_{AB}\,\underline{/-120^\circ} = 19.36\,\underline{/-106.57^\circ}(\mathrm{A})$$
$$\boldsymbol{I}_{CA} = \boldsymbol{I}_{AB}\,\underline{/+120^\circ} = 19.36\,\underline{/133.43^\circ}(\mathrm{A})$$

线电流为

$$\boldsymbol{I}_a = \boldsymbol{I}_{AB}\sqrt{3}\,\underline{/-30^\circ} = \sqrt{3}(19.36)\,\underline{/(13.43^\circ - 30^\circ)} = 33.53\,\underline{/-17.57^\circ}(\mathrm{A})$$
$$\boldsymbol{I}_b = \boldsymbol{I}_a\,\underline{/-120^\circ} = 33.53\,\underline{/-136.57^\circ}(\mathrm{A})$$
$$\boldsymbol{I}_c = \boldsymbol{I}_a\,\underline{/+120^\circ} = 33.53\,\underline{/103.43^\circ}(\mathrm{A})$$

方法 2：由单相电路分析，可得：

$$\boldsymbol{I}_a = \frac{\boldsymbol{V}_{an}}{\boldsymbol{Z}_{\triangle}/3} = \frac{100\,\underline{/10^\circ}}{2.981\,\underline{/26.57^\circ}} = 33.54\,\underline{/-16.57^\circ}(\mathrm{A})$$

与方法 1 所得结果相同。其他线电流可以利用 abc 相序确定。◀

练习 17-3 对称 Y 联结电源的一个线电压为 $\boldsymbol{V}_{ab}=180\,\underline{/-20^\circ}$ V，如果该电源与$20\,\underline{/40^\circ}$的△负载相连，在 abc 相序情况下，求相电流与线电流。

答案：$9\,\underline{/-60^\circ}$；$9\,\underline{/-180^\circ}$；$9\,\underline{/60^\circ}$；$15.59\,\underline{/-90^\circ}$；$15.59\,\underline{/-210^\circ}$；$15.59\,\underline{/-30^\circ}$

17.6 对称△－△联结

电源与负载均为△联结的系统如图 17-18 所示。我们的目标是确定相电流与线电流。假定采用正序，则△联结电源的相电压为：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}_{ab} &= V_{\mathrm{p}}\,\underline{/0^\circ}\\ \boldsymbol{V}_{bc} &= V_{\mathrm{p}}\,\underline{/-120^\circ}\\ \boldsymbol{V}_{ca} &= V_{\mathrm{p}}\,\underline{/+120^\circ}\end{aligned} \tag{17-29}$$

对称△－△系统是指电源与负载均为对称△联结的系统。

线电压与相电压相同。如图 17-18 所示系统，假定没有输电线阻抗，则△联结电源的

相电压等于负载阻抗两端的电压，即：

$$\mathbf{V}_{ab}=\mathbf{V}_{AB},\quad \mathbf{V}_{bc}=\mathbf{V}_{BC},\quad \mathbf{V}_{ca}=\mathbf{V}_{CA} \tag{17-30}$$

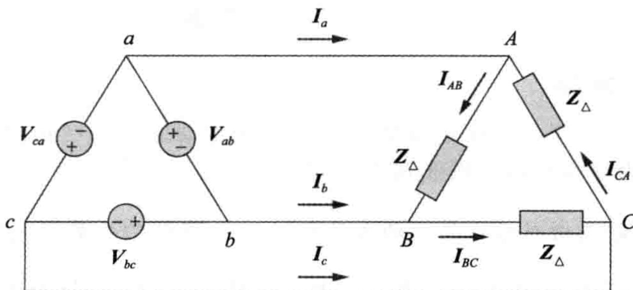


图 17-18 对称△－△联结

因此，相电流为：

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_{AB}&=\mathbf{V}_{AB}/\mathbf{Z}_{\triangle}=\mathbf{V}_{ab}/\mathbf{Z}_{\triangle}\\ \mathbf{I}_{BC}&=\mathbf{V}_{BC}/\mathbf{Z}_{\triangle}=\mathbf{V}_{bc}/\mathbf{Z}_{\triangle}\\ \mathbf{I}_{CA}&=\mathbf{V}_{CA}/\mathbf{Z}_{\triangle}=\mathbf{V}_{ca}/\mathbf{Z}_{\triangle}\end{aligned} \tag{17-31}$$

与前一节相同，负载为△联结，因此前一节推导的部分公式在这里仍然使用。在节点 A、B、C 处应用 KCL，即可由相电流确定线电流，即：

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_a&=\mathbf{I}_{AB}-\mathbf{I}_{CA}\\ \mathbf{I}_b&=\mathbf{I}_{BC}-\mathbf{I}_{AB}\\ \mathbf{I}_c&=\mathbf{I}_{CA}-\mathbf{I}_{BC}\end{aligned} \tag{17-32}$$

而且，如前一章所述，各线电流较其对应的相电流滞后 30°，线电流 I_L 的幅度是相电流 I_p 幅度的$\sqrt{3}$倍：

$$I_L=\sqrt{3}I_p \tag{17-33}$$

分析△-△电路的另一种方法是将△联结电源与负载转换为等效的 Y 联结。已知 $\mathbf{Z}_Y=\mathbf{Z}_{\triangle}/3$，下一节介绍将△联结的电源转换为 Y 联结电源的方法。

△-△联结适用于三线 240/120V。这种联结方式通常是由三个单相单元构成。一般来说，只有当三相负载远大于单相负载时，才使用这种联结方式。

例 17-4 阻抗为 (20－j15)Ω 对称△形负载连接到一个 $\mathbf{V}_{ab}=330\angle 0°$ V 的对称△联结正序发电机上。试计算负载的相电流与线电流。

解： 每相的负载阻抗为

$$\mathbf{Z}_{\triangle}=20-\text{j}15=25\angle -36.87°(\Omega)$$

相电流为：

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_{AB}&=\mathbf{V}_{AB}/\mathbf{Z}_{\triangle}=\frac{330\angle 0°}{25\angle -36.87°}=13.2\angle 36.87°(\text{A})\\ \mathbf{I}_{BC}&=\mathbf{I}_{AB}\angle -120°=13.2\angle -83.13°(\text{A})\\ \mathbf{I}_{CA}&=\mathbf{I}_{AB}\angle +120°=13.2\angle 156.87°(\text{A})\end{aligned}$$

对于△负载而言，其线电流总是滞后于对应的相电流 30°，并且其幅度为相电流的$\sqrt{3}$倍，所以，线电流为

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_a&=\mathbf{I}_{AB}\sqrt{3}\angle -30°=(13.2\angle 36.87°)(\sqrt{3}\angle -30°)=22.86\angle 6.87°(\text{A})\\ \mathbf{I}_b&=\mathbf{I}_a\angle -120°=22.86\angle -113.13°(\text{A})\\ \mathbf{I}_c&=\mathbf{I}_a\angle +120°=22.86\angle 126.87°(\text{A})\end{aligned}$$

◀

练习 17-4 某正序对称△联结的电源为一对称△联结的负载供电，如果负载的各相阻抗为（18+j12)(Ω)，且 $\mathbf{I}_a=22.5\,\underline{/35^\circ}$(A)，试求 $\mathbf{I}_{AB}$ 和 $\mathbf{V}_{AB}$。

答案： $13\,\underline{/65^\circ}$(A)；$281.2\,\underline{/98.69^\circ}$(V)

17.7 对称△-Y 联结

△-Y 联结方式常用于电力配送系统中的三相变压器连接。这是因为可以使用次级回路设置一个中点来为单相负载提供线到中点的功率。基于安全考虑，应将中点接地。

对称△-Y 系统是指由对称△联结的电源与对称 Y 联结的负载组成的系统。

考虑图 17-19 所示的△-Y 电路。假定采用 abc 相序，则△联结电源的相电压为

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{ab}&=V_p\,\underline{/0^\circ}\\ \mathbf{V}_{bc}&=V_p\,\underline{/-120^\circ}\\ \mathbf{V}_{ca}&=V_p\,\underline{/+120^\circ}\end{aligned} \tag{17-34}$$

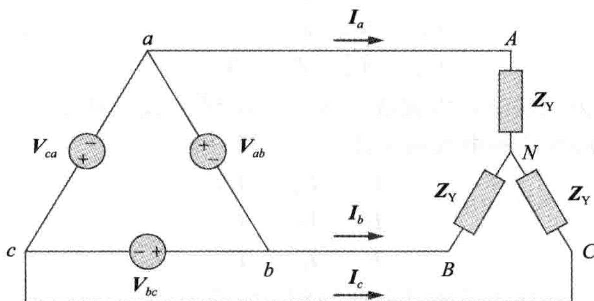


图 17-19 对称△-Y 联结

上述电压既可以是相电压，也可以是线电压。

计算线电流的方法很多。其中一种方法是对图 17-19 所示回路 $aANBba$ 应用 KVL，得到：

$$-\mathbf{V}_{ab}+\mathbf{Z}_Y\mathbf{I}_a-\mathbf{Z}_Y\mathbf{I}_b=0$$

即

$$\mathbf{Z}_Y(\mathbf{I}_a-\mathbf{I}_b)=\mathbf{V}_{ab}=V_p\,\underline{/0^\circ}$$

于是，

$$\mathbf{I}_a-\mathbf{I}_b=\frac{V_p\,\underline{/0^\circ}}{\mathbf{Z}_Y} \tag{17-35}$$

但是，按照 abc 相序，$\mathbf{I}_b$ 较 $\mathbf{I}_a$ 滞后 120°，即 $\mathbf{I}_b=\mathbf{I}_a\,\underline{/-120^\circ}$，因此：

$$\mathbf{I}_a-\mathbf{I}_b=\mathbf{I}_a(1-1\,\underline{/-120^\circ})=\mathbf{I}_a\left(1+\frac{1}{2}+\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\mathbf{I}_a\sqrt{3}\,\underline{/30^\circ} \tag{17-36}$$

将式（17-36）代入（17-35），得到：

$$\mathbf{I}_a=\frac{\frac{V_p}{\sqrt{3}}\,\underline{/-30^\circ}}{Z_Y}=\frac{V_p}{\sqrt{3}Z_Y}\,\underline{/-30^\circ} \tag{17-37}$$

考虑到正序关系，即可确定其他线电流 $\mathbf{I}_b$ 与 $\mathbf{I}_c$，即 $\mathbf{I}_b=\mathbf{I}_a\,\underline{/-120^\circ}$，$\mathbf{I}_c=\mathbf{I}_a\,\underline{/+120^\circ}$。负载的相电流等于线电流。

确定线电流的另一种方法是将△联结的电源利用其等效的 Y 联结电源来代替，如图 17-20 所示。

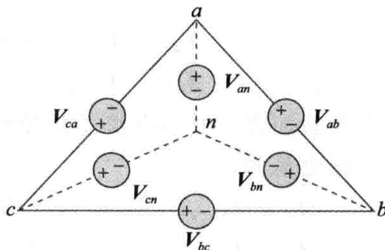


图 17-20 电源的△联结转换为等效的 Y 联结

由 17-4 节已知，Y 联结电源的线电压较其对应的相电流超前 30°。因此，将△联结电源相应的线电压除以$\sqrt{3}$，并相移－30°，就可以得到等效 Y 联结的各相电压。因此，等效 Y 联结电源的相电压为

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{an} &= \frac{V_p}{\sqrt{3}} \angle -30^\circ \\ \mathbf{V}_{bn} &= \frac{V_p}{\sqrt{3}} \angle -150^\circ \\ \mathbf{V}_{cn} &= \frac{V_p}{\sqrt{3}} \angle +90^\circ \end{aligned} \tag{17-38}$$

如果△联结电源的各相源阻抗为 $\mathbf{Z}_s$，则由式（17-28）可知，等效的 Y 联结电源的各相源阻抗为 $\mathbf{Z}_s/3$。

一旦将电源转换为 Y 联结，电路就成为一个Y－Y系统。因此，可以利用图 17-21 所示的单相等效电路进行电路分析，由此得到 a 相的线电流为

$$\mathbf{I}_a = \frac{\frac{V_p}{\sqrt{3}} \angle -30^\circ}{Z_Y} = \frac{V_p}{\sqrt{3} Z_Y} \angle -30^\circ \tag{17-39}$$

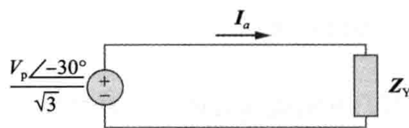


图 17-21　单相等效电路

与式（17-37）是相同的。

需要说明的是，△联结负载要比 Y 联结负载更符合实际需求。这是因为各负载通过传输线直接相连，因此可以很方便地改变△联结负载的任何一相负载。然而△联结电源很难实用，这是因为相电压的微小不平衡，都会产生不希望出现的环路电流。

表 17-1 总结了四种连接的相电流、相电压以及线电流、线电压的计算公式。建议不必记忆这些公式，而是要理解公式的推导过程。相应的三相电路，直接应用 KCL 和 KVL 即可推导出表中所列的公式。

表 17-1　对称三相系统相电压/电流以及线电压/电流的公式总结

联结方式	相电压/电流	线电压/电流
Y-Y	$\mathbf{V}_{an} = V_p \angle 0^\circ$ $\mathbf{V}_{bn} = V_p \angle -120^\circ$ $\mathbf{V}_{an} = V_p \angle +120^\circ$ 与线电流相同	$\mathbf{V}_{ab} = \sqrt{3} V_p \angle 30^\circ$ $\mathbf{V}_{bc} = \mathbf{V}_{ab} \angle -120^\circ$ $\mathbf{V}_{ca} = \mathbf{V}_{ab} \angle +120^\circ$ $\mathbf{I}_a = \mathbf{V}_{an}/\mathbf{Z}_Y$ $\mathbf{I}_b = \mathbf{I}_a \angle -120^\circ$ $\mathbf{I}_c = \mathbf{I}_a \angle +120^\circ$
Y-△	$\mathbf{V}_{an} = V_p \angle 0^\circ$ $\mathbf{V}_{bn} = V_p \angle -120^\circ$ $\mathbf{V}_{cn} = V_p \angle +120^\circ$ $\mathbf{I}_{AB} = \mathbf{V}_{AB}/\mathbf{Z}_\triangle$ $\mathbf{I}_{BC} = \mathbf{V}_{BC}/\mathbf{Z}_\triangle$ $\mathbf{I}_{CA} = \mathbf{V}_{CA}/\mathbf{Z}_\triangle$	$\mathbf{V}_{ab} = \mathbf{V}_{AB} = \sqrt{3} V_p \angle 30^\circ$ $\mathbf{V}_{bc} = \mathbf{V}_{BC} = \mathbf{V}_{ab} \angle -120^\circ$ $\mathbf{V}_{ca} = \mathbf{V}_{CA} = \mathbf{V}_{ab} \angle +120^\circ$ $\mathbf{I}_a = \mathbf{I}_{AB}\sqrt{3} \angle -30^\circ$ $\mathbf{I}_b = \mathbf{I}_a \angle -120^\circ$ $\mathbf{I}_c = \mathbf{I}_a \angle +120^\circ$
△-△	$\mathbf{V}_{ab} = V_p \angle 0^\circ$ $\mathbf{V}_{bc} = V_p \angle -120^\circ$ $\mathbf{V}_{ca} = V_p \angle +120^\circ$ $\mathbf{I}_{AB} = \mathbf{V}_{ab}/\mathbf{Z}_\triangle$ $\mathbf{I}_{BC} = \mathbf{V}_{bc}/\mathbf{Z}_\triangle$ $\mathbf{I}_{CA} = \mathbf{V}_{ca}/\mathbf{Z}_\triangle$	与相电压相同 $\mathbf{I}_a = \mathbf{I}_{AB}\sqrt{3} \angle -30^\circ$ $\mathbf{I}_b = \mathbf{I}_a \angle -120^\circ$ $\mathbf{I}_c = \mathbf{I}_a \angle +120^\circ$

（续）

连接方式	相电压/电流	线电压/电流
△-Y	$\boldsymbol{V}_{ab}=V_p\angle 0^\circ$ $\boldsymbol{V}_{bc}=V_p\angle -120^\circ$ $\boldsymbol{V}_{ca}=V_p\angle +120^\circ$ 与线电流相同	与相电压相同 $\boldsymbol{I}_a=\dfrac{V_p\angle -30^\circ}{\sqrt{3}Z_Y}$ $\boldsymbol{I}_b=\boldsymbol{I}_a\angle -120^\circ$ $\boldsymbol{I}_c=\boldsymbol{I}_a\angle +120^\circ$

例 17-5 一相阻抗为电阻 40Ω、电抗 25Ω 的对称 Y 联结负载由线电压为 210V 的对称、正序△联结的电源供电，如果以 $\boldsymbol{V}_{ab}$ 作为参考电压，试计算相电流。

解： 负载阻抗为

$$\boldsymbol{Z}_Y = 40 + j25 = 47.17\angle 32^\circ(\Omega)$$

电源阻抗为

$$\boldsymbol{V}_{ab} = 210\angle 0^\circ(\mathrm{V})$$

将△联结电源转换为 Y 联结电源，有：

$$\boldsymbol{V}_{an} = \frac{\boldsymbol{V}_{an}}{\sqrt{3}}\angle -30^\circ = 121.3\angle -30^\circ(\mathrm{V})$$

因此，线电流为

$$\boldsymbol{I}_a = \boldsymbol{V}_{an}/\boldsymbol{Z}_Y = \frac{121.2\angle -30^\circ}{47.17\angle 32^\circ} = 2.57\angle -62^\circ(\mathrm{A})$$

$$\boldsymbol{I}_b = \boldsymbol{I}_a\angle -120^\circ = 2.57\angle -182^\circ(\mathrm{A})$$

$$\boldsymbol{I}_c = \boldsymbol{I}_a\angle 120^\circ = 2.57\angle 58^\circ(\mathrm{A})$$

相电流与线电流相同。 ◀

练习 17-5 在对称△-Y 电路中，$\boldsymbol{V}_{ab}=240\angle 15^\circ$，$\boldsymbol{Z}_Y=(12+15)\Omega$，试计算线电流。

答案： 7.21 $\angle -66.34^\circ$；7.21 $\angle -186.34^\circ$；7.21 $\angle 53.66^\circ$ A

17.8 对称系统中的功率

本节讨论对称三相系统中的功率。首先计算负载吸收的瞬时功率，要求在时域分析电路，对于 Y 联结负载而言，其相电压为

$$\begin{aligned} v_{AN} &= \sqrt{2}V_p\cos(\omega t) \\ v_{BN} &= \sqrt{2}V_p\cos(\omega t - 120^\circ) \\ v_{CN} &= \sqrt{2}V_p\cos(\omega t + 120^\circ) \end{aligned} \tag{17-40}$$

由于 V_p 定义为相电压的有效值，因此因子$\sqrt{2}$是必须的。如果 $\boldsymbol{Z}_Y=Z\angle\theta$，则相电流较其对应的相电压滞后 θ 角。负载的总瞬时功率等于三相瞬时功率之和，因此

$$\begin{aligned} p &= p_a + p_b + p_c = v_{AN}i_a + v_{BN}i_b + v_{CN}i_c \\ &= 2V_pI_p\{\cos\omega t\cos(\omega t - \theta) + \cos(\omega t - 120^\circ)\cos(\omega t - \theta - 120^\circ) + \\ &\quad \cos(\omega t + 120^\circ)\cos(\omega t - \theta + 120^\circ)\} \end{aligned} \tag{17-41}$$

其中，I_p 为相电流的有效值。利用三角恒等式，得到：

$$p = 3V_pI_p\cos\theta \tag{17-42}$$

因此，对称三相系统中总的瞬时功率是恒定的，而不像各相的瞬时功率那样随时间而改变，无论负载是 Y 联结，还是△联结，这个结果都成立。这是采用三相系统发电、配电的重要原因之一。后面将介绍另一个原因。

因为总的瞬时功率不随时间改变，所以无论是△联结负载还是 Y 联结负载，其各相的平均功率 P_p 都是 p/3，即

$$P_p = V_p I_p \cos\theta \tag{17-43}$$

各相的无功功率为

$$Q_p = V_p I_p \sin\theta \tag{17-44}$$

各相的视在功率为

$$S_p = V_p I_p \tag{17-45}$$

各相的复功率为

$$\boldsymbol{S}_p = P_p + jQ_p = \boldsymbol{V}_p \boldsymbol{I}_p^* \tag{17-46}$$

其中，$\boldsymbol{V}_p$ 和 $\boldsymbol{I}_p$ 分别是幅度为 V_p 和 I_p 的相电压和相电流。总的平均功率为各相平均功率之和：

$$P = P_a + P_b + P_c = 3P_p = 3V_p I_p \cos\theta = \sqrt{3} V_L I_L \cos\theta \tag{17-47}$$

对于 Y 联结负载而言，$I_L = I_p$，但 $V_L = \sqrt{3} V_p$，而对于△联结负载而言，$I_L = \sqrt{3} I_p$，但 $V_L = V_p$。因此，式（17-47）既适用于 Y 联结负载，又适用于△联结负载。同理，总的无功功率为

$$Q = 3V_p I_p \sin\theta = 3Q_p = \sqrt{3} V_L I_L \sin\theta \tag{17-48}$$

总的复功率为

$$\boxed{\boldsymbol{S} = 3\boldsymbol{S}_p = 3\boldsymbol{V}_p \boldsymbol{I}_p^* = 3I_p^2 \boldsymbol{Z}_p = 3V_p^2 / \boldsymbol{Z}_p^*} \tag{17-49}$$

其中，$\boldsymbol{Z}_p = Z_p \angle\theta$ 为各相负载阻抗（$\boldsymbol{Z}_p$ 可以是 $\boldsymbol{Z}_Y$ 或 $\boldsymbol{Z}_\triangle$。另外，式（17-49）还可以写为

$$\boldsymbol{S} = P + jQ = \sqrt{3} V_L I_L \angle\theta \tag{17-50}$$

需要记住的是，V_p、I_p、V_L 和 I_L 都是有效值，θ 是负载阻抗的辐角，也是相电压和相电流之间的相位差。

采用三相系统进行配电的另一个重要优势在于：与单相系统相比，在相同线电压 V_L 与相同吸收功率 P_L 的条件下，三相系统所用的输电线（或铜线）比单相系统少。单相系统所用的材料比三相系统多 33%，或者说，三相系统仅使用等效单相系统所需材料的 75%（除了铜线，铝线也是如此）。换种说法，传递相同的功率时，三相系统所需的材料要比单相系统所需的材料少得多。

例 17-6 参看如图 17-14（见例 17-2）所示电路，试确定电源与负载总的平均功率、无功功率以及复功率。

解：由于系统是对称的，所以只考虑一相就行。对于 a 相，有

$$\boldsymbol{V}_p = 110 \angle 0^\circ (\text{V})$$
$$\boldsymbol{I}_p = 6.81 \angle -21.8^\circ (\text{A})$$

因此，电源吸收的复功率为：

$$\boldsymbol{S}_s = -3\boldsymbol{V}_p \boldsymbol{I}_p^* = 3(110 \angle 0^\circ) \times (6.81 \angle 21.8^\circ) = -2247.4 \angle 21.8^\circ = -(2086.6 + j834.6)(\text{V} \cdot \text{A})$$

即电源提供的有功功率为 −2086.6W，无功功率为 −834.6var。

负载吸收的复功率为

$$\boldsymbol{S}_L = 3|\boldsymbol{I}_p|^2 \boldsymbol{Z}_p$$

其中，

$$\boldsymbol{Z}_p = 10 + j8 = 12.81 \angle 38.66^\circ$$
$$\boldsymbol{I}_p = \boldsymbol{I}_a = 6.81 \angle -21.8^\circ$$

因此，

$$\boldsymbol{S}_L = 3\times(6.81)^2\times 12.81\angle 38.66^\circ = 1782.2\angle 38.66^\circ = (1391.7+j1113.3)(V\cdot A)$$

于是，负载吸收的有功功率为 1391.7W，无功功率为 1113.3var。两复功率之差为线路阻抗 $(5-j2)\Omega$ 吸收的复功率。下面求出线路吸收的复功率来加以验证：

$$\boldsymbol{S}_l = 3|\boldsymbol{I}_p|^2\boldsymbol{Z}_l = 3\times(6.81)^2(5-j2) = (695.64-j278.3)(V\cdot A)$$

恰好是 $\boldsymbol{S}_s$ 与 $\boldsymbol{S}_L$ 之差，即 $\boldsymbol{S}_s+\boldsymbol{S}_L+\boldsymbol{S}_L=0$。◀

练习 17-6 对于练习 17-2 的 Y－Y 电路中，试计算电源端与负载端的复功率。

答案：(1054.2＋j843.3)(V·A)；(1017.45＋j801.6)(V·A)

例 17-7 三相电动机可看作是对称 Y 联结负载。当供电线电压为 220V，线电流为 18.2A 时，电动机吸收的功率为 5.6kW，试确定该电动机的功率因数。

解：视在功率为

$$S = \sqrt{3}V_L I_L = \sqrt{3}\times 220\times 18.2 = 6935.13(V\cdot A)$$

由于有功功率为

$$P = S\cos\theta = 5600(W)$$

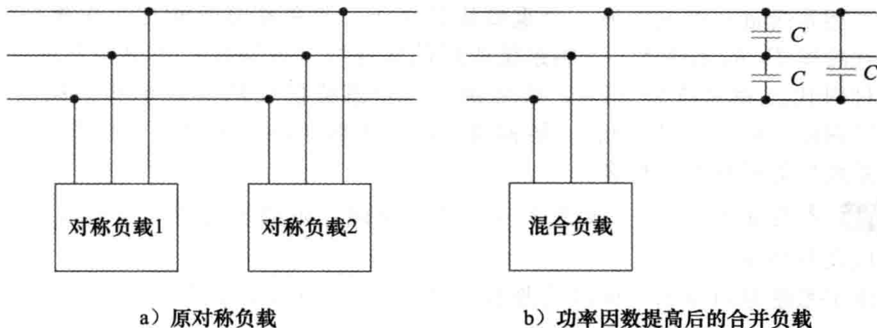
所以，功率因数

$$pf = \cos\theta = \frac{P}{S} = \frac{5600}{6935.13} = 0.8075$$ ◀

练习 17-7 某功率因数为 0.85 滞后的 30kW 三相电动机与线电压为 440V 的对称电源相连，试计算该电动机所需的线电流。

答案：46.31A

例 17-8 两个对称负载与 240kVrms、60Hz 电力线相连，如图 17-22a 所示，负载 1 在功率因数为 0.6 滞后时提取的功率为 30kW，负载 2 在功率因数为 0.8 滞后时提取的功率 45kvar。假定相序为 abc，试求：(a) 合并负载吸收的复功率、有功功率与无功功率；(b) 线电流；(c) 将功率因数提高到 0.9 滞后，与负载相并联的三个△联结电容的额定功率（kvar）以及每个电容的容值。



a）原对称负载　　b）功率因数提高后的合并负载

图 17-22 例 17-8 的系统框图

解：(a) 对于负载 1，已知 $P_1=30kW$，且 $\cos\theta_1=0.6$，则有 $\sin\theta_1=0.8$，所以：

$$S_1 = \frac{P_1}{\cos\theta_1} = \frac{30kW}{0.6} = 50(kV\cdot A)$$

$Q_1=S_1\sin\theta_1=50\times0.8=40kvar$，所以，负载 1 的复功率为

$$\boldsymbol{S}_1 = P_1 + jQ_1 = 30 + j40(kV\cdot A) \tag{17-8-1}$$

对于负载 2，如果 $Q_2=45kV\cdot A$，$\cos\theta_2=0.8$，那么 $\sin\theta_2=0.6$。则有：

$$S_2 = \frac{Q_2}{\sin\theta_2} = \frac{45kvar}{0.6} = 75(kV\cdot A)$$

$P_2=S_2\cos\theta_2=75\times0.8=60kW$。因此，负载 2 的复功率为

$$\boldsymbol{S}_2 = P_2 = jQ_2 = 60 + j45(\text{kV}\cdot\text{A}) \tag{17-8-2}$$

由式（17-8-1）和式（17-8-2），可得负载所吸收的总复功率为

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2 = 90 + j85\text{kV}\cdot\text{A} = 123.8\underline{/43.36^\circ}(\text{kV}\cdot\text{A}) \tag{17-8-3}$$

其功率因数为 cos43. 36°＝0. 727（滞后）。有功功率为 90kW，无功功率为 85kvar。

（b）由于 $S=\sqrt{3}V_L I_L$，所以线电流为：

$$I_L = \frac{S}{\sqrt{3}V_L} \tag{17-8-4}$$

将其用于计算各负载的线电流，需要注意的是各负载两端的线电压均为 $V_L=240\text{kV}$。于是，对于负载 1，有：

$$I_{L1} = \frac{50000}{\sqrt{3}\times 240000} = 120.28(\text{mA})$$

由于功率因数是滞后的，所以线电流滞后于线电压 $\theta_1=\cos^{-1}0.6=53.13^\circ$。因此：

$$\boldsymbol{I}_{a1} = 120.28\underline{/-53.13^\circ}(\text{mA})$$

对于负载 2：

$$I_{L1} = \frac{75000}{\sqrt{3}240000} = 180.42(\text{mA})$$

线电流滞后于线电压 $\theta_2=\arccos 0.8=36.87^\circ$，所以：

$$\boldsymbol{I}_{a2} = 180.42\underline{/-36.87^\circ}(\text{mA})$$

因此，总的线电流为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{I}_a &= \boldsymbol{I}_{a1} + \boldsymbol{I}_{a2} = 120.28\underline{/-53.13^\circ} + 180.42\underline{/-36.87^\circ}\\ &= (72.168 - j96.224) + (144.336 - j108.252)\\ &= 217.5 - j204.47 = 297.8\underline{/-43.36^\circ}(\text{mA})\end{aligned}$$

另外，利用式（17-8-4），也可以由总的复功率确定线电流：

$$I_L = \frac{123800}{\sqrt{3}240000} = 297.82(\text{mA})$$

$$\boldsymbol{I}_a = 297.82\underline{/-43.36^\circ}(\text{mA})$$

且

与前面计算出的结果是一致的。

另外两相的线电流 $\boldsymbol{I}_b$ 与 $\boldsymbol{I}_c$ 可以按照 abc 相序得到，即

$$\boldsymbol{I}_b = 297.82\underline{/-163.36^\circ}\text{ mA 且 }\boldsymbol{I}_c = 297.82\underline{/76.64^\circ}(\text{mA})$$

（c）要将功率因数提高到 0. 9 滞后，所需无功功率可以用式（14-43）求出：

$$Q_c = P(\tan\theta_{\text{old}} - \tan\theta_{\text{new}})$$

其中，$P=90\text{kW}$，$\theta_{\text{old}}=43.36^\circ$且 $\theta_{\text{new}}=\cos^{-1}0.9=25.84^\circ$。

所以，

$$Q_C = 90000\times(\tan 43.36^\circ - \tan 25.84^\circ) = 41.4(\text{kvar})$$

这就是三个电容的无功功率。因此，每个电容的额定功率为 $Q'_C=13.8\text{kvar}$。由式（14-44）可得各电容的容值为：

$$C = \frac{Q'_C}{\omega V_{\text{rms}}^2}$$

由于电容是△联结的，如图 17-22b 所示，因此上式中的 V_{rms}为线电压，即 240kV，所以

$$C = \frac{13800}{2\pi\times 60\times 240000^2} = 635.5(\text{pF})$$ ◀

练习 17-8 假定图 17-22a 所示的两个对称负载由 840Vrms，60Hz 电源供电。负载

1 为Y联结，每相的阻抗为 30＋j40Ω，负载 2 为对称三相电动机，在功率因数为 0.8 滞后时提取的功率为 48kW。假定相序是 *abc*，试计算：(a) 合并负载吸收的复功率；(b) 将功率因数提高到 1，与负载相并联的三个△联结电容的额定功率（kvar）；(c) 在功率因数为 1 的条件下，电源输出的电流。

答案：(a) 56.47＋j47.29kV·A；(b) 15.7kvar；(c) 38.813A

†17.9 非对称三相系统

如果不讨论非对称系统，本章的知识结构就显得不完整。在如下两种可能的情况下会出现非对称系统：(1) 电源的大小不相等，或者相位角之差不相等；(2) 负载阻抗不相等。因此，

非对称的系统是由非对称的电压源或非对称的负载形成的。

为了简化分析，假定电源电压都是对称的，而负载是非对称的。

非对称三相系统可以直接利用网孔分析法或节点分析法求解，用于交流系统，第十三章已经讨论过了。图 17-23 所示为一个非对称三相系统，该系统由对称的电源电压（图中未画出）与非对称 Y 联结负载（图中已画出）组成。由于负载是非对称的，所以 $\boldsymbol{Z}_A$、$\boldsymbol{Z}_B$、$\boldsymbol{Z}_C$ 不相等。由欧姆定律确定的线电流为

$$\boxed{\boldsymbol{I}_a = \boldsymbol{V}_{AN}/\boldsymbol{Z}_A,\quad \boldsymbol{I}_b = \boldsymbol{V}_{BN}/\boldsymbol{Z}_B,\boldsymbol{I}_c = \boldsymbol{V}_{CN}/\boldsymbol{Z}_C} \tag{17-51}$$

这组非对称线电流会在中性线中产生电流，而对称中的中性线电流为零。在节点 *N* 处应用 KCL 可以得到中性线电流为：

$$\boxed{\boldsymbol{I}_n = -(\boldsymbol{I}_a + \boldsymbol{I}_b + \boldsymbol{I}_c)} \tag{17-52}$$

在没有中性线的三线系统中，仍然可以利用网孔分析法求出线电流 $\boldsymbol{I}_a$、$\boldsymbol{I}_b$、$\boldsymbol{I}_c$。在这种情况下，节点 *N* 处必须满足 KCL，因此有 $\boldsymbol{I}_a+\boldsymbol{I}_b+\boldsymbol{I}_c=0$。对于△-Y、Y-△或△-△非对称三线系统的分析也是相同的。前面已经提到，在远距离电力传输中，需要采用多路三线系统，均以大地作为中性线的导体。

计算非对称三相系统的功率必须先利用式（17-43）～式（17-46）分别求出每相的功率，但总功率不是简单的单相功率的 3 倍，而是将三相各自的功率相加。

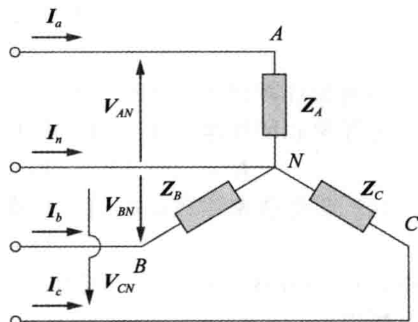


图 17-23 例 17-9 和 17-13 的电路图非对称三相 Y 联结负载

例 17-9 如图 17-23 所示，非对称 Y 联结的负载由 100V 对称电压，*acb* 相序电源供电。如果 $\boldsymbol{Z}_A=15\Omega$，$\boldsymbol{Z}_B=10+\mathrm{j}5\Omega$，$\boldsymbol{Z}_C=6-\mathrm{j}8\Omega$，试计算线电流与中性线电流。

解：利用式（17-51）可求得线电流为

$$\boldsymbol{I}_a = \frac{100\angle 0^\circ}{15} = 6.67\angle 0^\circ(\mathrm{A})$$

$$\boldsymbol{I}_b = \frac{100\angle 120^\circ}{10+\mathrm{j}5} = \frac{100\angle 120^\circ}{11.18\angle 26.56^\circ} = 8.94\angle 93.44^\circ(\mathrm{A})$$

$$\boldsymbol{I}_c = \frac{100\angle -120^\circ}{6+\mathrm{j}8} = \frac{100\angle -120^\circ}{10\angle -53.13^\circ} = 10\angle -66.87^\circ(\mathrm{A})$$

利用式（17-52），得到中性线电流为

$$\boldsymbol{I}_n = -(\boldsymbol{I}_a + \boldsymbol{I}_b + \boldsymbol{I}_c) = -(6.67 - 0.54 + \mathrm{j}8.92 + 3.93 - \mathrm{j}9.2)$$

$$=-10.06+j0.28=10.06\angle 178.4^\circ\text{(A)}$$ ◀

练习 17-9 如图 17-24 所示的非对称△联结负载，由电压为 200V 的正序对称电源供电，试求线电流。以 $\boldsymbol{V}_{ab}$ 作为参考电压。

答案：$15.08\angle -15^\circ$；$29.15\angle 220.2^\circ$；$24\angle 71.33^\circ$ A

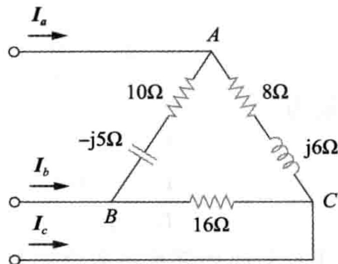


图 17-24 习题 9 和 13 的电路图非对称△联结负载

例 17-10 对如图 17-25 所示的非对称电路，试求：(a) 线电流；(b) 负载吸收的总复功率；(c) 电源提供的总复功率。

解：(a) 利用网孔分析法求解线电流。对于网孔 1，有：

$$120\angle -120^\circ-120\angle 0^\circ+(10+j5)\boldsymbol{I}_1-10\boldsymbol{I}_2=0$$

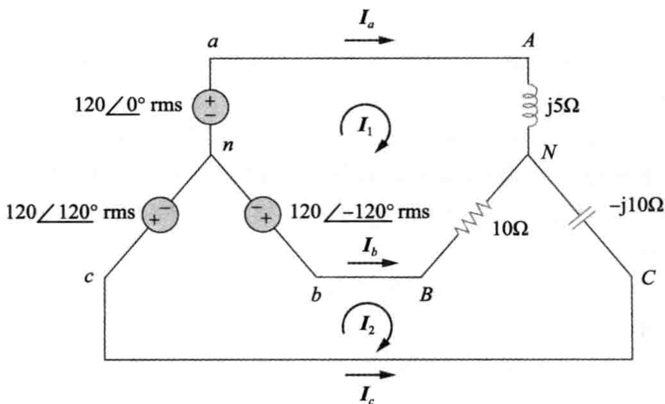


图 17-25 例 17-10 图

即

$$(10+j5)\boldsymbol{I}_1-10\boldsymbol{I}_2=120\sqrt{3}\angle 30^\circ \tag{17-10-1}$$

对于网孔 2，有

$$120\angle 120^\circ-120\angle -120^\circ+(10-j10)\boldsymbol{I}_2-10\boldsymbol{I}_1=0$$

即

$$-10\boldsymbol{I}_1+(10-j10)\boldsymbol{I}_2=120\sqrt{3}\angle -90^\circ \tag{17-10-2}$$

式 (17-9-1) 和 (17-9-2) 构成的矩阵方程为

$$\begin{bmatrix}10+j5 & -10\\ -10 & 10-j10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1\\ I_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}120\sqrt{3}\angle 30^\circ\\ 120\sqrt{3}\angle -90^\circ\end{bmatrix}$$

其行列式为

$$\Delta=\begin{vmatrix}10+j5 & -10\\ -10 & 10-j10\end{vmatrix}=50-j50=70.71\angle -45^\circ$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}120\sqrt{3}\angle 30^\circ & -10\\ 120\sqrt{3}\angle -90^\circ & 10-j10\end{vmatrix}=207.85(13.66-j13.66)=4015\angle -45^\circ$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}10+j5 & 120\sqrt{3}\angle 30^\circ\\ -10 & 120\sqrt{3}\angle -90^\circ\end{vmatrix}=207.85(13.66-j5)=3023\angle -20.1^\circ$$

因此，网孔电流为

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{4015.23\angle -45^\circ}{70.71\angle -45^\circ} = 56.78(\text{A})$$

$$I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{3023.4\angle -20.1^\circ}{70.71\angle -45^\circ} = 42.75\angle 24.9^\circ(\text{A})$$

线电流为

$$I_a = I_1 = 56.78(\text{A})$$
$$I_c = -I_2 = 42.75\angle -155.1^\circ(\text{A})$$
$$I_b = I_2 - I_1 = 38.78 + \text{j}18 - 56.78 = 25.46\angle 135^\circ(\text{A})$$

(b) 下面计算负载吸收的复功率。对于 A 相，有：

$$S_A = |I_a|^2 Z_A = (56.78)^2(\text{j}5) = \text{j}16120(\text{V}\cdot\text{A})$$

对于 B 相，有

$$S_B = |I_b|^2 Z_B = (25.46)^2 \times (10) = 6480(\text{V}\cdot\text{A})$$

对于 C 相，有

$$S_C = |I_c|^2 Z_C = (42.75)^2(-\text{j}10) = -\text{j}18276(\text{V}\cdot\text{A})$$

于是，负载吸收的总复功率为：

$$S_L = S_A + S_B + S_C = 6480 - \text{j}2159(\text{V}\cdot\text{A})$$

(c) 下面通过求解电源吸收的功率来验证上述结果。对于 a 相电压源，有

$$S_a = -V_{an}I_a^* = -(120\angle 0^\circ)(56.78) = -6813.6(\text{V}\cdot\text{A})$$

对于 b 相电压源，有：

$$S_b = -V_{bn}I_b^* = -(120\angle -120^\circ)(25.46\angle -135^\circ) = -3055.2\angle 105^\circ = 790 - \text{j}2951.1(\text{V}\cdot\text{A})$$

对于 c 相电压源，有

$$S_c = -V_{cn}I_c^* = -(120\angle 0^\circ)(42.75\angle 155.1^\circ) = -5130\angle 275.1^\circ = -456.03 + \text{j}5109.7(\text{V}\cdot\text{A})$$

三相电源吸收的总复功率为

$$S_s = S_a + S_b + S_c = -6480 + \text{j}2156(\text{V}\cdot\text{A})$$

显然，$S_s + S_L = 0$，验证了交流功率守恒原理。 ◀

练习 17-10 试求图 17-26 所示非对称三相电路的线电流以及负载吸收的有用功率。

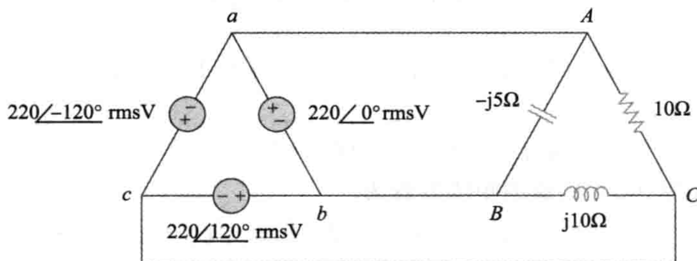


图 17-26 练习 17-10 的电路原理图

答案： $64\angle 80.1^\circ$；$38.1\angle -60^\circ$；$42.5\angle 225^\circ$(A)；4.84kW

17.10 计算机辅助分析

PSpice 软件既可以用于分析对称三相电路，也可以用于分析非对称三相电路。所用的分析方法与单相交流电路的分析方法相同。但是，利用 PSpice 分析△联结电源时，有两个主要问题。第一，△联结电源形成一个电压源回路，这是 PSpice 不能接受的形式。为了避免这个问题，在△联结电源的每一相中串联一个可以忽略的电阻（如 1μΩ 每相）；第二，△联结电源没有一个方便的节点作为地参考节点，而这是在运行 PSpice 程序时所必需的。在△联结的电源中插入一个对称 Y 联结的大电阻（如 1MΩ 每相），使

得该 Y 联结电阻器的中性线节点作为地节点 0，即可解决这个问题。例 17-12 将说明上述问题。

例 17-11 对于图 17-27 所示的对称 Y－△电路，试利用 PSpice 求解线电流 $\boldsymbol{I}_{aA}$，相电压 $\boldsymbol{V}_{AB}$，以及相电流 $\boldsymbol{I}_{AC}$，假定电源频率为 60Hz。

解： 电路的 PSpice 原理图如图 17-28 所示。在适当的线路中加入伪组件 IPRINT，来确定 $\boldsymbol{I}_{aA}$ 与 $\boldsymbol{I}_{AC}$，在节点 A 与节点 B 之间加入 VPRINT2，得到电压差 $\boldsymbol{V}_{AB}$。将 IPRINT 与 VRPINT2 的属性均设置为 AC＝yes，MAG＝yes，PHASE＝yes，从而仅输出电流与电压的幅度和相位。

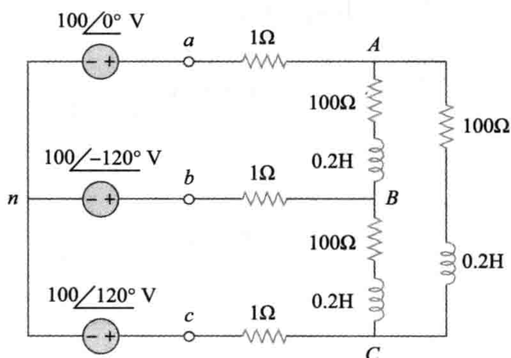


图 17-27 例 17-11 的电路图

画出图 17-31 所示的电路图，并另存为 exam1711. dsn。选择 PSpice/New Simulation Profile，弹出 New Simulation 对话框，输入文件名 exam1711，并单击 Create。弹出 Simulation Settings 对话框，选择 Analysis Type 下面的 AC Sweep/Noise，选择 AC Sweep Type 下的 Linear。将 Star Freq 设置为 60，Final Freq 设置为 60，Total Points 设置为 1。

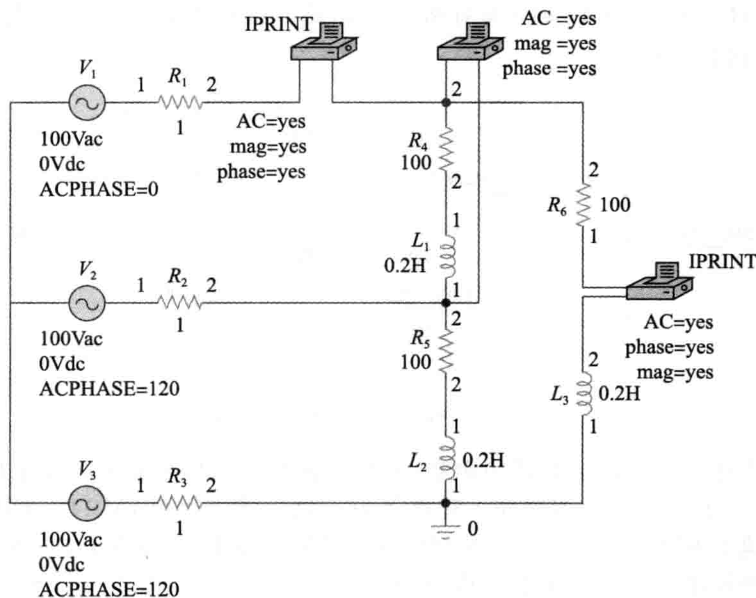


图 17-28 图 17-27 电路的原理图

选择 PSpice/Run 进行电路仿真，选择 PSpice/View Output file 得到如下输出文件：

```
FREQ          V(A,B)          VP(A,B)
6.000E+01     1.699E+02       3.081E+01

FREQ          IM(V_PRINT2)    IP(V_PRINT2)
6.000E+01     2.350E+00       -3.620E+01

FREQ          IM(V_PRINT3)    IP(V_PRINT3)
6.000E+01     1.357E+00       -6.620E+01
```

由此得到：

$$I_{aA}=2.35\angle -36.2^\circ(\mathrm{A})$$
$$V_{AB}=169.9\angle 30.81^\circ(\mathrm{A})$$
$$I_{AC}=1.357\angle -66.2^\circ(\mathrm{A})$$

◀

练习 17-11 参见图 17-29 所示的对称 Y-Y 电路，试利用 PSpice 求解线电流 $\boldsymbol{I}_{aA}$ 和相电压 $\boldsymbol{V}_{AN}$，假定 $f=100\mathrm{Hz}$。

答案：$8.547\angle -91.27^\circ$ A；$100.9\angle 60.87^\circ$ V

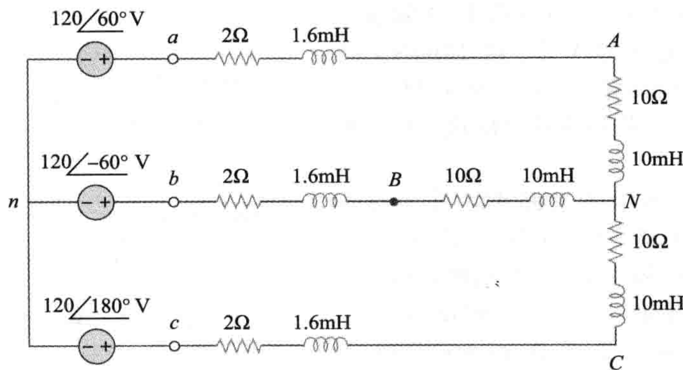


图 17-29 习题 11 电路原理图

例 17-12 对于图 17-30 所示的非对称△-△电路，试利用 PSpice 求解发电机电流 $\boldsymbol{I}_{ab}$、线电流 $\boldsymbol{I}_{bB}$ 以及相电流 $\boldsymbol{I}_{BC}$。

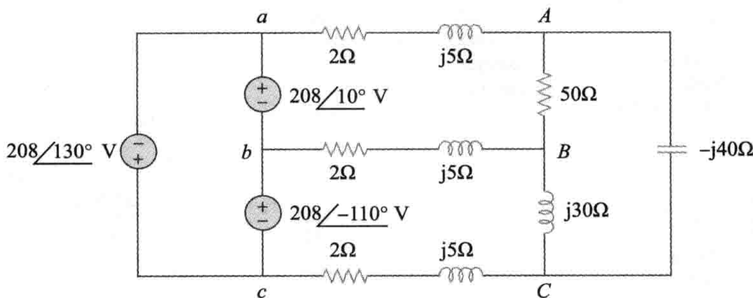


图 17-30 例 17-12 的电路原理图

解：如前所述，在△联结电源中串联 1μΩ 的电阻器，即可避免形成电压源回路。为了提供地节点 0，在△联结电源中加入对称 Y 联结电阻器（每相 1MΩ），如图 17-31 所示。加入三个伪组建 IPRINT 及其属性，从而得到所求的电流 $\boldsymbol{I}_{ab}$、$\boldsymbol{I}_{bB}$ 及 $\boldsymbol{I}_{BC}$。由于没有指定工作频率，且需要规定电感值与电容，所以假定 $\omega=1\mathrm{rad/s}$，因此 $f=1/2\pi=0.159155\mathrm{Hz}$。所以：

$$L=\frac{X_L}{\omega} \quad 和 \quad C=\frac{1}{\omega X_C}$$

画出图 17-31 所示的电路图，并另存为 exam1712. dsn。选择 PSpice/New Simulation Profile，弹出 New Simulation 对话框，输入文件名 exam1712，并单击 Create。弹出 Simulation Settings 对话框，选择 Analysis Type 下面的 AC Sweep/Noise，选择 AC Sweep Type 下的 Linear。将 Star Freq 设置为 0.159155，Final Freq 设置为 0.159155，Total Points 设置为 1。

选择 PSpice/Run 进行电路仿真，选择 PSpice/View Output file 得到如下输出文件：

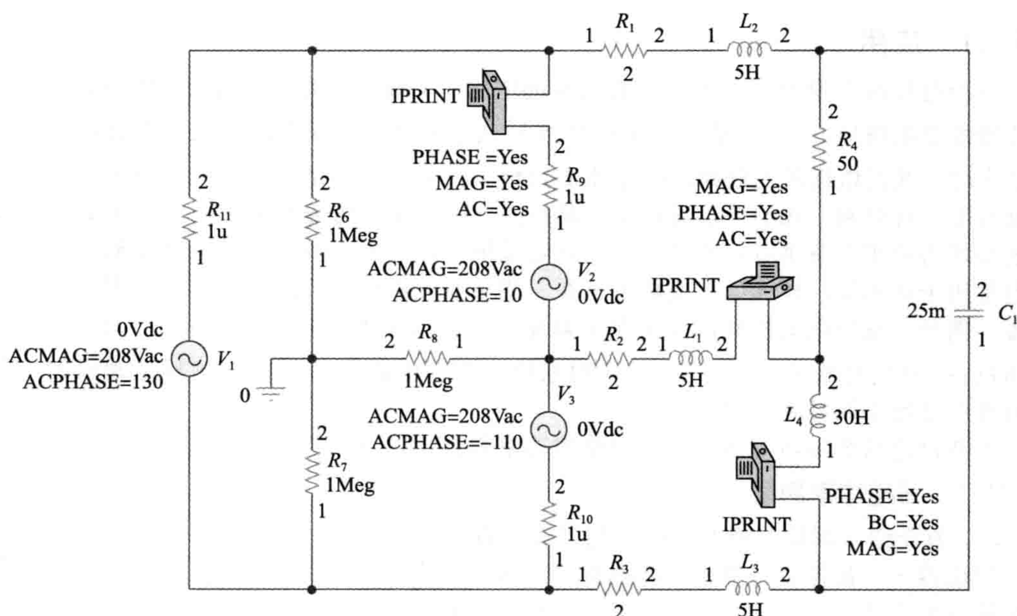


图 17-31 图 17-30 所示电路的 PSpice 原理图

```
FREQ          IM(V_PRINT1)   IP(V_PRINT1)
1.592E-01     9.106E+00      1.685E+02

FREQ          IM(V_PRINT2)   IP(V_PRINT2)
1.592E-01     5.959E+00      2.821E+00

FREQ          IM(V_PRINT3)   IP(V_PRINT3)
1.592E-01     5.500E+00      -7.532E+00
```

由此得到：

$$\boldsymbol{I}_{ab}=5.96\angle 2.82^\circ(\text{A})$$

$$\boldsymbol{I}_{bB}=9.106\angle 168.5^\circ(\text{A})$$

$$\boldsymbol{I}_{BC}=5.5\angle -7.53^\circ(\text{A})$$

◀

练习 17-12 对于图 17-32 所示的非对称电路，用 PSpice 求解发电机电流 $\boldsymbol{I}_{ca}$。线电流 $\boldsymbol{I}_{cC}$ 以及相电流 $\boldsymbol{I}_{AB}$。

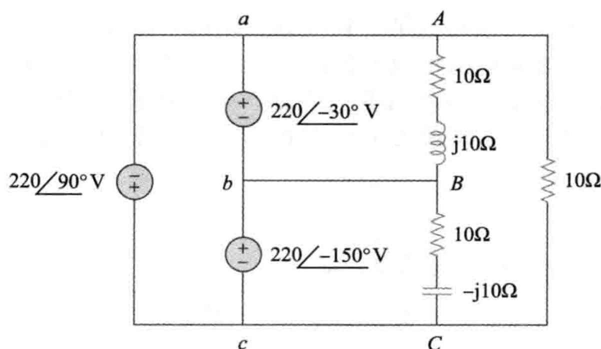


图 17-32 练习 17-12 的电路原理图

答案：24.68 $\angle -90^\circ$ A；15.56 $\angle 105^\circ$ A；37.24 $\angle 83.79^\circ$ A

†17.11 应用

三相电源的Y联结与△联结都有重要的应用。Y联结电源用于远距离电力传输，此时的传输线电阻损耗（I^2R）最小。这是因为Y联结的线电压是△的$\sqrt{3}$倍。因此，传输相同的功率时，其线电流较△联结的线电流小$\sqrt{3}$倍。另外，△联结的还可能出现灾难性的循环电流情况。有时候，我们可以通过变压器产生△联结电源的等效电源。因为家庭照明和家用电器均为单相电源供电，所以在住宅供电系统中，通常需要由三相电转换到单相电。三相电常用于功率需求较大的工业输电，在一些工业应用中，负载是Y联结还是△联结并不重要。例如，感应电动机既可以采用Y联结，也可以采用△联结。实际上，有些制造商将电动机在220V时联结为△，在311V时联结为Y（比值是1∶$\sqrt{3}$），这样电动机的一条线路就可以适用于两种不同的电压。

本章讨论两个实际应用：三相电路的功率测量，以及住宅用户的配电问题。

17.11.1 三相功率测量

3.7节介绍了测量单相电路中平均功率（即有功功率）的仪器——瓦特表。单相瓦特表也可以测量对称三相系统的平均功率，有$P_1=P_2=P_3$，总平均功率是一只瓦特表读数的三倍。但是，如果系统是非对称的，就需要两只或三只单相瓦特表来测量功率。如图17-33所示的三表功率测量法。无论负载是对称的或非对称的，是Y联结还是△联结，都是适用的。三表功率测量法对于功率因数经常变化的三相系统非常适用，总的平均功率为三个瓦特表读数的代数和，即

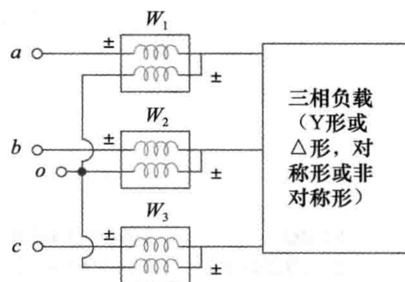


图17-33 测量三相功率的三表法

$$P_T = P_1 + P_2 + P_3 \tag{17-53}$$

其中，P_1、P_2与P_3分别对应于瓦特表W_1、W_2与W_3的读数。注意图17-33中的公共参考点o可以任意选取。如果负载是Y联结，参考点可以连接到其中性线点n上。如果负载是△联结，则参考点o可以连接到任意一点。例如，当点o与点b相连时，瓦特表W_2的电压线圈读数为零，即$P_2=0$，表示瓦特表W_2不是必须的。因此，只需两个瓦特表即可测量系统的总功率。

两表功率测量法是最常用的三相功率测量方法。如图17-34所示，两个瓦特表必须正确地与任意两相连接。需要注意的是，图中各瓦特表的电流线圈测量的是线电流，对应的电压线圈是连接在该相线路与第三相线路之间的，测量的是线电压。还要注意，电压线圈的±端要接到与之对应的电流线圈的±端上。虽然各瓦特表的读数不再是任一相的功率值，但是无论负载是Y联结或是△联结，无论负载是对称的或是非对称的，两个瓦特表读数的代数和仍等于负载吸收的总平均功率。即总的平均功率等于两瓦特表读数的代数和

$$\boxed{P_T = P_1 + P_2} \tag{17-54}$$

瓦特表读数的差值正比于总的无功功率，即

$$\boxed{Q_T = \sqrt{3}(P_2 - P_1)} \tag{17-55}$$

下面说明，上述方法对于对称三相系统有效。用式（17-54）除式（17-55），得到功率因数角的正切值

$$\tan\theta = \frac{Q_T}{P_T} \tag{17-56}$$

注意，

1）如果 $P_2=P_1$，则负载为电阻。

2）如果 $P_2>P_1$，则负载为感性的。

3）如果 $P_2<P_1$，则负载是容性的。

例 17-13 三个瓦特表 W_1、W_2 和 W_3 分别与 a、b、c 三相连接，用于测量例 17-9（图 17-23）中非对称 Y 联结负载吸收的总功率。(a) 试预测瓦特表的读数。(b) 试求负载吸收的总功率。

解：本题的一部分已在例 17-9 中解决。假定瓦特表按照图 17-35 所示方式连接。

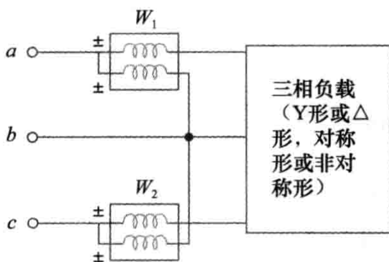


图 17-34 两表功率测量法测量三相功率

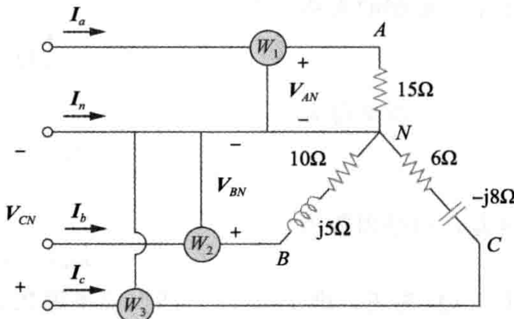


图 17-35 例 17-13 的电路图

(a) 由例 17-9 可知：

$$\mathbf{V}_{AN}=100\angle 0^\circ$$
$$\mathbf{V}_{BN}=100\angle 120^\circ$$
$$\mathbf{V}_{CN}=100\angle -120^\circ(\text{V})$$

而

$$\mathbf{I}_a=6.67\angle 0^\circ$$
$$\mathbf{I}_b=8.94\angle 93.44^\circ$$
$$\mathbf{I}_c=10\angle -66.87^\circ(\text{A})$$

瓦特表读数可计算如下：

$$P_1=\text{Re}(\mathbf{V}_{AN}\mathbf{I}_a^*)=V_{AN}I_a\cos(\theta_{\mathbf{V}_{AN}}-\theta_{\mathbf{I}_a})=100\times 6.67\times\cos(0^\circ-0^\circ)=667(\text{W})$$
$$P_2=\text{Re}(\mathbf{V}_{BN}\mathbf{I}_b^*)=V_{BN}I_b\cos(\theta_{\mathbf{V}_{BN}}-\theta_{\mathbf{I}_b})=100\times 8.94\times\cos(120^\circ-93.44^\circ)=800(\text{W})$$
$$P_3=\text{Re}(\mathbf{V}_{CN}\mathbf{I}_c^*)=V_{CN}I_c\cos(\theta_{\mathbf{V}_{CN}}-\theta_{\mathbf{I}_c})=100\times 10\times\cos(-120^\circ+66.87^\circ)=600(\text{W})$$

(b) 负载吸收的总功率为

$$P_\text{T}=P_1+P_2+P_3=667+800+600=2067(\text{W})$$

求出如图 17.35 所示各电阻器吸收的功率，即可用于验证上述结果的正确性。

$$P_\text{T}=|\mathbf{I}_a|^2(15)+|\mathbf{I}_b|^2(10)+|\mathbf{I}_c|^2(6)=6.67^2\times 15+8.94^2\times 10+10^2\times 6$$
$$=667+800+600=2067(\text{W})$$

结果与上式相同。◀

练习 17-13 对于图 17-24 所示网络（参见练习 17-9）重做例 17-13。提示，将图 17-32 参考点 o 连接到点 B。 **答案**：(a) 2913.23W，0W，4706.46W；(b) 7619.29W

例 17-14 利用二表法测量△联结负载的功率时，瓦特表的读数为 $P_1=1560\text{W}$，$P_2=2100\text{W}$，如果线电压为 220V，试计算：(a) 每相的平均功率；(b) 每相的无功功率；(c) 功率因数；(d) 相阻抗。

解：将已知结果应用于△联结负载上。

(a) 总的有功功率，即总的平均功率为

$$P_T = P_1 + P_2 = 1560 + 2100 = 3660(\text{W})$$

于是，每相的平均功率为

$$P_p = \frac{1}{3}P_T = 1220(\text{W})$$

(b) 总的无功功率为

$$Q_T = \sqrt{3}(P_2 - P_1) = \sqrt{3} \times (2100 - 1560) = 935.3(\text{var})$$

于是，每相的无功功率为

$$Q_p = \frac{1}{3}Q_T = 311.77(\text{var})$$

(c) 功率角为

$$\theta = \arctan\frac{Q_T}{P_T} = \arctan\frac{935.3}{3660} = 14.33^\circ$$

因此，功率因数为

$$\cos\theta = 0.9689(\text{滞后})$$

由于 Q_T 为正，即 $P_2 > P_1$，所以功率因数 pf 是滞后的。

(d) 相阻抗为 $\mathbf{Z}_p = Z_p \angle\theta$，因此 θ 是功率因数角 pf，即 $\theta = 14.33^\circ$，所以：

$$Z_p = \frac{V_p}{I_p}$$

对于△联结负载而言，$V_p = V_L = 220\text{V}$，则由式 (17-43) 可得：

$$P_p = V_p I_p \cos\theta \quad \Rightarrow \quad I_p = \frac{1220}{220 \times 0.9689} = 5.723(\text{A})$$

因此，

$$Z_p = \frac{V_p}{I_p} = \frac{220}{5.723} = 38.44(\Omega)$$

且

$$\mathbf{Z}_p = 38.39 \angle 14.33^\circ(\Omega)$$

◀

练习 17-14 假定如图 17-34 所示对称系统中，线电压为 $V_L = 208\text{V}$，瓦特表的读数为 $P_1 = -560\text{W}$，$P_2 = 800\text{W}$，试确定：(a) 总平均功率；(b) 总无功功率；(c) 功率因数；(d) 相阻抗，并说明该阻抗是感性的还是容性的。

答案：(a) 240W；(b) 2355.6var；(c) 0.9948；(d) $179.1 \angle 5.8174^\circ$

例 17-15 如图 17-36 所示的三相平衡负载，其每相的阻抗为 $\mathbf{Z}_Y = 8 + j6\Omega$，如果将该负载连接到 208V 电源上，试预测瓦特表 W_1 和 W_2 的读数，并求 P_T 和 Q_T。

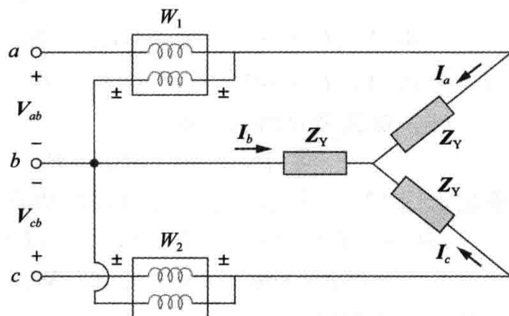


图 17-36 二表法测量平衡 Y 负载

解：每相的阻抗为

$$\mathbf{Z}_Y = 8 + j6 = 10 \angle 36.87^\circ(\Omega)$$

所以，功率因数角为 36.87°。又因线电压为 $V_L = 208\text{V}$，于是线电流为：

$$I_L = \frac{V_p}{|\boldsymbol{Z}_Y|} = \frac{208/\sqrt{3}}{10} = 12(\text{A})$$

因此

$$P_1 = V_L I_L \cos(\theta + 30°) = 208 \times 12 \times \cos(36.87° + 30°) = 980.48(\text{W})$$
$$P_2 = V_L I_L \cos(\theta - 30°) = 208 \times 12 \times \cos(36.87° - 30°) = 2478.1(\text{W})$$

即瓦特表1的读数为980.48W；瓦特表2的读数为2478.1W，即 $P_2 > P_1$，负载为感性的，这从负载 $\boldsymbol{Z}_Y$ 本身就能看出。于是，

$$P_T = P_1 + P_2 = 3458.1(\text{kW})$$

且

$$Q_T = \sqrt{3}(P_2 - P_1) = \sqrt{3}(1497.62)\text{var} = 2.594(\text{kvar})$$ ◀

练习 17-15 如果图 17-36 中的负载为△联结，且每相阻抗 $\boldsymbol{Z}_Y = 30 - \text{j}40\Omega$，$V_L = 440\text{V}$，试预测瓦特表 W_1 与 W_2 的读数，并计算 P_T 与 Q_T。

答案： 6.166kW；0.8021kW；6.968kW；−9.291kvar

17.11.2 住宅供电系统

在美国，绝大多数家庭照明与家用电器设备都采用120V、60Hz单相交流电（不同区域、供电电压可能是110V、115V或117V）。当地供电公司采用三线交流系统为住宅供电，如图17-37所示为一种典型的配电情况，12000V线电压经过变压器降至120/240V（有关变压器的详细介绍参见下一章）。变压器输出的三路线通常用不同的颜色来区分：红色（相线）、黑线（相线）和白色（中性线）。如图17-38所示，两个120V电压相位相反，相加后为零。也就是说，

$$\boldsymbol{V}_W = 0\,\angle 0°, \boldsymbol{V}_B = 120\,\angle 0°, \boldsymbol{V}_R = 120\,\angle 180° = -\boldsymbol{V}_B$$
$$\boldsymbol{V}_{BR} = \boldsymbol{V}_B - \boldsymbol{V}_R = \boldsymbol{V}_B - (-\boldsymbol{V}_B) = 2\boldsymbol{V}_B = 240\,\angle 0° \tag{17-57}$$

由于绝大多数家用电器设备的工作电压都是120V，因此室内照明以及家用电器均为与120V线路相连，如图17-39所示。由图17-38可见，所有的家用电器都是并联连接的。耗电量比较大的一些电器，如空调、洗碗机、电炉以及洗衣机等，均接到240V电源线上。

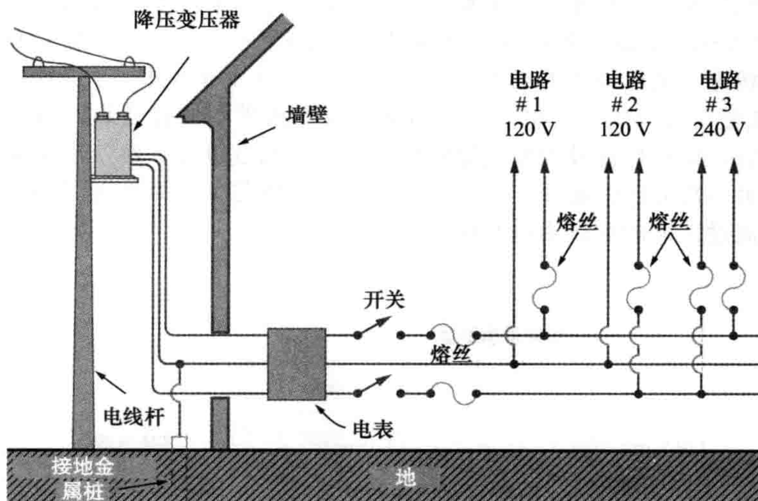


图 17-37 120/240V 民用住宅供电系统

（A. Marcus and C. M. Thomson, Electricity for Technicians, 2nd edition, © 1975, p. 324. 经 Pearson Education 公司的允许转载，Upper Saddle River, NJ.）

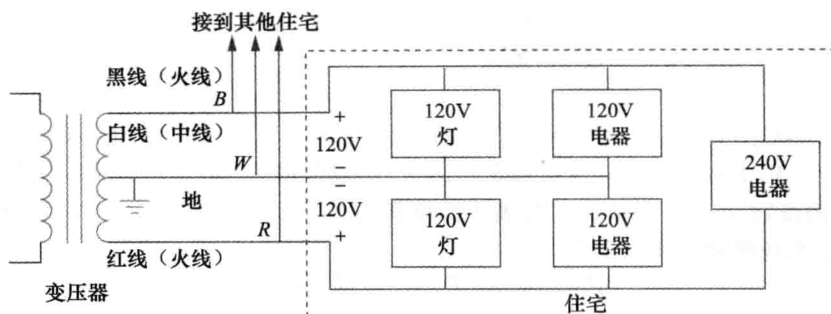


图 17-38　单相三线住宅供电线路

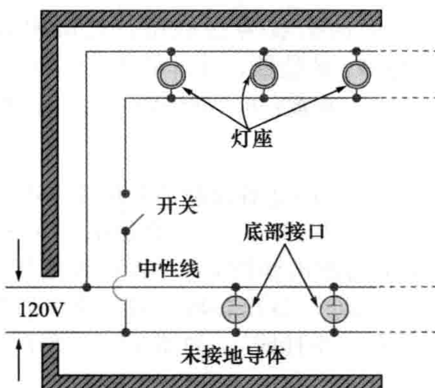


图 17-39　典型的室内供电线路图

（A. Marcus and C. M. Thomson，Electricity for Technicians，2nd edition，© 1975，p. 324. 经 Pearson Education 公司许可转载，Upper Saddle River，NJ.）

由于用电的危险性，住宅供电线路必须严格按照当地法规以及美国国家电气规程（NEC）予以规范（在加拿大，电气工程由加拿大电气规程（CEC）予以规范），为了避免事故发生，必须采用隔离、接地、保险以及电路断路器等措施。现代线路规程要求第三路线单独接地，地线与中性线都不用于输电，但可以使电气设备单独接地。图 17-40 所示为电源插座与 120Vrms 电源线和地线的连接情况。如图所示，中性线在很多关键的位置都与地（大地）相连。虽然地线看起来是多余的，但是接地很重要，其原因有很多。首先，接地是 NEC 规程所要求的；其次，接地为累积放电提供了便捷通道，可以防止雷击破坏输电线路；最后，接地可以最大限度地降低电击触电的危险性。电击现象是电流从人体的某一部分流向另一部分所引起的。人体相当于一个大电阻 R，如果用 V 表示人体与地之间的电位差，则流过人体的电流由欧姆定律决定：

$$I=\frac{V}{R} \tag{17-58}$$

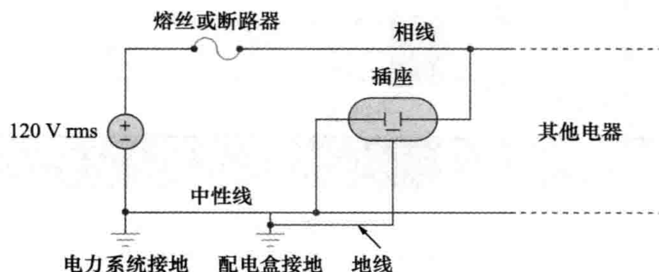


图 17-40　插座与相线和底线的连接方式

R 的值因人而异，并且与人体的干湿程度有关。谁也不知道触电什么时候是致命的，但是我们可以确定触电通常会受到伤害。电击可以导致肌肉痉挛、无力、浅呼吸、脉搏加速、重度烧伤、失去知觉，甚至是死亡。电击严重程度或致命程度取决于流过人体的电流量、电流流过人体的路径以及人体触电时间的长短。对于小于 1mA 的电流，不会对人体造成任何危害，但大于 10mA 的电流会导致严重的电击。表 17-2 所示为不同电流强度情况下对人体造成伤害的大致情况。

表 17-2 电击

电流强度	生理反应
小于 1mA	没有感觉
1mA	刺痛感
5～20mA	不自觉的肌肉收缩
20～100mA	丧失呼吸，直至致命

在电击可能性最大的户外电路以及浴室电路，通常采用现代安全设备——接地故障电路断路器（ground-fault circuit interrupter，GFCI）。它实际上就是一个电路断电器，当流过红、白、黑线的电流 i_R、i_W 和 i_B 之和不为零时（存在其他电流路径，例如通过人体），即避免电击的最佳方法是遵守与电气系统和电气装置有关的安全操作规程，下面是其中的一部分：

- 千万不要假定电路不带电，一定要检查并确认。
- 必要时应该使用安全器具，着装合适（绝缘靴、绝缘手套等）。
- 切勿同时使用双手检测高压电路，因为从一只手流到另一只手的电流会直接经过心脏或胸膛。
- 双手潮湿时，切勿触摸电气设备。牢记水是导电的。
- 收音机、电视机等家用电器中均有大容量电容，电源在关闭后，需要一段时间才能放电完毕。因此，操作此类设备时一定要非常小心。
- 在接线或检修时，一定要有另一个人在场，以防发生意外。
- 万一发现有人遭受电击，不要触摸正与电源相连接的受害人，避免危及自身安全。用木棍或者木板将受害人与电源分离。如果可行，请切断电源，并立即拨打 911 寻求紧急救助。

17.12 本章小结

1）相序是三相发电机相电压产生的时间顺序。在相序为 abc 的对称电源系统中，电压 $\mathbf{V}_{an}$ 较 $\mathbf{V}_{bn}$ 超前 120°，$\mathbf{V}_{bn}$ 又较 $\mathbf{V}_{cn}$ 超前 120°。在相序为 acb 的对称电源系统中，电压 $\mathbf{V}_{an}$ 较 $\mathbf{V}_{cn}$ 超前 120°，$\mathbf{V}_{cn}$ 又较 $\mathbf{V}_{bn}$ 超前 120°。

2）对于对称 Y 联结负载或对称△联结负载而言，其三相阻抗也是相等的。

3）对称三相电路最简单的分析方法是将电源与负载都转换到 Y－Y 系统，然后分析其等效电路。表 17-1 列出了四种可能结构的相电流、相电压、线电流与线电压之间的计算公式。

4）在三相系统中，线电流 I_L 是指各传输线路中从发电机流向负载的电流，线电压 V_L 是指除中性线（如果有）以外的每一对线之间的电压。相电流 I_p 是指流过三相负载每一相的电流，而相电压 V_p 则是每一相的电压。对于 Y 联结负载：

$$V_\mathrm{L}=\sqrt{3}V_\mathrm{p} \quad 且 \quad I_\mathrm{L}=I_\mathrm{p}$$

对于△联结负载：

$$V_\mathrm{L}=V_\mathrm{p} \quad 且 \quad I_\mathrm{L}=\sqrt{3}I_\mathrm{p}$$

5）对称三相系统的总瞬时功率是恒定的，且等于其平均功率。

6）对称三相 Y 联结或△联结负载吸收的总复功率为

$$\mathbf{S}=P+\mathrm{j}Q=\sqrt{3}V_\mathrm{L}I_\mathrm{L}\angle\theta$$

其中，θ 为负载阻抗的辐角。

7）非对称三相系统的分析可以采用节点电压法或网孔电流法。

8）和分析单相电路一样，PSpice 可以用来分析三相电路。
9）三相系统总的有功功率的测量既可以采用三表功率测量法，也可以采用两表功率测量法。
10）美国和加拿大的住宅输电线路采用 120/240V、单相、三相系统。

复习题

1 某三相电动机的 $\boldsymbol{V}_{AN}=220\angle -100^\circ$ V，$\boldsymbol{V}_{BN}=220\angle 140^\circ$ V 试问其相序为：
(a) *abc* (b) *acb*

2 如果在 *acb* 相序下，$\boldsymbol{V}_{an}=100\angle -20^\circ$，则 $\boldsymbol{V}_{cn}$ 为：
(a) $100\angle -140^\circ$ (b) $100\angle 100^\circ$
(c) $100\angle -50^\circ$ (d) $100\angle 10^\circ$

3 对于对称系统，下列条件哪个不是必需的？
(a) $|\boldsymbol{V}_{an}|=|\boldsymbol{V}_{bn}|=|\boldsymbol{V}_{cn}|$
(b) $\boldsymbol{I}_a+\boldsymbol{I}_b+\boldsymbol{I}_c=0$
(c) $V_{an}+V_{bn}+V_{ac}=0$
(d) 电源电压彼此之间的相位差为 120°
(e) 三相的负载阻抗是相等

4 在 Y 联结负载中，线电流与相电流是相等。
(a) 确 (b) 错误

5 在△联结负载中，线电流与相电流是相等的。
(a) 正确 (b) 错误

6 在 Y-Y 系统中，220V 线电压产生的相电压为：
(a) 381V (b) 311V
(c) 220V (d) 156V
(e) 127V

7 在△-△系统中，100V 相电压产生的线电压为：
(a) 58V (b) 71V
(c) 100V (d) 173V
(e) 141V

8 当利用 *abc* 相序的电源为 Y 联结负载供电时，线电压较相应的相电压滞后 30°。
(a) 正确 (b) 错误

9 在对称三相电路中，总的瞬时功率等于平均功率。
(a) 正确 (b) 错误

10 提供给对称△联结负载的总功率的计算方法与对称 Y 联结负载总功率的计算方法相同。
(a) 正确 (b) 错误

答案：1 (a)，2 (a)，3 (c)，4 (a)，5 (b)，6 (e)，7 (c)，8 (b)，(9) a，(10) a

习题

17-3 节

1 如果某对称 Y 联结三相发电机的 $\boldsymbol{V}_{ab}=400$V，试求如下两种相序下的相电压：
(a) *abc* 相序 (b) *acb* 相序

2 如果某对称三相电路的 $\boldsymbol{V}_{an}=160\angle 30^\circ$ V，$\boldsymbol{V}_{cn}=160\angle -90^\circ$ V，试问该电路的相序是什么？并确定 $\boldsymbol{V}_{bn}$。

3 试确定 $\boldsymbol{V}_{bn}=208\angle 130^\circ$ V，且 $\boldsymbol{V}_{cn}=208\angle 10^\circ$ V 的对称三相电路的相序，并求出 $\boldsymbol{V}_{an}$。

4 假定相序为 *abc*，如果某对称三相电路的 $\boldsymbol{V}_{ca}=208\angle 20^\circ$ V，试求 $\boldsymbol{V}_{ab}$、$\boldsymbol{V}_{bc}$、$\boldsymbol{V}_{an}$ 和 $\boldsymbol{V}_{bn}$。

5 如果 $\boldsymbol{V}_{An}=440\angle 30^\circ$ V，计算 $\boldsymbol{V}_{nA}$。

6 对于某网络，已知 $\boldsymbol{V}_{12}=120\angle 30^\circ$ V，$\boldsymbol{V}_{42}=60\angle -60^\circ$ V，以及 $\boldsymbol{V}_{45}=40\angle 90^\circ$ V。试求 $\boldsymbol{V}_{14}$ 和 $\boldsymbol{V}_{25}$。

17-4 节

7 某三相 Y 联结发电机的线电压为 440V，试确定相电压。

8 某三相 Y 联结负载的相电压为 127V，试确定线电压。

9 三相 Y 形发电机的相序为 *abc*。如果一个相电压 $\boldsymbol{V}_{AN}=230\angle 15^\circ$ V，确定：(a) 其他相电压以及 (b) 线电压 $\boldsymbol{V}_{AB}$、$\boldsymbol{V}_{BC}$、$\boldsymbol{V}_{CA}$。

10 对于图 17-41 所示 Y-Y 电流，计算线电流、线电压和负载电压。

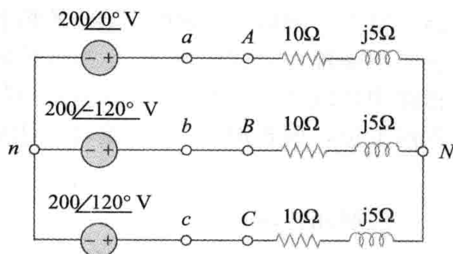


图 17-41 习题 10 的电路图

11 计算图 17-42 所示三相电路的线电流。

12 某对称 Y 联结负载的相阻抗为 16+j9Ω，它与一个对称三相电源相连，该电源的线电压为 220V，试计算线电流 I_L。

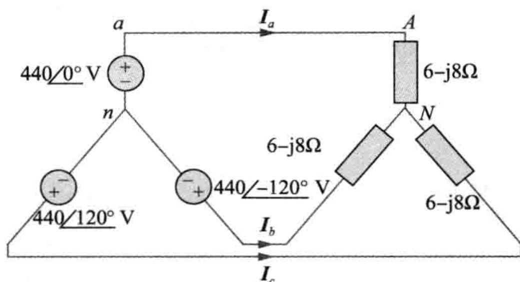


图 17-42　习题 11 和 44 的电路原理图

13　某对称 Y-Y 形四线系统的相电压 $V_{an}=120\angle 0^\circ$，$V_{bn}=120\angle -120^\circ$，$V_{cn}=120\angle 120^\circ$ V。每一相的负载阻抗为 19＋j13Ω，每一相的线阻抗为 1＋j2Ω。试求解线电流和中性线电流。

14　某四线 Y-Y 形系统，线电流为 $8\angle -30^\circ$ A、$12\angle 60^\circ$ A 和 −j16A，试计算中性线电流。

17-5 节

15　对于图 17-43 所示三相电路，已知 $I_{bB}=30\angle 60^\circ$ A，$V_{BC}=220\angle 10^\circ$ V，试求 V_{an}、V_{AB}、I_{AC} 和 Z。

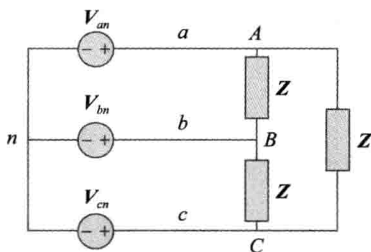


图 17-43　习题 15 的电路原理图

16　求图 17-44 所示 Y-△电路的线电流，其中 $Z_\triangle=60\angle 45^\circ$ Ω。

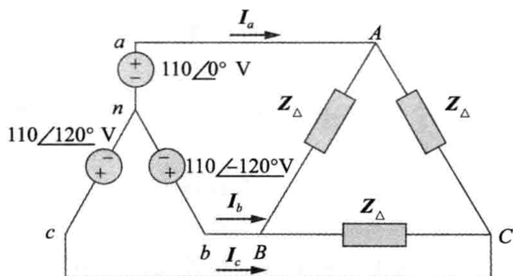


图 17-44　习题 16 的电路原理图

17　图 17-45 所示电路由线电压为 210V 的对称三相电源激励，如果 $Z_l=1+j1\Omega$，$Z_\triangle=24-j30\Omega$，且 $Z_Y=12+j5\Omega$，试确定合并负载的线电流大小。

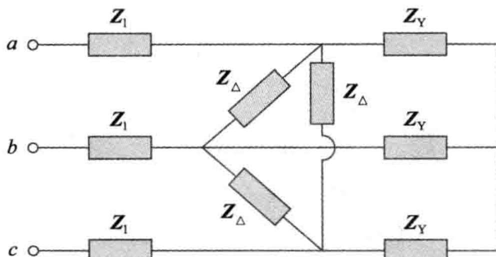


图 17-45　习题 17 的电路原理图

18　某对称△联结负载的相电流 $I_{AC}=10\angle -30^\circ$A。

（a）假定电路按正序工作，确定三个线电流

（b）如果线电压为 $V_{AB}=110\angle 0^\circ$ V，试计算负载阻抗。

19　一个 240V 三相系统为一个对称△联结负载提供 25kW 的功率，功率因数为 0.8 滞后时，试求：

（a）线电路；　（b）相电流；

（c）相阻抗。

17.6 节

20　对于图 17-46 所示的对称△-△联结，计算其相电流和线电流。

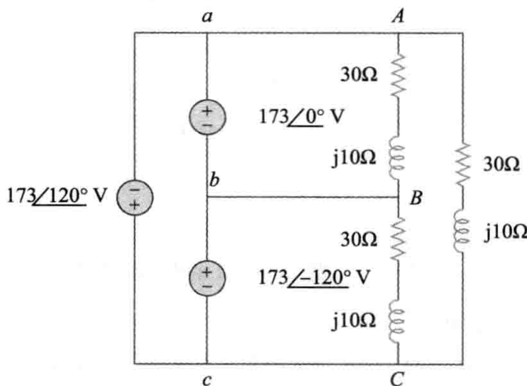


图 17-46　习题 20 的电路原理图

21　对于图 17-47 所示的△-△电路，假定其负载阻抗为 12＋j9Ω，计算其线电流和相电流。

22　某三相对称系统的线电压为 208V，向一个 $Z_p=25\angle 60^\circ$ Ω 的△联结负载提供能量，试求：（a）线电流；（b）使用两个连接在 A 线和 C 线的瓦特表测量，确定提供给负载的总功率。

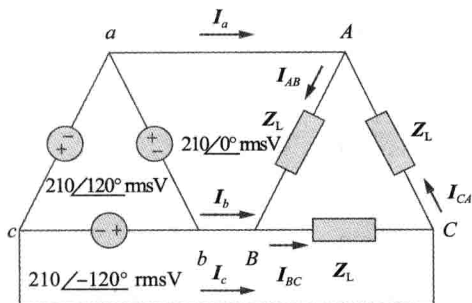


图 17-47　习题 21 的电路原理图

23　某对称△联结电源的相电压为 $\boldsymbol{V}_{ab}=416\angle 30^\circ$ V，并采用正相序，如果该网络连接到一个对称△负载，试计算线电流和相电流。假定每一相的负载阻抗为 $60\angle 30^\circ$ Ω，每一相的线阻抗为 j1Ω。

24　对于图 17-48 所示的三相负载，令 $\boldsymbol{V}_{AB}=120\angle 0^\circ$ V，$\boldsymbol{V}_{BC}=120\angle -120^\circ$ V，$\boldsymbol{V}_{CA}=120\angle 120^\circ$ V，试求：

(a) $\boldsymbol{V}_{an}$、$\boldsymbol{V}_{bn}$ 和 $\boldsymbol{V}_{cn}$；

(b) $\boldsymbol{I}_{an}$、$\boldsymbol{I}_{bn}$ 和 $\boldsymbol{I}_{cn}$。

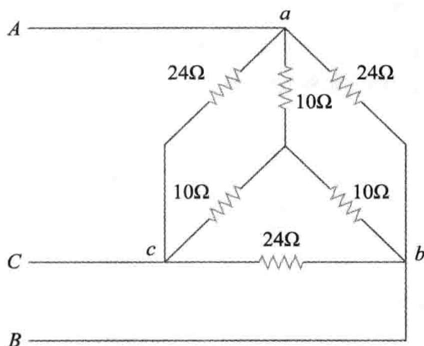


图 17-48　习题 24 和 30 的电路原理图

17.7 节

25　对于图 17-49 所示电路，如果 $\boldsymbol{V}_{ab}=440\angle 10^\circ$，$\boldsymbol{V}_{bc}=440\angle 250^\circ$，$\boldsymbol{V}_{ca}=440\angle 130^\circ$ V，计算线电流。

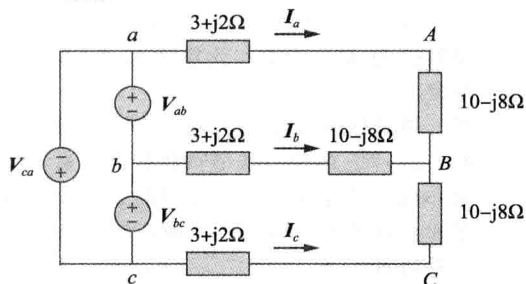


图 17-49　习题 25 的电路原理图

26　对于图 17-50 所示对称电路，已知 $\boldsymbol{V}_{ab}=125\angle 0^\circ$ V，试求线电流 $\boldsymbol{I}_{aA}$、$\boldsymbol{I}_{bB}$ 和 $\boldsymbol{I}_{cC}$。

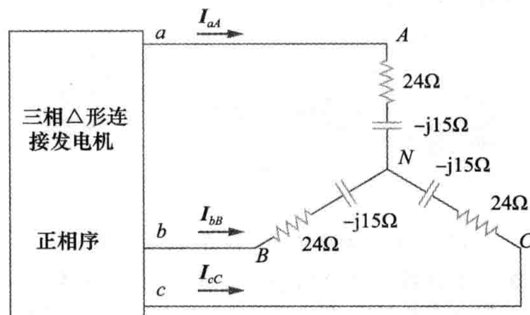


图 17-50　习题 26 的电路原理图

27　某个对称三相△－Y 电路，电源正相序联结，且 $\boldsymbol{V}_{ab}=220\angle 20^\circ$ V，$\boldsymbol{Z}_Y=20+\mathrm{j}15\Omega$，试求线电流。

28　一个△联结发电机向一个对称 Y 联结负载供电，其阻抗为 $30\angle -60^\circ$ Ω。如果发电机产生的线电压幅度为 400V，并按正序排列，计算负载的线电流 I_L 和相电压 V_p。

29　对于图 17-51 所示的对称△-Y 系统，试求线电流的幅度。

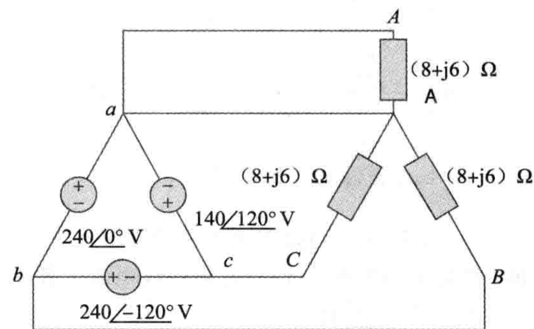


图 17-51　习题 29 的电路原理图

17.8 节

30　对于图 17-48（见习题 24）所示系统，试求：

(a) 传递给 10Ω Y 负载的功率；

(b) 传递给 24Ω △负载的功率；

31　某三相发电机的每个绕组输出 4kW 功率，并连接对称三相负载，试确定发电机提供的总的最大瞬时功率。

32　某功率因数为超前 0.6 的对称 Y 联结负载连接的线电压为 240V，吸收的总功率为 5kW。计算每一相的负载以及负载吸收的总的复功率。

33 某功率因数为滞后 0.9 的对称 Y 联结负载吸收 50kV · A，其线电压为 440V。计算线电流和相阻抗。

34 某三相电源传递给相电压为 208V，功率因数为 0.9 滞后的某 Y 联结负载的功率为 4800V · A，计算电源端的线电流和线电压。

35 某阻抗为 10－j16Ω 的对称 Y 联结负载与线电压为 220V 的对称三相发电机相连接，试确定线电流与负载吸收的复功率。

36 计算图 17-52 所示负载吸收的有功功率。

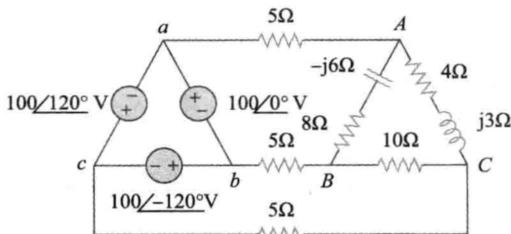


图 17-52 习题 36 的电路原理图

37 以下三种并联的三相负载由一个对称的三相电源供电：

负载 1：250kV · A，功率因数为 0.8pf 滞后

负载 2：300kV · A，功率因数为 0.95pf 超前

负载 3：450kV · A，功率因数为 1pf

假定线阻抗为零，如果线电压为 13.8kV，计算线电流和电源的功率因数。

17.9 节

38 对于图 17-53 所示电路，如果 $\boldsymbol{Z}_a=6-\mathrm{j}8\Omega$，$\boldsymbol{Z}_b=12+\mathrm{j}9\Omega$，$\boldsymbol{Z}_c=15\Omega$，计算线电流 $\boldsymbol{I}_a$、$\boldsymbol{I}_b$ 和 $\boldsymbol{I}_c$。

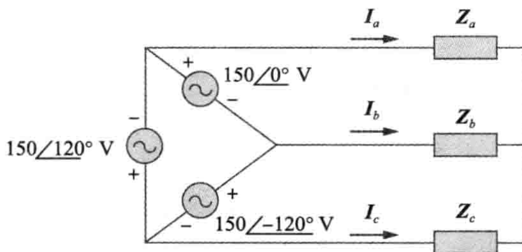


图 17-53 习题 38 的电路原理图

39 某个△联结负载的相阻抗为 $\boldsymbol{Z}_{AB}=50\Omega$，$\boldsymbol{Z}_{BC}=-\mathrm{j}50\Omega$，$\boldsymbol{Z}_{CA}=\mathrm{j}50\Omega$，并由一个对称 Y 联结三相电源供电，且 $\boldsymbol{V}_p=100\mathrm{V}$。试求相电流。

40 参考图 17-54 的非对称电路，计算：(a) 线电流；(b) 负载吸收的有功功率；(c) 电源提供的总的复功率。

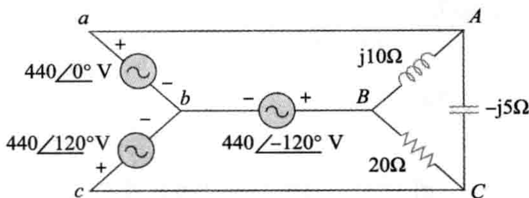


图 17-54 习题 40 的电路原理图

41 令 $\boldsymbol{V}_a=110\angle 0^\circ$，$\boldsymbol{V}_b=110\angle -120^\circ$，$\boldsymbol{V}_c=110\angle 120^\circ$ V，确定图 17-55 所示三相电路的线电流。

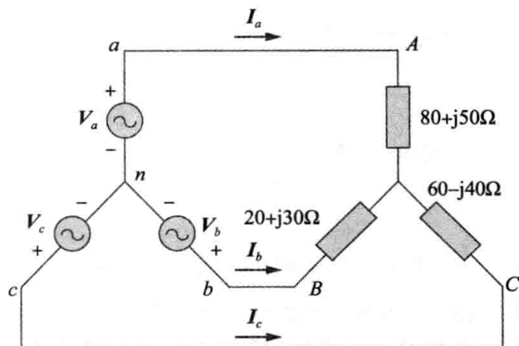


图 17-55 习题 41 的电路原理图

42 某个三相四绕组系统的 $V_L=120\mathrm{V}$，给一个非对称 Y 联结负载供电，且有 $\boldsymbol{Z}_A=4\angle 90^\circ\ \Omega$，$\boldsymbol{Z}_B=10\angle 60^\circ\ \Omega$，$\boldsymbol{Z}_C=8\angle 0^\circ\ \Omega$。计算四个线电流。

43 计算图 17-56 所示 Y-Y 系统中传递给三相负载的复功率。

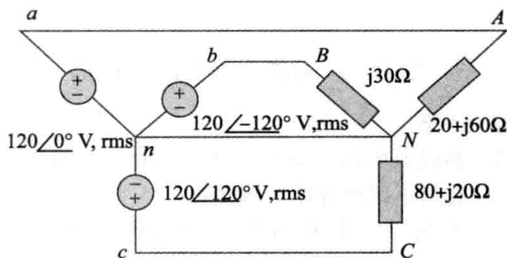


图 17-56 习题 43 的电路原理图

17.10 节

44 用 PSpice 重新求解习题 11。

45 如图 17-57 所示电源是对称、正序三相电源，如果 $f=60\mathrm{Hz}$，试利用 PSpice 求解 $\boldsymbol{V}_{AN}$、$\boldsymbol{V}_{BN}$ 和 $\boldsymbol{V}_{CN}$。

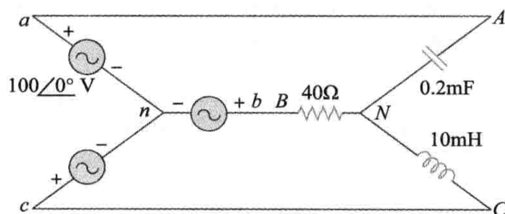


图 17-57 习题 45 的电路原理图

46 试利用 PSpice 确定图 17-58 所示单相三线电路中的 $\mathbf{I}_o$，假定 $\mathbf{Z}_1 = 15 - j10\Omega$，$\mathbf{Z}_2 = 30 + j20\Omega$ 且 $\mathbf{Z}_3 = 12 + j5\Omega$。

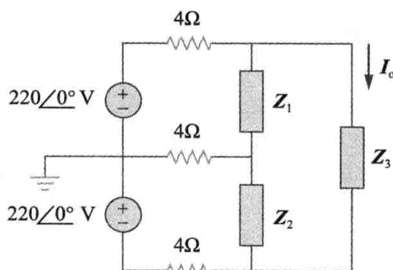


图 17-58 习题 46 的电路原理图

47 图 17-59 所示电路的工作频率为 60Hz，试利用 PSpice 求解电源电流 $\mathbf{I}_{ab}$ 与线电流 $\mathbf{I}_{bB}$。

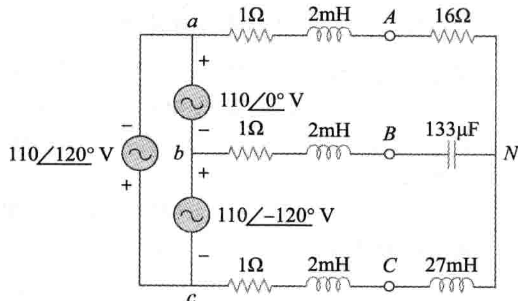


图 17-59 习题 47 的电路原理图

17.11 节

48 某职业中心由对称三相电源供电，该中心有如下四种对称三相负载：

负载 1：功率因数为 0.8*pf* 超前时为 150kV · A

负载 2：功率因数为 1*pf* 时为 100kW

负载 3：功率因数为 0.6*pf* 时为 200kV · A

负载 4：80kW 与 95kvar（感性的）

如果每相的线阻抗为 0.02＋j0.05Ω，负载段的线电压为 480V，试求电源端的线电压。

49 用两表法测得三相电动机在 240V 输电线路下的 $P_1 = 1200$W，$P_2 = -400$W，假定电动机负载为 Y 联结，提取的线电流为 6A，试计算电动机的功率因数及其相阻抗。

50 对于图 17-60 所示电路，试求图中瓦特表的读数。

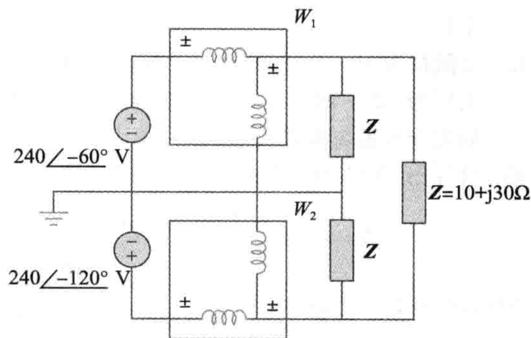


图 17-60 习题 50 的电路原理图

51 试预测图 17-61 所示电路中瓦特表的读数。

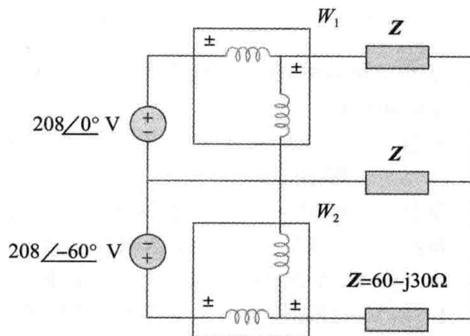


图 17-61 习题 51 的电路原理图

52 对于图 17-62 所示的单相三线系统，试求电流 $\mathbf{I}_{aA}$、$\mathbf{I}_{bB}$ 和 $\mathbf{I}_{nN}$。

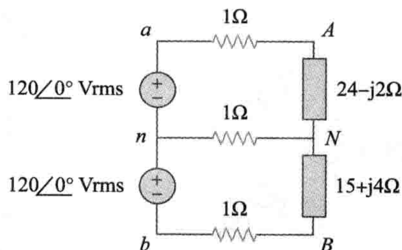


图 17-62 习题 52 的电路原理图

53 某工厂使用 480V 三相电源供电，消耗的功率为 160kV · A，功率因数为 0.8 滞后，试求：(a) 每一个线电流；(b) 传递的总功率；(c) 负载的总功率。

第18章 变压器和耦合电路

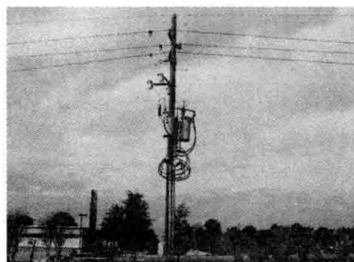
谁不学习削弱他。

——《犹太法典》

拓展职业生涯

控制系统领域的职业生涯

电路分析对于控制系统领域同样很重要。控制系统按照某种期望的方式调整一个或多个变量的行为特征。大量的控制系统都是基于传感器的。控制系统在日常生活中起着非常重要的作用，诸如供暖系统与空调系统等家用电器、开关控制恒温器、洗衣机和烘干机、汽车的巡航控制器、电梯、交通指示灯、制造业工程、导航系统等都会用到控制系统，在航空航天领域，太空探测器的精确导航、航天飞机的运动模式控制，以及宇宙空间站的地面遥控等，这些都需要用到控制系统的知识。在制造业领域，批量生产流水线的控制越来越依赖于机器人来完成，而机器人本身就是一个可编程的控制系统，可以长期不知疲劳地工作。从现代的农业综合企业到下水道处理，从地铁到航线，这些领域都离不开控制系统。



安装在电线杆上的变压器

(© Sarhan M. Musa)

控制工程汇集了电路理论和通信理论的知识。它并不局限于任何一项专门的工程学科，也可能包含在环境学、化学、航空学、机械学、土木工程学和电子工程学等学科中。例如，控制系统工程师的一项典型任务是设计一个光盘驱动头的速度调节器。另一个例子是开发太赫兹（THz）传感器系统，能够远程识别隐藏在人体身上或行李中的可疑物体或爆炸物以及毒品（该系统基于连续波太赫兹技术）。

系统地理解控制系统的各项技术是对电子工程师的基本要求，这对于设计实现特定功能的控制系统具有重大的实际意义。

18.1 引言

之前讨论的电路可以看作通过电流传导耦合的（conductively coupled），因为一个回路可以通过电流传导影响相邻的回路。当两个相互接触或不接触的回路之间通过其中一个回路所产生的磁场相互影响时，则被称为磁耦合（magnetically coupled）。

变压器是一种在磁耦合基础上设计出来的电子设备。它利用磁耦合线圈，将能量从一个电路转换到另一个电路。变压器是电子电路中的关键元件。在电力系统中，利用变压器实现交流电压或交流电流的升高或降低。在无线电广播和电视接收机电路中，利用变压器实现阻抗匹配，将电路的两部分相互隔离开，同时也可用于实现交流电压或交流电流的升高或降低。

本章首先介绍互感的概念，进而引入用于确定电感耦合元件电压极性的同名端标记法则。接下来基于互感的概念，介绍一种重要的电路元件——变压器，包括线性变压器、理想变压器和自耦变压器。最后，讨论变压器的应用，包括变压器作为隔离器件和匹配器件的应用，以及变压器在电力配送中的应用。

18.2 互感

当两个线圈彼此接近时，一个线圈中电流的变化会影响另一个线圈的电流和电压，这种现象称为*互感*（mutual inductance）。两个电路的互感取决于两个电路的相互位置关系。

首先讨论由 N 匝线圈的构成的单个电感。当电流 i 流过该线圈时，在其周围产生磁通量 ϕ（如图 18-1 所示）。根据法拉第定律，该线圈中的感应电压 v 正比于线圈的匝数 N，以及磁通量 ϕ 随时间的变化率，即

$$v = N\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} \tag{18-1}$$

但是磁通 ϕ 是由电流 i 产生的，所以磁通量的任何变化是由电流的变化所引起的，式（18-1）可重写为

$$v = N\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}i}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \tag{18-2}$$

式中 $L=N(\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t)$ 表示电感器的电感值。式（18-2）是电感的电压—电流关系。电感器 L 通常称为自感（self-inductance），因为它表示的是同一个电感器的时变电流与其感应电压之间的关系。

自感是指一个线圈产生感应电压的能力，单位是亨利（H）。

下面考虑两个彼此相邻的、自感分别是 L_1 和 L_2 的线圈（如图 18-2 所示）。线圈 1 有 N_1 匝，线圈 2 有 N_2 匝。为简单起见，假定第二个电感中无电流。此时，由线圈 1 引起的磁通量 ϕ_1 由两部分组成，一个分量 ϕ_{11} 仅与线圈 1 交链，另一个分量 ϕ_{12} 与两个线圈交链，因此：

$$\phi_1 = \phi_{11} + \phi_{12} \tag{18-3}$$

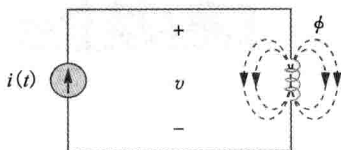


图 18-1 一个 N 匝线圈产生磁通量

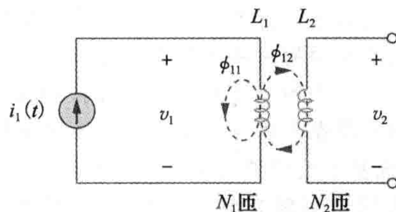


图 18-2 线圈 1 对线圈 2 产生的磁通量 M_{21}

尽管两个线圈在物理上是分离的，但它们称为*磁耦合的*（magnetically coupled）。由于全部磁通量 ϕ_1 与线圈 1 交链，因此，线圈 1 的感应电压为

$$v_1 = N_1\frac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}t} = N_1\frac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}i_1}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \tag{18-4}$$

式中，$L_1=N_1(\mathrm{d}\phi_1/\mathrm{d}i_1)$ 称为线圈 1 的自感。只有磁通量 ϕ_{12} 与线圈 2 交链，因此线圈 2 的感应电压为

$$v_2 = N_2\frac{\mathrm{d}\phi_{12}}{\mathrm{d}t} = N_2\frac{\mathrm{d}\phi_{12}}{\mathrm{d}i_1}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = M_{21}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \tag{18-5}$$

式中，$M_{21}=N_2(\mathrm{d}\phi_{12}/\mathrm{d}i_1)$ 称为线圈 2 对相对于线圈 1 的互感（mutual inductance）。下标 21 表示互感 M_{21} 是联系线圈 2 的感应电压和线圈 1 中的电流的物理量。因此，线圈 2 两端的开路互感电压（即感应电压）为

$$\boxed{v_2 = M_{21}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}} \tag{18-6}$$

下面假定流过线圈 2 的电流为 i_2，而线圈 1 中没有电流，如图 18-3 所示。则由线圈 2 产生

的磁通量 ϕ_2 由 ϕ_{22} 和 ϕ_{21} 组成，其中 ϕ_{12} 只和线圈 2 交链，ϕ_{21} 与两个线圈交链，因此

$$\phi_2 = \phi_{21} + \phi_{22} \tag{18-7}$$

由于所有磁通量 ϕ_2 都与线圈 2 交链，线圈 2 的感应电压为

$$v_2 = N_2 \frac{\mathrm{d}\phi_2}{\mathrm{d}t} = N_2 \frac{\mathrm{d}\phi_2}{\mathrm{d}i_2}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \tag{18-8}$$

式中，$L_2 = N_2(\mathrm{d}\phi_2/\mathrm{d}i_2)$ 是线圈 2 的自感。由于只有磁通量 ϕ_{21} 与线圈 1 交链，所以线圈 1 的感应电压为

$$v_1 = N_1 \frac{\mathrm{d}\phi_{21}}{\mathrm{d}t} = N_1 \frac{\mathrm{d}\phi_{21}}{\mathrm{d}i_2}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = M_{12} \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \tag{18-9}$$

式中，$M_{12} = N_1(\mathrm{d}\phi_{21}/\mathrm{d}i_2)$ 称为线圈 1 相对于线圈 2 的互感。因此，线圈 1 两端的开路互感电压为

$$\boxed{v_1 = M_{12} \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}} \tag{18-10}$$

下一节将证明 M_{12} 和 M_{21} 是相等的，即

$$M_{12} = M_{21} = M \tag{18-11}$$

称 M 为两线圈之间的互感。与自感 L 相同，互感 M 的单位是亨利（H）。注意，仅当两个电感或线圈距离很近时，并且电路是由时变电源驱动时，才存在互感耦合。对于直流电路，电感器相当于短路。

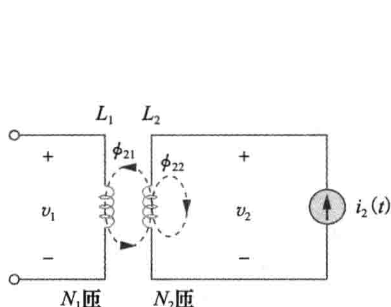


图 18-3　线圈 1 相对于线圈 2 的互感量 M_{12}

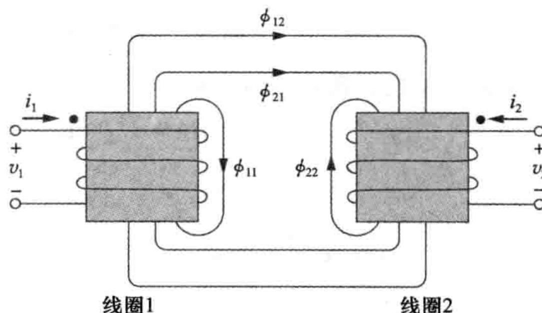


图 18-4　同名端规则的说明

从图 18-2 和 18-3 两种情况可以总结出，如果感应电压是由另一个电路中的时变电流引起的，则存在互感。互感是电感器的一个特性，即电感器产生的电压会反作用于邻近的另外一个电感器的时变电流。因此，

互感是指一个电感在其相邻的电感两端产生感应电压的能力，单位是亨（H）。

互感 M 总是正的，但是与自感电压 $L(\mathrm{d}i/\mathrm{d}t)$ 一样，互感电压 $M(\mathrm{d}i/\mathrm{d}t)$ 可正可负。但与自感电压 $L(\mathrm{d}i/\mathrm{d}t)$ 的极性由电流参考方向和电压参考极性（符合无源符号法则）决定不同，确定互感电压 $M(\mathrm{d}i/\mathrm{d}t)$ 的极性并不简单，因为互感涉及四个端点。正确选择极性的方法是：检查两个线圈的物理绕向，并利用楞次定理和右手准则来判定感应电压的极性。但是在电路图中画出线圈缠绕结构很不方便，因此在电路分析中，通常采用同名端规则来进行简化。按照该规则，在两个磁耦合线圈的一段各标一个圆点，该点表示电流从该点流入线圈时磁通量的方向，如 18-4 所示。通常，在给定的电路中，线圈的同名端已经标注好了，因此不必考虑如何放置线圈。使用同名端连同同名端规则来确定互感电压的极性。

同名端规则：

如果电流从一个线圈的同名端处流入，则在另一个线圈的同名端处产生参考极性为正

的感应电压；或者电流从一个线圈的同名端处流出，则在另一个线圈的同名端处产生参考极性为负的感应电压。

因此，互感电压的参考极性由诱导电流的参考方向以及耦合线圈的同名端共同确定。图 18-5给出了同名端规则在四对耦合线圈中的应用。对于图 18-5a 所示耦合线圈，互感电压 v_2 的符号取决于 v_2 的参考极性与电流 i_1 的方向。因为 i_1 是从线圈 1 的同名端处流入，且 v_2 在线圈 2 的同名端为正，所以互感电压为 $+M(\mathrm{d}i_1/\mathrm{d}t)$。对于图 18-5b 所示线圈，电流 i_1 从线圈 1 的同名端流入，但互感电压 v_2 在线圈 2 的同名端处为负，所以互感电压为 $-M(\mathrm{d}i_1/\mathrm{d}t)$。按照同样的方法可以得到图 18-5c 和图18-5d 所示线圈的互感电压。图 18-6 所示为串联耦合线圈的同名端规则。对于图 18-6a 所示线圈，总的电感量为

$$\boxed{L = L_1 + L_2 + 2M \quad (\text{同向串联})} \tag{18-12}$$

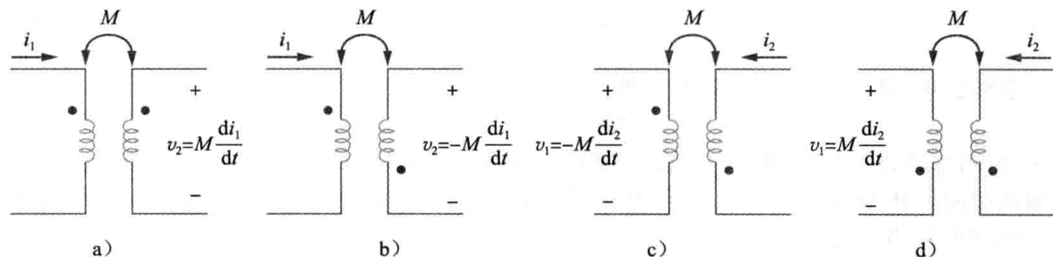


图 18-5　说明如何应用同名端规则的几个例子

对于图 18-6(b) 所示线圈，有

$$\boxed{L = L_1 + L_2 - 2M \quad (\text{反向串联})} \tag{18-13}$$

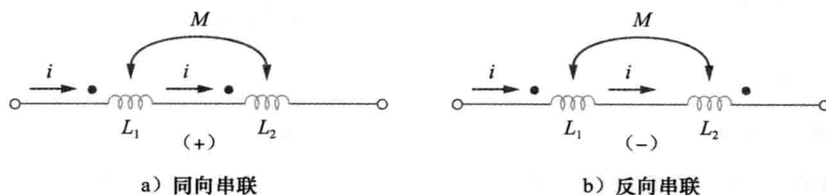


图 18-6　串联线圈的同名端规则，正负号表示互感电压的极性

对于同向串联连接方式，一个线圈的磁场与另一个线圈的磁场相叠加，因此是耦合效果相叠加。对于反向串联连接方式，每一个线圈的磁场相互抑制，因此耦合效果是相减的。

掌握了确定互感电压极性的方法之后，就可以分析含有互感的电路。首先考虑图 18-7 所示电路。对线圈 1 使用 KVL，得：

$$v_1 = i_1 R_1 + L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \tag{18-14a}$$

对线圈 2 应用 KVL，得：

$$v_2 = i_2 R_2 + L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \tag{18-14b}$$

式 (18-14) 的频域表示为

$$\boldsymbol{V}_1 = (R_1 + \mathrm{j}\omega L_1)\boldsymbol{I}_1 + \mathrm{j}\omega M\boldsymbol{I}_2 \tag{18-15a}$$

$$\boldsymbol{V}_2 = \mathrm{j}\omega M\boldsymbol{I}_1 + (R_2 + \mathrm{j}\omega L_2)\boldsymbol{I}_2 \tag{18-15b}$$

另一个例子是在频域中分析图 18-8 所示电路，对于线圈 1，应用 KVL，得：

$$\boldsymbol{V} = (\boldsymbol{Z}_1 + \mathrm{j}\omega L_1)\boldsymbol{I}_1 - \mathrm{j}\omega M\boldsymbol{I}_2 \tag{18-16a}$$

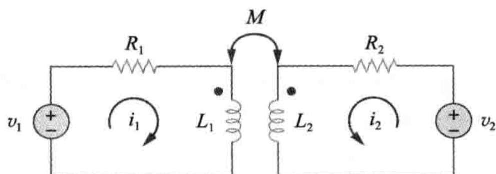


图 18-7　含有耦合线圈电路的时域分析

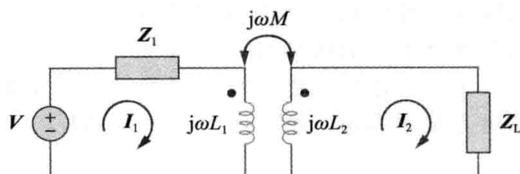


图 18-8　含有耦合线圈电路的频域分析

对于线圈 2，应用 KVL，得：

$$0=-\mathrm{j}\omega M\boldsymbol{I}_1+(Z_L+\mathrm{j}\omega L_2)\boldsymbol{I}_2 \tag{18-16b}$$

求解式（18-15）和式（18-16），即可确定各电流。

本节暂不详细介绍线圈互感量及其同名端的确定问题。与电路中 R、L、C 的计算类似，互感 M 的计算要求将电磁学理论应用于实际线圈的物理属性。本书假定电路中互感和同名端的位置是"给定"的，即与电路元件 R、L、C 同等看待。

例 18-1 计算图 18-9 所示电路中的相量电流 $\boldsymbol{I}_1$ 和 $\boldsymbol{I}_2$。

解： 对于线圈 1，用 KVL，得：

$$-12+(-\mathrm{j}4+\mathrm{j}5)\boldsymbol{I}_1-\mathrm{j}3\boldsymbol{I}_2=0$$

或

$$\mathrm{j}\boldsymbol{I}_1-\mathrm{j}3\boldsymbol{I}_2=12 \tag{18-1-1}$$

对于线圈 2，用 KVL，得：

$$-\mathrm{j}3\boldsymbol{I}_1+(12+\mathrm{j}6)\boldsymbol{I}_2=0$$

或

$$\boldsymbol{I}_1=(12+\mathrm{j}6)\boldsymbol{I}_2/\mathrm{j}3=(2-\mathrm{j}4)\boldsymbol{I}_2 \tag{18-1-2}$$

将此式带入（18-1-1），得，

$$(\mathrm{j}2+4-\mathrm{j}3)\boldsymbol{I}_2=(4-\mathrm{j})\boldsymbol{I}_2=12$$

或

$$\boldsymbol{I}_2=\frac{12}{4-\mathrm{j}}=2.91\angle 14.04^\circ(\mathrm{A}) \tag{18-1-3}$$

由式（18-1-2）和式（18-1-3）得到：

$$\boldsymbol{I}_1=(2-\mathrm{j}4)\boldsymbol{I}_2=(4.472\angle -63.43^\circ)(2.91\angle 14.04^\circ)=13\angle -49.4^\circ(\mathrm{A})$$ ◀

练习 18-1　确定 18-10 电路中的电压 $\boldsymbol{V}_o$。　**答案：** $0.6\angle -90^\circ$ V

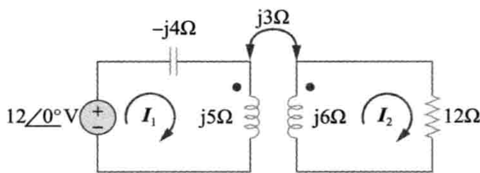


图 18-9　例 18-1、练习 18-6、习题 20 的电路原理图

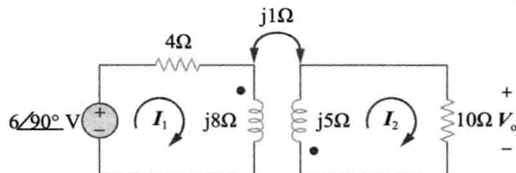


图 18-10　练习 18-1 的电路原理图

例 18-2 计算图 18-11 所示电路的网孔电流。

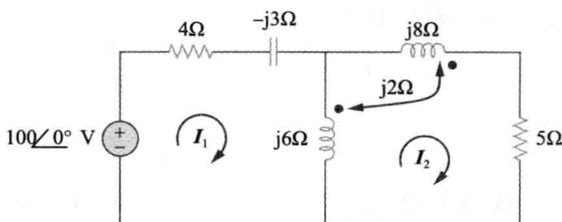


图 18-11　例 18-2 的电路原理图

解： 分析磁耦合电路的关键是要确定互感电压的极性，这需要利用同名端规则。在图 18-11 所示电路中，假定线圈 1 的电抗为 6Ω，线圈 2 的电抗为 8Ω。为了判断由电流 $\boldsymbol{I}_2$ 在线圈 1 中产生的互感电压

的极性，首先观察到 $\boldsymbol{I}_2$ 是从线圈 2 的同名端流出的，由于 KVL 是沿顺时针方向应用的，因此互感电压的极性为负，即为 $-\mathrm{j}2\boldsymbol{I}_2$。

另外，还可以重新画出相关的电路来确定互感电压的极性，如图 18-12a 所示，由此即可方便地确定互感电压为 $\boldsymbol{V}_1=-2\mathrm{j}\boldsymbol{I}_2$，和前面得到的结果一致。

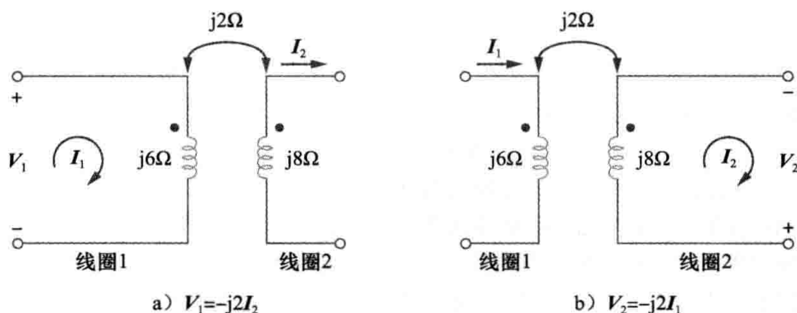


图 18-12　例 18-2 的电路原理图，重新绘制图 18-11 所示电路相关的部分，以便使用同名端规则来求解互感电压

因此，对图 18-11 所示电路的网孔 1，应用 KVL，得：

$$-100+\boldsymbol{I}_1(4-\mathrm{j}3+\mathrm{j}6)-\mathrm{j}6\boldsymbol{I}_2-\mathrm{j}2\boldsymbol{I}_2=0$$

即

$$100=(4+\mathrm{j}3)\boldsymbol{I}_1-\mathrm{j}8\boldsymbol{I}_2 \tag{18-2-1}$$

同理，为了确定由电流 $\boldsymbol{I}_1$ 在线圈 2 上产生的互感电压，需将电路的相关部分重绘，如图 18-12b所示。利用同名端规则，可得互感电压 $\boldsymbol{V}_2=-\mathrm{j}2\boldsymbol{I}_1$。另外，由图 18-11 可见，电流 $\boldsymbol{I}_2$ 所经过的两个线圈是串联的，且该电流是流出两个线圈的同名端的，所以式（18-18）适用于这种情况。因此，对于如图 18-11 所示电路的网孔 2，应用 KVL 可得：

$$0=-\mathrm{j}2\boldsymbol{I}_1-\mathrm{j}6\boldsymbol{I}_1+(\mathrm{j}6+\mathrm{j}8+\mathrm{j}2\times2+5)\boldsymbol{I}_2$$

即

$$0=-\mathrm{j}8\boldsymbol{I}_1+(5+\mathrm{j}18)\boldsymbol{I}_2 \tag{18-2-2}$$

将式（18-2-1）与式（18-2-2）写成矩阵形式，得：

$$\begin{bmatrix}100\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+\mathrm{j}3 & -\mathrm{j}8\\-\mathrm{j}8 & 5+\mathrm{j}18\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_1\\\boldsymbol{I}_2\end{bmatrix}$$

相关的行列式为

$$\Delta=\begin{vmatrix}4+\mathrm{j}3 & -\mathrm{j}8\\-\mathrm{j}8 & 5+\mathrm{j}18\end{vmatrix}=30+\mathrm{j}87$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}100 & -\mathrm{j}8\\0 & 5+\mathrm{j}18\end{vmatrix}=100(5+\mathrm{j}18)$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}4+\mathrm{j}3 & 100\\-\mathrm{j}8 & 0\end{vmatrix}=\mathrm{j}800$$

于是得到网孔电流为

$$\boldsymbol{I}_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{100(5+\mathrm{j}18)}{30+\mathrm{j}87}=\frac{1868.2\angle 74.5^\circ}{92.03\angle 71^\circ}=20.3\angle 3.5^\circ(\mathrm{A})$$

$$\boldsymbol{I}_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{\mathrm{j}800}{30+\mathrm{j}87}=\frac{800\angle 90^\circ}{92.03\angle 71^\circ}=8.693\angle 19^\circ(\mathrm{A})$$

◀

练习 18-2　试确定图 18-13 所示电路电流相量 $\boldsymbol{I}_1$ 和 $\boldsymbol{I}_2$。

答案： $2.15\angle 86.56^\circ$；$3.23\angle 86.56^\circ$ A

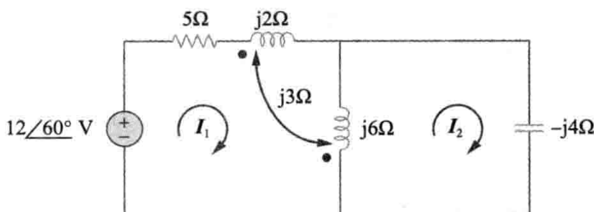


图 18-13　练习 18-2 的电路原理图

18.3　耦合电路中的能量

由本书第 10 章可知，电感器中储存的能量为

$$w = \frac{1}{2}Li^2 \tag{18-17}$$

式中，L 是自感，i 是瞬时电流。为了确定磁耦合线圈中储存的能量，考虑图 18-14 所示电路。电路中储存的瞬时能量的一般表示形式为

$$w = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 \pm M i_1 i_2 \tag{18-18}$$

当两个电流均从线圈的同名端流入或流出时，上式中的交叉项取正号，否则，交叉项取负号。

耦合电感不能大于线圈自感的几何平均，即

$$M \leqslant \sqrt{L_1 L_2} \tag{18-19}$$

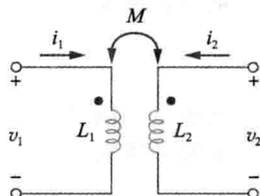


图 18-14　耦合电路储存能量的电路图

互感 M 接近于其上限的程度由耦合系数（coefficient of coupling）k 来决定

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \tag{18-20}$$

即

$$\boxed{M = k\sqrt{L_1 L_2}} \tag{18-21}$$

其中，$0 \leqslant k \leqslant 1$，或者等效地，$0 \leqslant M \leqslant \sqrt{L_1 L_2}$。耦合系数是指由一个线圈产生的总磁通量与另一个线圈交链的部分。例如，在图 18-2 所示电路中，

$$k = \frac{\phi_{12}}{\phi_1} = \frac{\phi_{12}}{\phi_{11} + \phi_{12}} \tag{18-22}$$

而在图 18-3 所示电路中

$$k = \frac{\phi_{21}}{\phi_2} = \frac{\phi_{21}}{\phi_{21} + \phi_{22}} \tag{18-23}$$

如果一个线圈产生的磁通量全部与另一个线圈交链，则 $k=1$，即为 100%耦合，或者称两个线圈是完全耦合的（perfectly coupled）。因此，

耦合系数 k 是两个线圈之间磁耦合程度的一种度量，$0<k<1$。

当 $k<0.5$ 时，称这两个线圈为松耦合的（loosely coupled），当 $k>0.5$ 时，称这两个线圈为紧耦合的（tightly coupled）。

k 的取值取决于两个线圈的接近程度、磁心、方向以及绕组。图 18-15 所示为松耦合绕组和紧耦合绕组的两种情况。射频电路中使用的空心变压器一般是松耦合的，而电力系统中使用的铁心变压器都是紧耦合的。18-4 节讨论的线性变压器都是空心的，而 18-5 节和 18-6 节讨论的理想变压器基本上都是铁心变压器。

例 18-3 对于图 18-16 所示电路，试确定其耦合系数，并计算当 $v=60\cos(4t+30^\circ)$V 时，耦合电感在 $t=1$s 时储存的能量。

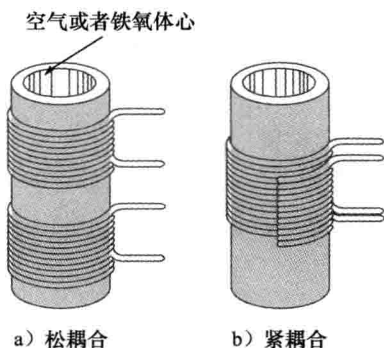


图 18-15 线圈

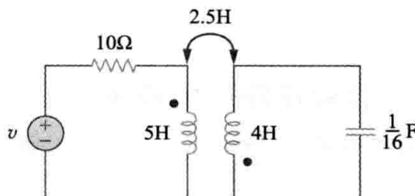


图 18-16 例 18-3 的电路原理图

解：耦合系数为：

$$k=\frac{M}{\sqrt{L_1L_2}}=\frac{2.5}{\sqrt{20}}=0.56$$

表明两个电感是紧耦合的。为了求解所储存的能量，需计算出电流，而要得到电流，就必须确定该电路的频域等效电路：

$$60\cos(4t+30^\circ)\Rightarrow 60\angle 30^\circ,\omega=4(\text{rad/s})$$
$$5\text{H}\Rightarrow j\omega L_1=j20(\Omega)$$
$$2.5\text{H}\Rightarrow j\omega M=j10(\Omega)$$
$$4\text{H}\Rightarrow j\omega L_2=j16(\Omega)$$
$$\frac{1}{16}\text{F}\Rightarrow \frac{1}{j\omega C}=-j4(\Omega)$$

频域的等效电路如图 18-17 所示。下面利用网孔分析法确定电流。对于网孔 1，有

$$(10+j20)\boldsymbol{I}_1+j10\boldsymbol{I}_2=60\angle 30^\circ \tag{18-3-1}$$

对于网孔 2，有

$$j10\boldsymbol{I}_1+(j16-j4)\boldsymbol{I}_2=0$$

即

$$\boldsymbol{I}_1=-1.2\boldsymbol{I}_2 \tag{18-3-2}$$

将上式带入式（18-3-1），得到：

$$\boldsymbol{I}_2(-12-j14)=60\angle 30^\circ \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{I}_2=3.254\angle -199.4^\circ$$

且，

$$\boldsymbol{I}_1=-1.2\boldsymbol{I}_2=3.905\angle -19.4^\circ(\text{A})$$

变换到时域，有

$$i_1(t)=3.905\cos(4t-19.4^\circ),\quad i_2(t)=3.254\cos(4t-199.4^\circ)$$

当 $t=1$s 时，$4t=4$ rad$=229.2^\circ$，于是：

$$i_1=3.905\cos(229.2^\circ-19.4^\circ)=-3.389(\text{A})$$
$$i_2=3.254\cos(229.2^\circ-199.4^\circ)=2.824(\text{A})$$

耦合线圈中存储的总能量为

$$w=\frac{1}{2}L_1i_1^2+\frac{1}{2}L_2i_2^2+Mi_1i_2$$
$$=\frac{1}{2}\times 5\times(-3.389)^2+\frac{1}{2}\times 4\times 2.824^2+2.5\times(-3.389)\times 2.824=20.73(\text{J})$$ ◀

练习 18-3 试确定图 18-18 所示电路的耦合系数，并计算当 $t=1.5\text{s}$ 时，耦合电感中储存的能量。

答案： 0.7071；9.85J

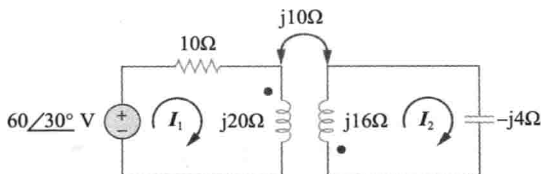


图 18-17 图 18-16 所示电路的频域等效电路

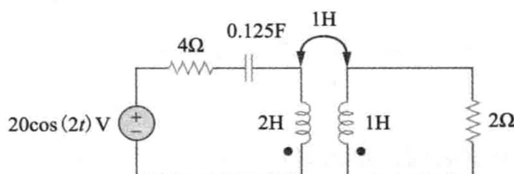


图 18-18 练习 18-3 的电路原理图

18.4 线性变压器

如图 18-19 所示，直接与电压源相连接的线圈称为一次绕组（primary winding），与负载相连接的线圈称为二次绕组（secondary winding）。图中 R_1 与 R_2 用于计算线圈的消耗（功率消耗）。如果线圈缠绕在磁线性材料上，这种变压器称为线性变压器。所谓磁线性材料是指磁导率为常数的材料，例如空气、塑料、电木或木材等。实际上，绝大部分材料都是磁线性的。有时也将线性变压器称为空心变压器，尽管变压器的磁心未必是空气。线性变压器常用于收音机和电视机等装置中，图 18-20 给出了不同类型的变压器。

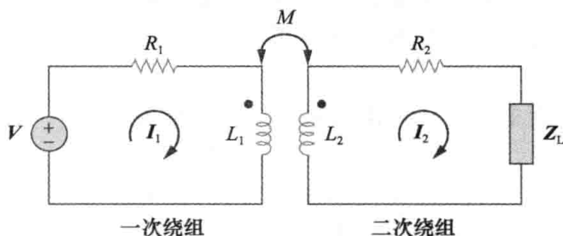
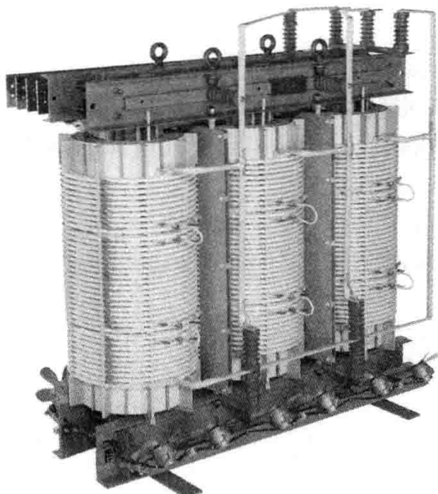
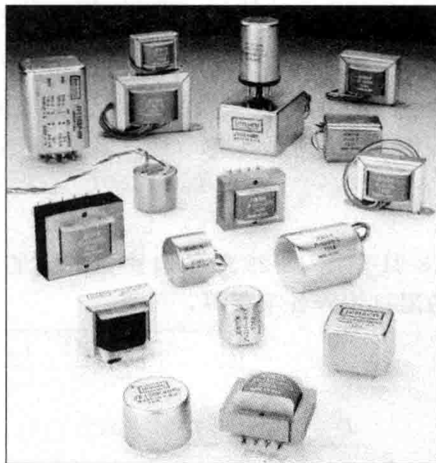


图 18-19 线性变压器



a）无润滑液铜绕组电力变压器
（© The Electric Service Company）



b）音频变压器
（© Jensen Transformers,Inc）

图 18-20 不同类型的变压器

变压器一般是由两个（或多个）磁耦合线圈组成的四端器件，用来提高或降低电压。

下面计算从电源端看进去的变压器的输入阻抗 $\boldsymbol{Z}_{\text{in}}$。因为 $\boldsymbol{Z}_{\text{in}}$ 决定了一次电路的特征。

对图 18-19 所示电路中的两个网孔应用 KVL，得到：

$$\boldsymbol{V}=(R_1+\mathrm{j}\omega L_1)\boldsymbol{I}_1-\mathrm{j}\omega M\boldsymbol{I}_2 \tag{18-24a}$$

$$0=-\mathrm{j}\omega M\boldsymbol{I}_1+(R_2+\mathrm{j}\omega L_2+\boldsymbol{Z}_\mathrm{L})\boldsymbol{I}_2 \tag{18-24b}$$

式（18-24b）中，用 $\boldsymbol{I}_1$ 表示 $\boldsymbol{I}_2$，并代入（18-24a），得到输入阻抗为

$$\boldsymbol{Z}_\mathrm{in}=\boldsymbol{V}/\boldsymbol{I}_1=R_1+\mathrm{j}\omega L_1+\frac{\omega^2M^2}{R_2+\mathrm{j}\omega L_2+Z_\mathrm{L}} \tag{18-25}$$

上式表明，输入阻抗由两项组成。第一项（$R_1+\mathrm{j}\omega L_1$）为一次阻抗，第二项为一次绕组与二次绕组之间耦合产生的阻抗，看起来像是由一次侧映射到二次侧的阻抗。因此，也称为反射阻抗（reflected impedance）$\boldsymbol{Z}_\mathrm{R}$ ㊀，即

$$\boldsymbol{Z}_\mathrm{R}=\frac{\omega^2M^2}{R_2+\mathrm{j}\omega L_2+Z_\mathrm{L}} \tag{18-26}$$

之所以称之为“反射”，是因为变压器将二次回路的阻抗反射到初级回路中去。需要注意电阻的反射阻抗仍为电阻，电容的反射阻抗为电感，而电感的反射阻抗为电容。还应该注意的是，式（18-25）和式（18-26）给出的结果并不会受到变压器同名端位置的影响，因为利用 $-M$ 代替式中的 M 时，其结果相同。

通过对 18-2 节和 18-3 节磁耦合电路分析的过程可知，这类电路的分析肯定不像前面几章介绍的电路分析那样容易。因此，为了便于电路分析，通常将磁耦合电路用一个没有磁耦合的等效电路来代替。下面就利用没有互感的 T 形等效电路或Ⅱ形等效电路来代替图 18-21 所示的线性变压器。

一次绕组和二次绕组的电压一电流关系的矩阵方程为

$$\begin{bmatrix}V_1\\V_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathrm{j}\omega L_1 & \mathrm{j}\omega M\\ \mathrm{j}\omega M & \mathrm{j}\omega L_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1\\I_2\end{bmatrix} \tag{18-27}$$

由矩阵求逆（见附录 A），式（18-27）可重写为

$$\begin{bmatrix}I_1\\I_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{L_2}{\mathrm{j}\omega(L_1L_2-M^2)} & \dfrac{-M}{\mathrm{j}\omega(L_1L_2-M^2)}\\ \dfrac{-M}{\mathrm{j}\omega(L_1L_2-M^2)} & \dfrac{L_1}{\mathrm{j}\omega(L_1L_2-M^2)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1\\V_2\end{bmatrix} \tag{18-28}$$

目标是将式（18-27）和式（18-28）与对应的 T 形网络和Ⅱ形网络的方程匹配。

对于图 18-22 所示 T 形（或 Y 形）网络，由网孔分析法得到终端电压的矩阵方程，有

$$\begin{bmatrix}V_1\\V_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathrm{j}\omega(L_a+L_c) & \mathrm{j}\omega L_c\\ \mathrm{j}\omega L_c & \mathrm{j}\omega(L_b+L_c)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_1\\I_2\end{bmatrix} \tag{18-29}$$

如果图 18-21 与图 18-22 所示电路是等效的，则式（18-27）和式（18-29）必须相同。以上两式的阻抗矩阵各项相等，可得：

$$\boxed{L_a=L_1-M,\quad L_b=L_2-M,\quad L_c=M} \tag{18-30}$$

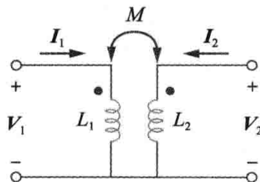


图 18-21　确定线性变压器的等效电路

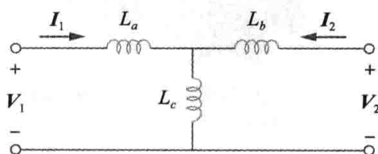


图 18-22　等效 T 形电路

㊀ 有些学者也将其称为耦合阻抗。

对于图 18-23 所示的Ⅱ形（或△形）网络，由节点分析法得到终端电流的矩阵方程为

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{j\omega L_A}+\frac{1}{j\omega L_C} & -\frac{1}{j\omega L_C} \\ -\frac{1}{j\omega L_C} & \frac{1}{j\omega L_B}+\frac{1}{j\omega L_C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \tag{18-31}$$

由式（18-28）和式（18-31）中导纳矩阵各项相等，可得：

$$\boxed{\begin{gathered} L_A = \frac{L_1L_2-M^2}{L_2-M}, \quad L_B = \frac{L_1L_2-M^2}{L_1-M}, \\ L_C = \frac{L_1L_2-M^2}{M} \end{gathered}} \tag{18-32}$$

注意，图 18-22 和图 18-23 中，各电感是没有磁耦合的。同时，改变图 18-21 所示电路中同名端的位置，会使 M 变成 $-M$。在例 18-6 将会说明，M 为负值在物理上是无法实现的，但是其等效电路模型在数学意义上仍然是有效的。

例 18-4 如图 18-24 所示电路，试计算输入阻抗与电流 $\boldsymbol{I}_1$。假定 $\boldsymbol{Z}_1=60-\mathrm{j}100\Omega$，$\boldsymbol{Z}_2=30+\mathrm{j}40\Omega$，且 $\boldsymbol{Z}_\mathrm{L}=80+\mathrm{j}60\Omega$。

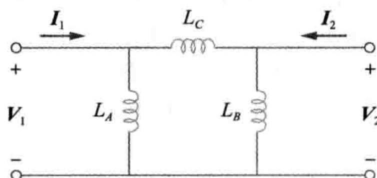


图 18-23　等效△电路

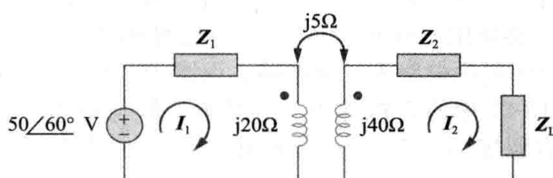


图 18-24　例 18-4 的电路原理图

解： 由式（18-25），得：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Z}_\mathrm{in} &= \boldsymbol{Z}_1 + \mathrm{j}20 + \frac{5^2}{\mathrm{j}40+\boldsymbol{Z}_2+\boldsymbol{Z}_\mathrm{L}} = 60-\mathrm{j}100+\mathrm{j}20+\frac{25}{110+\mathrm{j}140} \\ &= 60-\mathrm{j}80+0.14\angle{-51.84^\circ} = 60.09-\mathrm{j}80.11 = 100.14\angle{-53.1^\circ}(\Omega) \end{aligned}$$

因此，

$$\boldsymbol{I}_1 = \mathbf{V}/\boldsymbol{Z}_\mathrm{in} = \frac{50\angle 60^\circ}{100.14\angle{-53.1^\circ}} = 0.5\angle 113.1^\circ(\mathrm{A})$$ ◀

练习 18-4　试求图 18-25 所示电路的输入阻抗以及电压源的电流。

答案： $8.58\angle 58.05^\circ(\Omega)$；$1.165\angle{-58.05^\circ}(\mathrm{A})$

例 18-5 试确定 18-26a 所示线性变压器的 T 形等效电路。

解： 已知 $L_1=10\mathrm{H}$，$L_2=4\mathrm{H}$，$M=2\mathrm{H}$，因此 T 形网络的参数是：

$$\begin{aligned} L_a &= L_1 - M = 10-2 = 8(\mathrm{H}) \\ L_b &= L_2 - M = 4-2 = 2(\mathrm{H}) \\ L_c &= M = 2(\mathrm{H}) \end{aligned}$$

T 形等效电路如图 18-26b 所示。已经假定一次绕组与二次绕组的电流参考方向和电压极性符合图 18-21 所示情况。否则，需要用 $-M$ 代替 M，参见例 18-6。 ◀

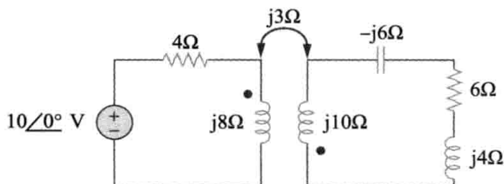


图 18-25　练习 18-4 的电路原理图

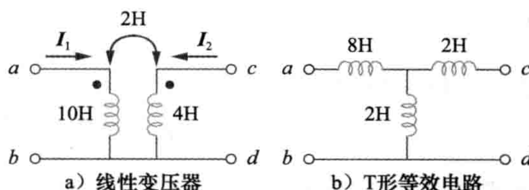


图 18-26　例 18-5 习题 5 的电路图

练习 18-5 试求图 18-26a 所示线性变压器的Ⅱ形等效网络。

答案： $L_A=18\text{H}$； $L_B=4.5\text{H}$； $L_C=18\text{H}$

例 18-6 试利用线性变压器的 T 形等效电路求解图 18-27（与练习 18-1 的电路相同）所示电路中的 $\boldsymbol{I}_1$、$\boldsymbol{I}_2$ 和 $\boldsymbol{V}_o$。

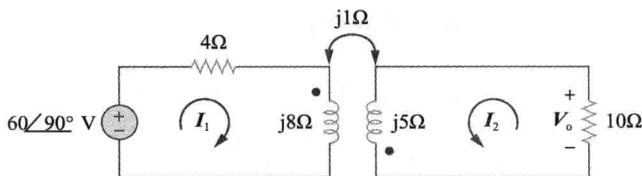


图 18-27 例 18-6 的电路原理图

解： 图 18-27 所示电路与图 18-10 所示电路相同，只是电流 $\boldsymbol{I}_2$ 的参考方向相反，仅需要使磁耦合线圈的电流参考方向符合图 18-21 所示情况就行。

将磁耦合线圈用其等效 T 形电路代替，图 18-27 所示电路的相关部分如图 18-28a 所示。比较图 18-28a 与图 18-21 不难发现有两处不同。首先，由于电流参考方向与电压极性不同，必须用 $-M$ 代替 M，从而使得图 18-28a 所示电路符合图 18-21 所示情况。其次，图 18-21 所示电路为时域电路，而图 18-28a 所示电路为频域电路，不同之处在于因子 jω，即图 18-21 中的 L 应该用 jωL 代替，M 应该用 jωM 代替。由于本题并未给出 ω 的值，因此可以假定 $\omega=1\text{rad/s}$ 或者其他值，这并不影响本题的求解。明确上述两处不同后，可得：

$$L_a=L_1-(-M)=8+1=9(\text{H})$$
$$L_b=L_2-(-M)=5+1=6(\text{H})$$
$$L_c=-M=-1\text{H}$$

因此，耦合线圈的 T 形等效电路如图 18-28b 所示。

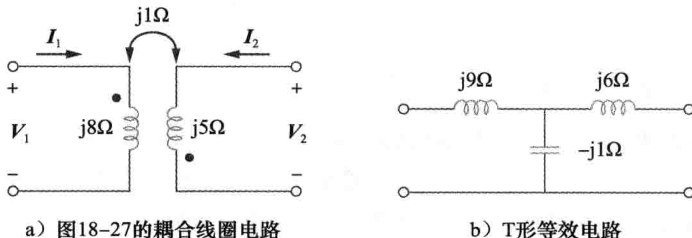


图 18-28 例 18-6 的电路原理图

利用图 18-28b 所示的 T 形等效电路代替图 18-27 中的两个耦合线圈，得到图 18-29 所示的等效电路，就可以用节点分析法或网孔分析法求解该电路。由网孔电流分析法，可得：

$$\text{j}6=\boldsymbol{I}_1(4+\text{j}9-\text{j}1)+\boldsymbol{I}_2(-\text{j}1) \tag{18-6-1}$$

且

$$0=\boldsymbol{I}_1(-\text{j}1)+\boldsymbol{I}_2(10+\text{j}6-\text{j}1) \tag{18-6-2}$$

由式（18-6-2）可得

$$\boldsymbol{I}_1=\frac{(10+\text{j}5)}{\text{j}}\boldsymbol{I}_2=(5-\text{j}10)\boldsymbol{I}_2 \tag{18-6-3}$$

将式（18-6-3）带入式（18-6-1），得到：

$$\text{j}6=(4+\text{j}8)(5-\text{j}10)\boldsymbol{I}_2-\text{j}\boldsymbol{I}_2$$

$$=(100-\mathrm{j})\boldsymbol{I}_2 \cong 100\boldsymbol{I}_2$$

由于 100 比 1 大得多，所以上式中（100－j）的虚部可以忽略，因此，$100-\mathrm{j}\cong 100$。所以，

$$\boldsymbol{I}_2=\frac{\mathrm{j}6}{100}=\mathrm{j}0.06=0.06\underline{/90^\circ}(\mathrm{A})$$

由式（18-6-3）得到：

$$\boldsymbol{I}_1=(5-\mathrm{j}10)\mathrm{j}0.06=0.6+\mathrm{j}0.3(\mathrm{A})$$

且

$$\boldsymbol{V}_o=-10\boldsymbol{I}_2=-\mathrm{j}0.6=0.6\underline{/-90^\circ}(\mathrm{V})$$

上述结果与练习 18-1 的答案一致。当然图 18-10中 $\boldsymbol{I}_2$ 的方向与图 18-27 中 $\boldsymbol{I}_2$ 的方向相反，但这并不影响 $\boldsymbol{V}_o$。只是本题中 I_2 的值与练习 18-1 中 I_2 的值符号相反。利用 T 形等效模型代替磁耦合线圈的优点在于，对于图 18-29 所示电路，无需再考虑耦合线圈中的同名端的问题。◀

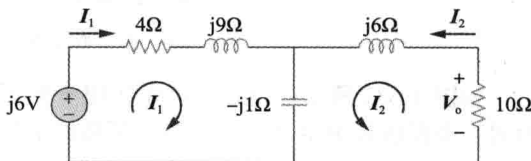


图 18-29 例 18-6 的电路原理图

练习 18-6 试利用 T 形等效电路取代磁耦合线圈，求解例 18-1（参见图 18-9）。

答案：$13\underline{/-49.4^\circ}$ A；$2.91\underline{/14.04^\circ}$ A

18.5 理想变压器

如果变压器具有以下属性时，称之为理想变压器：

1）线圈的电抗非常大（L_1，L_2，$M\to\infty$）；

2）耦合系数等于单位 1（即 $k=1$）

3）一次绕组和二次绕组是无损耗的（即 $R_1=R_2=0$）

理想变压器是一次绕组和二次绕组具有无穷大自感的、完全耦合的、无损的变压器。

理想变压器是一种完全耦合（即 $k=1$）的变压器。它由大量缠绕在高磁导率的公共磁心上的绕组构成的两个（或多个）线圈组成，由于磁心的磁导率高，所以磁通量与两个线圈的所有绕组交链，从而得到完全耦合的变压器。

为了说明理想变压器是两个完全耦合的电感值接近无穷大的耦合电感的极限情况，下面考虑图 18-14 所示电路。在频域中可得：

$$\boldsymbol{V}_1=\mathrm{j}\omega L_1\boldsymbol{I}_1+\mathrm{j}\omega M\boldsymbol{I}_2 \tag{18-33a}$$

$$\boldsymbol{V}_2=\mathrm{j}\omega M\boldsymbol{I}_1+\mathrm{j}\omega L_2\boldsymbol{I}_2 \tag{18-33b}$$

由式（18-33a）可得，$\boldsymbol{I}_1=(\boldsymbol{V}_1-\mathrm{j}\omega M\boldsymbol{I}_2)/\mathrm{j}\omega L_1$，将其代入式（18-33b），得到：

$$\boldsymbol{V}_2=\mathrm{j}\omega L_2\boldsymbol{I}_2+\frac{M\boldsymbol{V}_1}{L_1}-\frac{\mathrm{j}\omega M^2\boldsymbol{I}_2}{L_1} \tag{18-34}$$

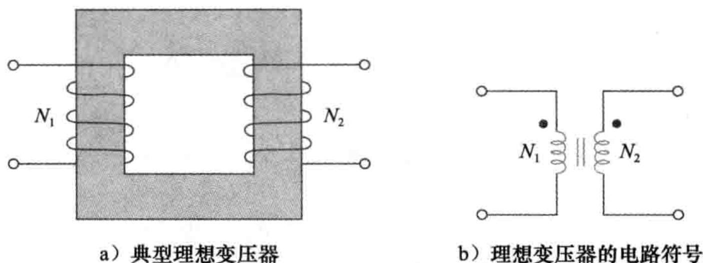
在完全耦合（$k=1$）条件下，$M=\sqrt{L_1L_2}$，所以

$$\boldsymbol{V}_2=\mathrm{j}\omega L_2\boldsymbol{I}_2+\frac{\sqrt{L_1L_2}\boldsymbol{V}_1}{L_1}-\frac{\mathrm{j}\omega L_1L_2\boldsymbol{I}_2}{L_1}=\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}\boldsymbol{V}_1=n\boldsymbol{V}_1 \tag{18-35}$$

其中，$n=\sqrt{L_2/L_1}$，称为完全耦合变压器的匝数比（turns ratio）。当 L_1、L_2、$M\to\infty$，且保持 n 不变时，耦合线圈就变成理想变压器了。理想变压器忽略了一次绕组由于电阻变热引起的损耗，并假定一次绕组与二次绕组完全耦合（即没有电磁损耗）。

铁心变压器是理想变压器的最佳近似，通常用于电力系统或电子设备中。

图 18-30a 所示为一个典型的理想变压器，其电路符号如图 18-30b 所示，图中两线圈之间的竖线表示铁心，用来区别线性变压器中的空气心。一次绕组为 N_1 匝，二次绕组为 N_2 匝。



a）典型理想变压器　　b）理想变压器的电路符号

图 18-30　典型理想变压器及其电路符号

如图 18-31 所示，当正弦电压作用于变压器的一次绕组时，两个绕组中通过的磁通量 ϕ 相同，根据法拉第定理，一次绕组两端的电压为

$$v_1 = N_1 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} \tag{18-36}$$

而二次绕组两端的电压为

$$v_2 = N_2 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} \tag{18-37}$$

图 18-31　理想变压器中一次和二次物理量的大小

用式（18-36）去除式（18-37），得到：

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{N_2}{N_1} = n \tag{18-38}$$

其中，n 仍然是匝数比。利用相量电压 $\mathbf{V}_1$ 和 $\mathbf{V}_2$，而不是瞬时值 v_1 和 v_2 表示时，式（18-38）可以改写为

$$\boxed{\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = \frac{N_2}{N_1} = n} \tag{18-39}$$

按照功率守恒定理，由于理想变压器没有任何损耗，因此提供给一次绕组的能量一定等于二次绕组吸收的能量，即有

$$v_1 i_1 = v_2 i_2 \tag{18-40}$$

采用相量表示后，由式（18-39）和式（18-40）可得：

$$\frac{\boldsymbol{I}_1}{\boldsymbol{I}_2} = \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = n \tag{18-41}$$

即一次电流、二次电流和匝数比之间的关系同电压和匝数比之间的关系是相反的，因此：

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{I}_2}{\boldsymbol{I}_1} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{n}} \tag{18-42}$$

当 $n=1$ 时，一般称该变压器为隔离变压器（isolation transformer），18.8.3 节将说明其原因。当 $n>1$ 时，称为升压变压器（step-up transformer），因为电压从初级变到次级是升高的（即 $V_2>V_1$）；当 $n<1$ 时，称为降压变压器（step-down transformer），因为电压从初级变到次级是降低的（即 $V_2<V_1$）。因此，

降压变压器是指二次电压低于一次电压的变压器。

升压变压器是指二次电压大于一次电压的变压器。

变压器的额定值通常用 V_1/V_2 规定，额定值为 2400/120V，是指其一次电压为 2400V，二次电压为 120V（即降压变压器）。需要记住的是，额定电压值均指有效值。

电力公司通常产生适当大小的电压，并利用升压变压器将电压升高，从而在传输线上实现以极高的电压和很低的电流输送电力，来节省大量的相关费用。到了用户住宅附近，再利用降压变压器使电压降至 120V，18.8.3 节将详细讨论这一问题。

现在讨论如何确定图 18-31 所示变压器的正确电压极性和电流方向。如果图中 $\mathbf{V}_1$ 或 $\mathbf{V}_2$ 的极性改变，或者 $\mathbf{I}_1$ 或 $\mathbf{I}_2$ 的方向改变，都应该将式（18-38）到式（18-42）中 n 用 $-n$ 代替。于是，得到如下两个简单规则：

1）如果同名端处的 $\mathbf{V}_1$ 和 $\mathbf{V}_2$ 均为正，或者均为负，则在式（18-39）中采用 $+n$，否则，用 $+n$。

2）如果 $\mathbf{I}_1$ 与 $\mathbf{I}_2$ 均流入或均流出同名端，则在式（18-42）中采用 $-n$；否则，就采用 $+n$。

如图 18-32 所示的四个电路可以很好地说明上述规则。

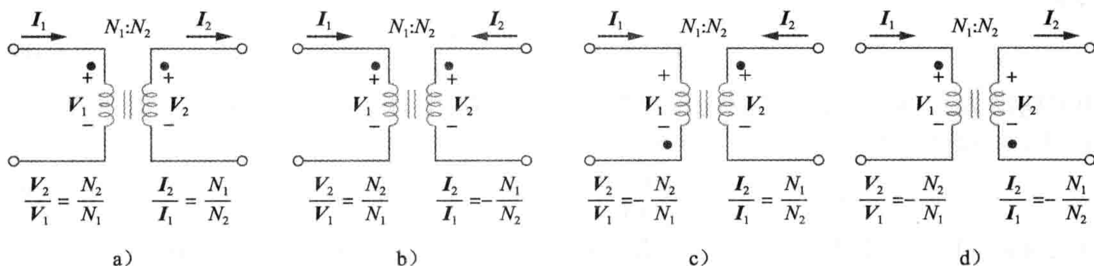


图 18-32　说明理想变压器电压极性与电流方向的四种典型电路

利用式（18-39）和式（18-42），总可以用 $\mathbf{V}_2$ 表示 $\mathbf{V}_1$，用 $\mathbf{I}_2$ 表示 $\mathbf{I}_1$，反之亦然，所以有：

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2/n \quad \text{或} \quad \mathbf{V}_2 = n\mathbf{V}_1 \tag{18-43}$$

$$\mathbf{I}_1 = n\mathbf{I}_2 \quad \text{或} \quad \mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_1/n \tag{18-44}$$

一次绕组的复功率为：

$$\boxed{\mathbf{S}_1 = \mathbf{V}_1\mathbf{I}_1^* = (\mathbf{V}_2/n)(n\mathbf{I}_2)^* = \mathbf{V}_2\mathbf{I}_2^* = \mathbf{S}_2} \tag{18-45}$$

上式表示，提供给一次绕组的复功率无损耗地都传送到了二次绕组，即变压器不吸收功率，这正是理想变压器假设的无损耗情况。由式（18-43）和式（18-44）可以求出图 18-31 所示电路从电源端看进去的输入阻抗，即

$$\mathbf{Z}_{\text{in}} = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} = \frac{1}{n^2}\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_2} \tag{18-46}$$

由图 18-31 显然可见，$\mathbf{V}_2/\mathbf{I}_2 = \mathbf{Z}_{\text{L}}$，因此，

$$\boxed{\mathbf{Z}_{\text{in}} = \frac{\mathbf{Z}_{\text{L}}}{n^2}} \tag{18-47}$$

输入阻抗也称为*反射阻抗*，因为它看起来像是负载阻抗反射到一次侧的阻抗⊖。变压器具有将给定阻抗变换为另一阻抗的能力，为实现最大功率传输提供了一种阻抗匹配方法。阻抗匹配的思想在实际应用中非常有用，将在 18.8.2 节中详细讨论。

在分析包含理想变压器的电路时，通常是将阻抗和电源从变压器的一侧映射到另一侧，目的是消除电路中的变压器。例如，在图 18-33 所示电路中，假定要将变压器的二次回路映射到一次回路，需求出端口 a-b 右

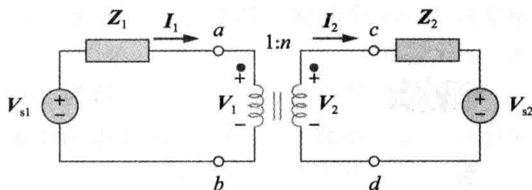


图 18-33　待求等效电路的理想变压器

⊖ 注意，理想变压器将阻抗映射为匝数比的平方倍。

侧电路的戴维南等效电路，其中 V_{Th} 为端口 a-b 处的开路电压，如图 18-34a 所示。

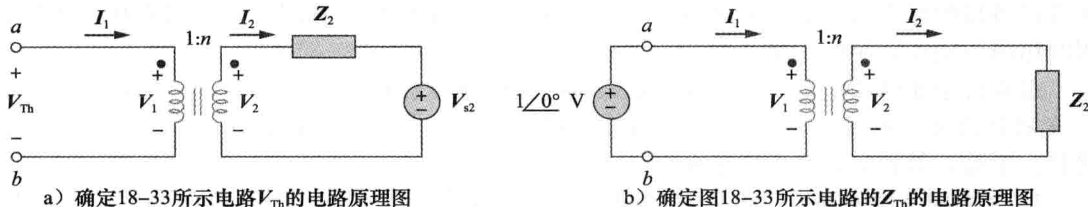


图 18-34　确定 V_{Th} 和 Z_{Th}

由于端口 a-b 是开路的，因此 $\mathbf{I}_1=\mathbf{I}_2=0$，从而 $\mathbf{V}_2=\mathbf{V}_{s2}$。因此，由式（18-43）可以得到

$$\mathbf{V}_{Th}=\mathbf{V}_1=\frac{\mathbf{V}_2}{n}=\frac{\mathbf{V}_{s2}}{n} \tag{18-48}$$

为了确定 $\mathbf{Z}_{Th}$，将二次绕组的电压源短路，并在端口 $a-b$ 处加一个单位电压源，如图 18-34b 所示。由式（18-47），可得，$I_1=n\mathbf{I}_2$，$\mathbf{V}_1=\mathbf{V}_2/n$。因此，

$$\mathbf{Z}_{Th}=\mathbf{V}_1/\mathbf{I}_1=\frac{\mathbf{V}_2/n}{nI_2}=\frac{\mathbf{Z}_2}{n^2},\quad 其中\quad \mathbf{V}_2=\mathbf{Z}_2\mathbf{I}_2 \tag{18-49}$$

这是由式（18-47）预期的结果。一旦求出 $\mathbf{V}_{Th}$ 和 $\mathbf{Z}_{Th}$，即可用该戴维南等效电路代替图 18-33 所示电路端口 $a-b$ 右侧的部分，得到图 18-35 所示电路。也可以将图 18-33 所示电路的一次侧映射到二次侧，得到如 18-36 所示的等效电路。

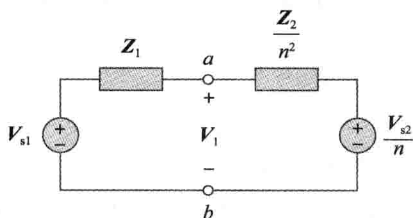


图 18-35　将二次回路映射到一次回路后的图 18-33 的等效电路

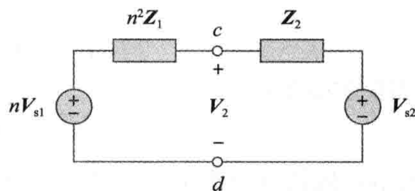


图 18-36　将一次回路映射到二次回路后的图 18-33 的等效电路

将一次回路映射到二次回路从而消去变压器的一般规则是，一次阻抗乘以 n^2，一次电压乘以 n，且一次电流除以 n。

根据式（18-45），不论是按一次回路计算还是按二次回路计算，功率是保持不变的。但是，需要注意的是，这种映射方法仅适用于一次绕组和二次绕组之间没有外部连接的情况。当一次绕组和二次绕组之间有外部连接时，通常采用网孔分析法与节点分析法来求解电路。一次绕组和二次绕组之间有外部连接的电路示例如图 18-39 和图 18-40 所示。另外，如果图 18-33 中的同名端位置发生改变，则为了遵循如图 18-32 所示的同名端规则，需要用 $-n$ 代替 n。

例 18-7　某理想变压器的额定值为 2400/120V，9.6kV·A，且二次绕组的匝数为 50。试计算：(a) 匝数比；(b) 一次绕组的匝数；(c) 一次绕组和二次绕组的额定电流值。

解：(a) 由于 $V_1=2400\text{V}>V_2=120\text{V}$。，所以这是一个降压变压器

$$n=\frac{V_2}{V_1}=\frac{120}{2400}=0.05$$

(b) $n=\dfrac{N_2}{N_1}\quad\Rightarrow\quad 0.05=\dfrac{50}{N_1}$

即

$$N_1 = \frac{50}{0.05} = 1000(\text{匝})$$

(c) $S = V_1 I_1 = V_2 I_2 = 9.6\text{kV} \cdot \text{A}$

因此

$$I_1 = \frac{9600}{V_1} = \frac{9600}{2400} = 4(\text{A})$$

$$I_2 = \frac{9600}{V_2} = \frac{9600}{120} = 80(\text{A})$$

或

$$I_2 = \frac{I_1}{n} = \frac{4}{0.05} = 80(\text{A})$$ ◀

练习 18-7 某额定值为 3300/110V 的理想变压器的一次电流为 3A，试计算：(a) 匝数比；(b) kV・A 额定值；(c) 二次电流。

答案：(a) 1/30；(b) 9.9kV・A；(c) 90A

例 18-8 对于图 18-37 所示的理想变压器电路，试求 (a) 电源电流 I_1；(b) 输出电压 V_o；(c) 电源提供的复功率。

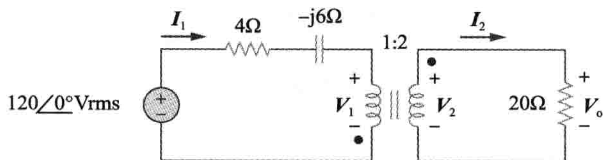


图 18-37 例 18-8 的电路原理图

解：(a) 20Ω 阻抗可以反射到一次回路，得到：

$$\boldsymbol{Z}_R = \frac{20}{n^2} = \frac{20}{4} = 5(\Omega)$$

于是，

$$\boldsymbol{Z}_{in} = 4 - j6 + \boldsymbol{Z}_R = 9 - j6 = 10.82 \angle{-33.69^\circ}(\Omega)$$

$$\boldsymbol{I}_1 = \frac{120\angle{0^\circ}}{\boldsymbol{Z}_{in}} = \frac{120\angle{0^\circ}}{10.82\angle{-33.69^\circ}} = 11.09\angle{33.69^\circ}(\text{A})$$

(b) 由于 $\boldsymbol{I}_1$ 和 $\boldsymbol{I}_2$ 均从同名端流出，因此：

$$\boldsymbol{I}_2 = -\frac{1}{n}\boldsymbol{I}_1 = -5.545\angle{33.69^\circ}(\text{A})$$

$$\boldsymbol{V}_o = 20\boldsymbol{I}_2 = 110.9\angle{213.69^\circ}(\text{V})$$

(c) 电源提供的复功率为：

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{V}_s\boldsymbol{I}_1^* = (120\angle{0^\circ})(11.09\angle{-33.69^\circ}) = 1330.8\angle{-33.69^\circ}(\text{V}\cdot\text{A})$$ ◀

练习 18-8 在图 18-38 所示的理想变压器电路中，试求 V_o 与电源提供的复功率。

答案：$178.9\angle{116.56^\circ}$ V；$2981.5\angle{-26.56^\circ}$ V・A

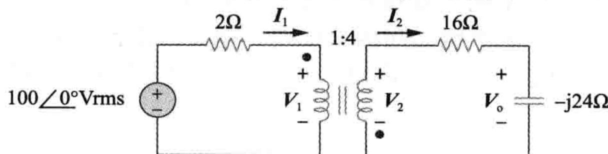


图 18-38 练习 18-8 的电路原理图

例 18-9 试计算图 18-39 所示的理想变压器电路提供给 10Ω 电阻器的功率。

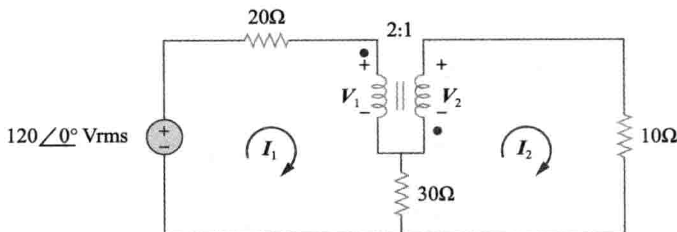


图 18-39　例 18-9 的电路原理图

解：由于本题电路中一次回路和二次回路之间通过一个 30Ω 的电阻直接相连，因此既不能将一次回路映射到二次回路，也不能将二次回路映射到一次回路。需应用网孔分析法求解，对于网孔 1，有

$$-120+(20+30)\mathbf{I}_1-30\mathbf{I}_2+\mathbf{V}_1=0$$

即：

$$50\mathbf{I}_1-30\mathbf{I}_2+\mathbf{V}_1=120 \tag{18-9-1}$$

对于网孔 2，有

$$-\mathbf{V}_2+(10+30)\mathbf{I}_2-30\mathbf{I}_1=0$$

即：

$$-30\mathbf{I}_1+40\mathbf{I}_2-\mathbf{V}_2=0 \tag{18-9-2}$$

在变压器两端，有

$$\mathbf{V}_2=-\frac{1}{2}\mathbf{V}_1 \tag{18-9-3}$$

$$\mathbf{I}_2=-2\mathbf{I}_1 \tag{18-9-4}$$

（注意，$n=1/2$）得到包含四个未知数的四个方程。但本题需要求的是 $\mathbf{I}_2$，因此根据式（18-9-1）和式（18-9-2），利用 $\mathbf{V}_2$ 和 $\mathbf{I}_2$ 代替 $\mathbf{V}_1$ 和 $\mathbf{I}_1$，式（18-9-1）变成：

$$-55\mathbf{I}_2-2\mathbf{V}_2=120 \tag{18-9-5}$$

式（18-9-2）成为：

$$15\mathbf{I}_2+40\mathbf{I}_2-\mathbf{V}_2=0 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{V}_2=55\mathbf{I}_2 \tag{18-9-6}$$

将式（18-9-6）代入（18-9-5），得到：

$$-165\mathbf{I}_2=120 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{I}_2=-\frac{120}{165}=-0.7272(\text{A})$$

10Ω 电阻吸收的功率为

$$P=(-0.7272)^2\times(10)=5.3(\text{W})$$ ◀

练习 18-9　试求图 18-40 所示电路中的 $\mathbf{V}_o$。

答案：24V

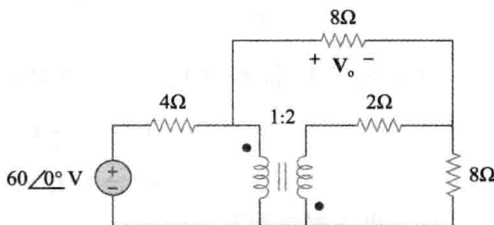


图 18-40　练习 18-9 的电路原理图

18.6　理想自耦变压器

与传统的两线圈变压器不同，自耦变压器（autotransformer）只有一个中间带抽头的连续绕组，抽头相当于初级和次级之间的连接点。抽头的位置通常是可调整的，用来提供所需要的匝数比，来实现电压升高或降低。因此，自耦变压器可以为其负载提供可变的电压。

自耦变压器是指一次绕组和二次绕组为同一个绕组的变压器。

图 18-41 所示为一个典型的自耦变压器。如图 18-42 所示，自耦变压器既可以工作在降压模式，也可以工作在升压模式。自耦变压器是功率变压器的一种，与两绕组的变压器相比，它的主要优点在于能够传递较大的视在功率。例 18-10 将说明这个问题。它的另一个优点是比等效的双绕组变压器的体积小、重量轻。但是由于一次绕组和二次绕组是同一个绕组，失去了电气隔离（electrical isolation）（没有直接的电气连接）的功能（18.8.1 节将介绍电气隔离属性在传统的变压器中的实际应用）。一次绕组和二次绕组之间缺乏电气隔离是自耦变压器的主要缺点。

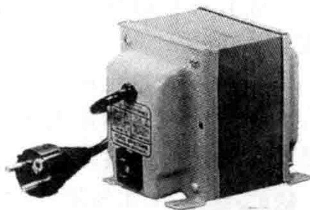


图 18-41 一个典型的自耦变压器（© Todd Systems, Inc., Yonkers, NY）

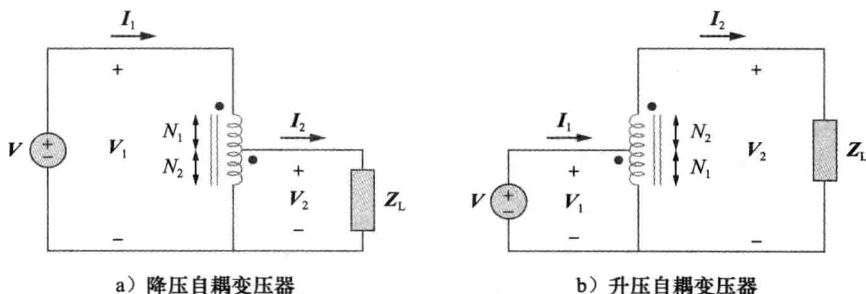


图 18-42 两种模式自耦变压器

之前推导出的一些理想变压器的公式同样适用于自耦变压器。对于图 18-42a 所示的降压自耦变压器，由式（18-39）可得：

$$\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{V}_2}=\frac{N_1+N_2}{N_2}=1+\frac{N_1}{N_2} \tag{18-50}$$

对于理想自耦变压器，同样没有功率损耗，所以一次绕组和二次绕组中的复功率是相同的：

$$\mathbf{S}_1=\mathbf{V}_1\mathbf{I}_1^*=\mathbf{S}_2=\mathbf{V}_2\mathbf{I}_2^* \tag{18-51}$$

式（18-51）还可以表示为

$$\mathbf{V}_1\mathbf{I}_1=\mathbf{V}_2\mathbf{I}_2$$

即：

$$\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1}=\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{I}_2} \tag{18-52}$$

因此，一次电流和二次电流关系为

$$\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{I}_2}=\frac{N_2}{N_1+N_2} \tag{18-53}$$

对于图 18-42b 所示的升压自耦变压器，有

$$\frac{\mathbf{V}_1}{N_1}=\frac{\mathbf{V}_2}{N_1+N_2}$$

或

$$\boxed{\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{V}_2}=\frac{N_1}{N_1+N_2}} \tag{18-54}$$

式（18-51）给出的复功率同样适用于升压自耦变压器，所以式（18-52）对于升压自耦变压器也是成立的。因此，一次电流和二次电流关系为

$$\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{I}_2}=\frac{N_1+N_2}{N_1}=1+\frac{N_2}{N_1} \tag{18-55}$$

传统变压器和自耦变压器之间的主要区别在于，自耦变压器的一次和二次之间不仅存在磁耦合，而且存在电导耦合。在不需要电气隔离的应用场合，可以使用自耦变压器代替传统变压器。

匝数比越大，自耦变压器的经济性越差。因此，匝数比大于 2 的自耦变压器使用的很少。大型自耦变压器常用于高压电力系统的互联，小型自耦变压器常用于电动机的起动和声音或音频信号的传送。

例 18-10 试比较图 18-43a 所示两绕组变压器与图18-43b 所示自耦合变压器的额定功率值。

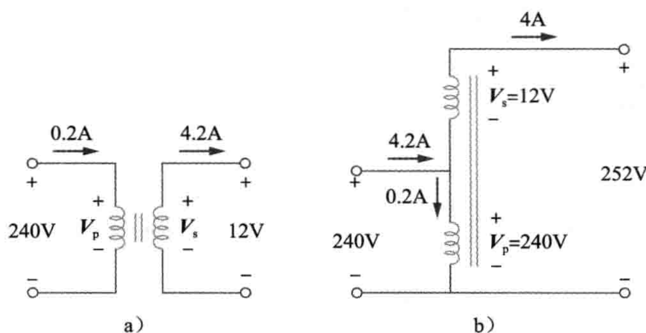


图 18-43 例 18-10 的电路原理图

解： 虽然自耦变压器的一次绕组和二次绕组是用一个连续绕组，但在图 18-43b 中，为了清楚起见，将它们分开画。注意，图 18-43b 所示自耦变压器中的电流和电压与图 18-43a 所示两绕组变压器的电流和电压是相同的，这是比较两个变压器额定功率的基础。

对于两绕组变压器，其额定功率为

$$S_1 = 0.2 \times 240 = 48(\text{V} \cdot \text{A})$$

或

$$S_2 = 4 \times 12 = 48(\text{V} \cdot \text{A})$$

对于自耦合变压器，其额定功率为

$$S_1 = 4.2 \times 240 = 1008(\text{V} \cdot \text{A})$$

或

$$S_2 = 4 \times 252 = 1008(\text{V} \cdot \text{A})$$

显然，自耦合变压器的额定功率是两绕组变压器的 21 倍。 ◀

练习 18-10 参见图 18-43 所示电路，如果两绕组变压器是一个 60V · A，120V/10V 的变压器，试问自耦合变压器的额定功率是多少？ **答案：** 780V · A

例 18-11 如图 18-44 所示的自耦合变压器电路，试计算：

(a) 当 $\mathbf{Z}_L = 8 + j6\Omega$ 时的 $\mathbf{I}_1$、$\mathbf{I}_2$ 和 $\mathbf{I}_o$；

(b) 提供给负载的复功率。

解： (a) 这是一个 $N_1 = 80$，$N_2 = 120$ 的升压自耦变压器，由于 $\mathbf{V}_1 = 120 \angle 30°$ V，因此由式 (18-54) 可以求出 $\mathbf{V}_2$。

$$\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{V}_2} = \frac{N_1}{N_1 + N_2} = \frac{80}{200}$$

即

$$\mathbf{V}_2 = \frac{200}{80}\mathbf{V}_1 = \frac{200}{80}(120 \angle 30°) = 300 \angle 30°(\text{V})$$

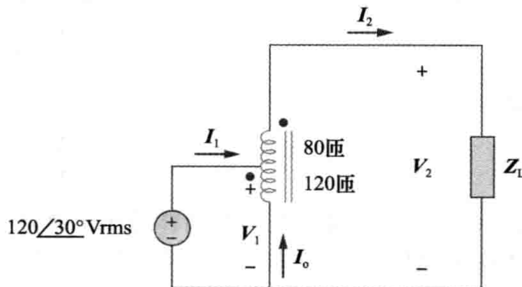


图 18-44 例 18-11 的电路原理图

$$\boldsymbol{I}_2=\boldsymbol{V}_2/\boldsymbol{Z}_L=\frac{300\,\angle 30^\circ}{8+\mathrm{j}6}=\frac{300\,\angle 30^\circ}{10\,\angle 36.87^\circ}=30\,\angle -6.87^\circ\,(\mathrm{A})$$

但是，

$$\boldsymbol{I}_1/\boldsymbol{I}_2=\frac{N_1+N_2}{N_1}=\frac{200}{80}$$

即

$$\boldsymbol{I}_1=\frac{200}{80}\boldsymbol{I}_2=\frac{200}{80}(30\,\angle -6.87^\circ)=75\,\angle -6.87^\circ\,(\mathrm{V})$$

在抽头处应用 KCL，得到

$$\boldsymbol{I}_1+\boldsymbol{I}_o=\boldsymbol{I}_2$$

即：

$$\boldsymbol{I}_o=\boldsymbol{I}_2-\boldsymbol{I}_1=30\,\angle -6.87^\circ-75\,\angle -6.87^\circ=45\,\angle 173.13^\circ\,(\mathrm{A})$$

(b) 提供给负载的复功率为：

$$\boldsymbol{S}_2=\boldsymbol{V}_2\boldsymbol{I}_2^*=|\boldsymbol{I}_2|^2\boldsymbol{Z}_L=(30)^2(10\,\angle 36.87^\circ)$$
$$=9\,\angle 36.87^\circ\,(\mathrm{kV\cdot A})$$

练习 18-11　图 18-45 所示自耦合变压器电路中，试求电流 $\boldsymbol{I}_1$，$\boldsymbol{I}_2$ 和 $\boldsymbol{I}_o$。假定 $\boldsymbol{V}_1=1250\mathrm{V}$，$\boldsymbol{V}_2=800\mathrm{V}$。

答案： 12.8A；　20A；　7.2A

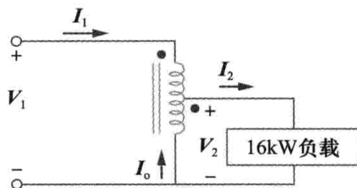


图 18-45　练习 18-11 的电路原理图

18.7 计算机辅助分析

除必须遵循同名端规则外，利用 PSpice 软件分析磁耦合电路与分析电感电路的方法类似。在画 PSpice 电路原理图中，电感 L 放置在水平位置，同名端总是在电感左边端点，即引脚 1 处。如果将电感元件垂直旋转时，它绕引脚 1 逆时针转 90°，则同名端（即引脚 1）将位于下方。磁耦合电感在电路中的放置方式，要与耦合线圈的同名端相符，并设定各自的自感值，单位是亨利（H），可以用耦合符号 KBREAK 来定义耦合属性，每一对耦合电感用下面步骤定义：

1）选择 Place/Part 菜单并输入 K_LINEAR。

2）双击，将 K_LINEAR 符号放置在电路原理图中，如图 18-46 所示（注意，K_LINEAR 并不是一个实际的元件，因此没有引脚）

3）双击耦合框 COUPLING，设置耦合系数值 k。

4）双击耦合符号框 K，输入耦合电感器的部件名 Li，$i=1$，2，…，6。例如，当 L20 和 L23 为耦合电感器时，则设置 L1＝L20，L2＝L23。电路图中 L1 和另一个 Li（必须至少有一个 Li）必须被赋值，其他 Li 可以是空白的。

在步骤 4 中，可以最多定义 6 个耦合电感，其耦合相同。

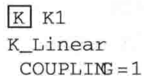


图 18-46　定义耦合系数的 K_Linear

对于空心变压器，部件名称为 XFRM-LINEAR，选择 Place/Part 菜单，并输入部件名称即可将其插入电路，或者从库文件 analog.slb 中选择部件名称插入电路。如图 18-47(a) 所示，线性变压器的主要属性包括：耦合系数 k，电感值 L1 和 L2（单位是 H）。如果定义互感 M，则必须利用 M 和 L1、L2 的值计算 k 值。注意，$0<k<1$。

对于理想变压器，部件名称为 XFRM_NONLINEAR，可以在 ANALOG 库中找到，选择并单击 Place/Part，输入其部件名称就可选中一个理想变压器。它的属性包括耦合系数，以及 L1 和 L2 的匝数，如图 18-47b 所示。互耦系数的值应该在 0～1 之间。虽然 18-5 节中提到理想变换的耦合系数 $k=1$，PSpice 允许 k 值在 0～1 之间变化。

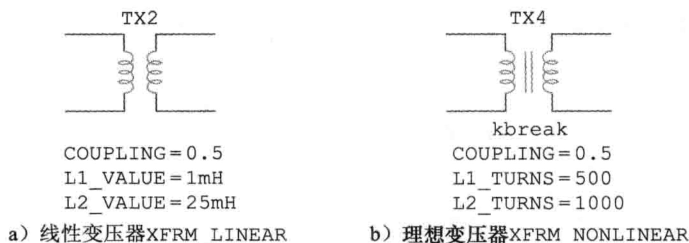


图 18-47 两种变压器

PSpice 软件还提供另外一些变压器结构的运算功能，本书暂不讨论。

例 18-12 试利用 PSpice 求解图 18-48 所示电路中的 i_1、i_2 和 i_3。

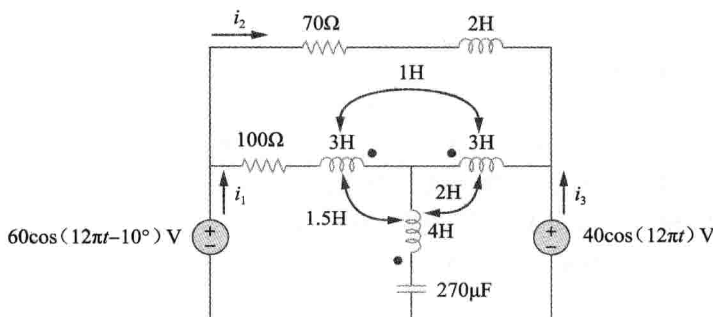


图 18-48 例 18-12 的电路原理图

解：三个耦合电感的耦合系数为：

$$k_{12}=\frac{M_{12}}{\sqrt{L_1L_2}}=\frac{1}{\sqrt{3\times3}}=0.3333$$

$$k_{13}=\frac{M_{13}}{\sqrt{L_1L_3}}=\frac{1.5}{\sqrt{3\times4}}=0.433$$

$$k_{23}=\frac{M_{23}}{\sqrt{L_2L_3}}=\frac{2}{\sqrt{3\times4}}=0.5774$$

其工作频率 f，可由以图 18-48 得到

$$\omega=12\pi=2\pi f\quad\Rightarrow\quad f=6\text{Hz}$$

图 18-49 所示为运行软件的电路图。插入三个 IPRINT 伪元件，用来确定所要解的电流 i_1、i_2 和 i_3。注意同名端规则在该图中是如何体现的。对于 L2 而言，同名端位于引脚 1（电感器左端），因此其位置不需要旋转；对于 L1 而言，为了使同名端位于电感器的右端，该电感器必须旋转 180°；对于 L3，电感器必须旋转 90°。这样同名端才能位于下端。注意，2H 的电感器（L4）是无耦合电感。

画出图 18-49 的电路图，需要另存为 exam1812.dsn。首先选择 PSpice/New Simulation Profile，在弹出的 New Simulation 对话框中，输入文件名 exam1812，并单击 Create 按钮。在弹出的 Simulation Settings 对话框中，选择 Analysis Type 下的 AC Sweep/Noise 项，选择 AC Sweep Type 下的 Linear 选项。设置 Start Freq=6，Final Freq=6，Total Points=1。

选择 PSpice/Run 进行电路仿真，选择 PSpice/View Output file，得到如下输出文件：

```
FREQ          IM(V_PRINT3)    IP(V_PRINT3)
6.000E+00     2.335E-01       -6.962E+01
FREQ          IM(V_PRINT1)    IP(V_PRINT1)
6.000E+00     2.114E-01       -7.575E+01
FREQ          IM(V_PRINT2)    IP(V_PRINT2)
6.000E+00     1.143E-01       -5.058E+01
```

得到：

$$\boldsymbol{I}_1 = 0.2335 \angle -69.62^\circ$$
$$\boldsymbol{I}_2 = 0.2114 \angle -75.75^\circ$$
$$\boldsymbol{I}_3 = 0.1143 \angle -50.58^\circ$$

因此：

$$i_1 = 0.2335\cos(12\pi t - 69.62^\circ)(\mathrm{A})$$
$$i_2 = 0.2114\cos(12\pi t - 75.75^\circ)(\mathrm{A})$$
$$i_3 = 0.1143\cos(12\pi t - 50.58^\circ)(\mathrm{A})$$

◀

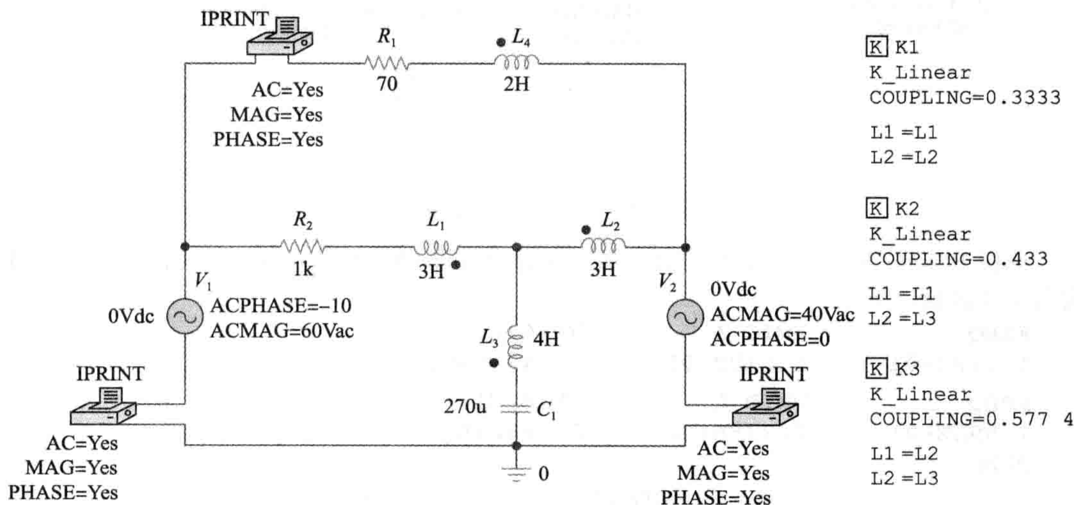


图 18-49 图 18-48 所示电路的 PSpice 原理图

练习 18-12 使用 PSpice 计算图 18-50 的 i_o。 **答案：** $0.1006\cos(4t+68.52^\circ)\mathrm{A}$

例 18-13 试利用 PSpice 求解图 18-51 所示理想变压器电路中的 $\boldsymbol{V}_1$ 与 $\boldsymbol{V}_2$。

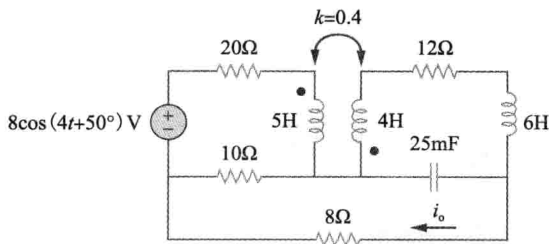


图 18-50 练习 18-12 的电路原理图

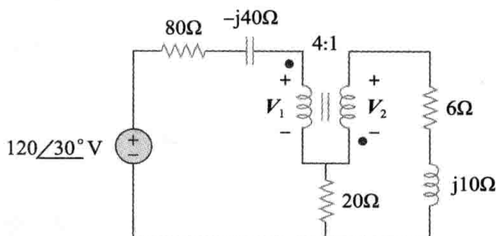


图 18-51 例 18-13 的电路原理图

解： 假定 $\omega=1$，可求出相应元件的电容值与电感值：

$$\mathrm{j}10 = \mathrm{j}\omega L \quad \Rightarrow \quad \mathrm{L} = 10(\mathrm{H})$$

$$-\mathrm{j}40 = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{C} = 25(\mathrm{mF})$$

图 18-52 所示为 PSpice 电路原理图。对于理想变压器，设耦合系数为 0.999，匝数为 400000 和 100000。[⊖]将两个伪元件 VPRINT2 连接在变压器两端，以便确定 $\mathbf{V}_1$ 和 $\mathbf{V}_2$。

画出图 18-52 所示电路图后，需要保存为 exam1813.dsn。首先选择 PSpice/New Simulation Profile，在弹出的 New Simulation 对话框中，输入文件名 exam1812，并单击 Create 按钮。在弹出的 Simulation Settings 对话框中，选择 Analysis Type 下的 AC Sweep/Noise 项，选择 AC Sweep Type 下的 Linear 项。输入 0.1592 作为 Start Freq，0.1592 作为 Final Freq，1 作为 Total Points。

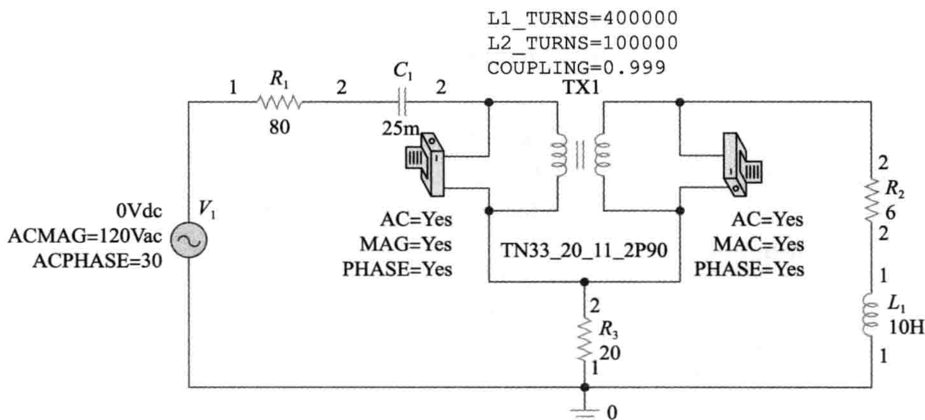


图 18-52　图 18-51 的 PSpice 电路原理图

选择 PSpice/Run 进行电路仿真。通过选择 PSpice/View Output file，得到输出文件。输出文件包括以下：

```
FREQ          VM(C,A)       VP(C,A)
1.592E-01     1.212E+02     -1.435E+02
FREQ          VM(B,C)       VP(B,C)
1.592E-01     2.775E+02     2.789E+01
```

得到：

$$\mathbf{V}_1 = -V(C,A) = 121.2\angle 36.5^\circ(\mathrm{V})$$

$$\mathbf{V}_2 = -V(B,C) = 277.5\angle 27.89^\circ(\mathrm{V})$$ ◀

练习 18-13　使用 PSpice 计算图 18-53 所示电路的 $\mathbf{V}_1$ 和 $\mathbf{V}_2$。

答案：$63.1\angle 28.65^\circ$(V)；$94.64\angle -151.4^\circ$(V)

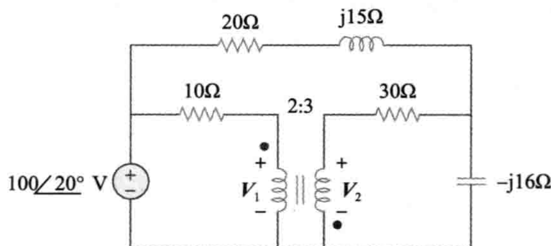


图 18-53　练习 18-13 的电路原理图

†18.8　应用

变压器通常是体积最大、重量最重、价格最昂贵的电路元件。但它也是电子电路中不

⊖ 注意，对于理想变压器而言，其一次绕组和二次绕组的电感值均为无穷大。

可缺少的无源设备。在各种高效设备中，变压器的效率一般为 95%，也可以达到 99%。变压器的应用很多，例如：

- 升高或降低电压或电流，使其适合于电力传输和分配。
- 将电路的一部分和另一部分隔离（即在没有任何电气连接的情况下传输功率）。
- 用作阻抗匹配设备，实现最大功率传输。
- 用于感应性响应的选频电路

由于变压器应用的多样性，出现了许多专用变压器（本章只讨论了其中类型）。如：电压变压器、电流转换器、功率转换器、配电变压器、阻抗匹配变压器、音频变压器、单相变压器、三相变压器、整流变压器、反相变压器等[⊖]。本节仅介绍变压器的三种主要应用：变压器作为隔离设备、变压器作为匹配器以及变压器在配电系统中的应用。

18.8.1 隔离变压器

当两个设备之间不存在物理连接时，则称这两个设备之间存在电气隔离。变压器的一次电路和二次电路之间没有电气连接，能量是通过磁耦合传输的。下面介绍利用变压器电气隔离特性的三种实际应用。

首先考虑图 18-54 所示电路。图中的整流器将交流电转换为直流电，变压器在该电路中的作用是将交流电耦合到整流器中。这里的变压器起到两个作用：第一个作用是升压或者降压；第二个作用是在交流电源和整流器之间提供电气隔离，降低电路在工作时出现电击的危险性。

隔离变压器的第二个示例是用于耦合放大器的两级，防止前一级的直流电压影响下一级的直流偏置。直流偏置是晶体管放大器或其他电路在要求模式下工作所需的直流电压。放大器的各级都有其在特定模式下工作所需的偏置电压，如果没有变压器提供的直流隔离，会影响各级特定的工作模式。如图 18-55 所示，接入变压器后，由于直流电压不存在磁耦合，因此只有交流信号从前一级耦合到后一级。在无线电接收机或者电视接收机中，变压器通常用于高频放大器各级之间的耦合。当变压器只用于提供电气隔离时，其匝数比应该为 1，即隔离变压器的 $n=1$。

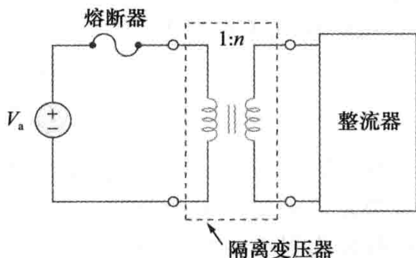


图 18-54 用于隔离交流电源与整流器的变压器

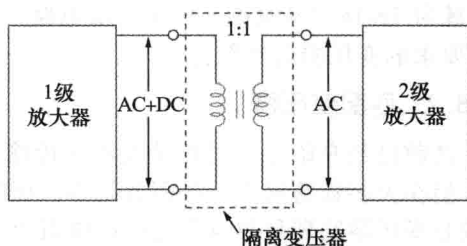


图 18-55 在放大器两级之间提供电气隔离的变压器

隔离变压器的第三个应用示例是测量 13.2kV 线路两端的电压。将伏特表直接接到这种高压线路中是很不安全的。此时采用变压器既可以起到隔离电力线与伏特表的作用，又可以将电压降至安全的电平，如图 18-56 所示。如果采用伏特表测量变压器的二次电压，则可根据匝数比确定其一次电压。

⊖ 对于各类变压器的详细介绍，可参考 W. M. Flanagan 编著的《变压器设计与应用手册》第二版，纽约，McGraw-Hill 出版集团，1993。

例 18-14 试确定图 18-57 所示电路负载两端的电压。

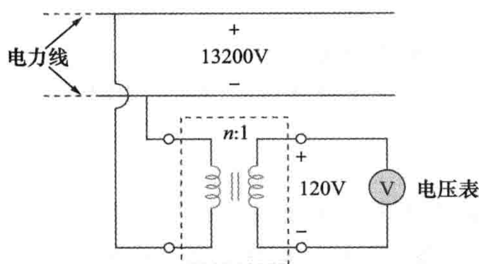


图 18-56 在电力线和伏特表之间提供隔离的变压器

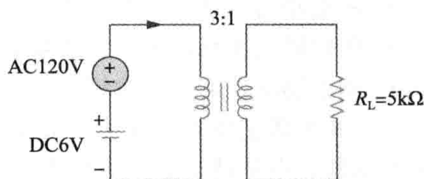


图 18-57 例 18-14 的电路原理图

解： 利用叠加定理求解负载电压。令 $v_L = v_{L1} + v_{L2}$，其中 v_{L1} 是直流源在负载产生的电压，v_{L2} 是交流源在负载产生的电压。图 18-58 所示为只包含直流源或交流源的电路图。由直流电源产生的负载电压为零，因为要在二次回路产生感应电压，一次电源必须是时变电压源。因此 $v_{L1} = 0$。对于交流电源，

$$\mathbf{V}_2/\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2/120 = 1/3$$

或

$$\mathbf{V}_2 = 120/3 = 40(\text{V})$$

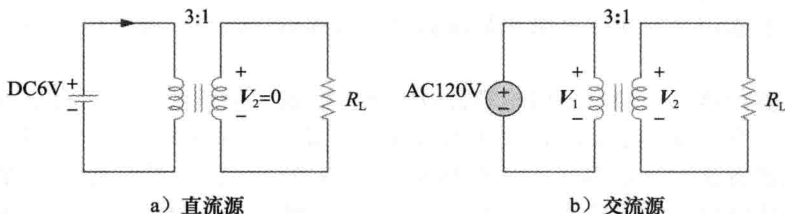


图 18-58 例 18-14 的电路图

因此，由交流产生的负载电压 $v_{L2} = 40\text{V}$，即 $v_{L2} = 40\cos(\omega t)$。即，只有交流电压才能通过变压器传送到负载上，也说明了变压器的直流隔离作用。◀

练习 18-14 参见图 18-56 所示电路，试计算将 18.2kV 线电压降至 120V 安全电压所要求的变压器的匝数比。 **答案：** 110

18.8.2 匹配变压器

之前已经介绍过，实现最大功率传输的条件是负载电阻 R_L 必须与电源电阻 R_s 相匹配，但在大多数情况下，这两者是不匹配的，而且两者都是固定的，不能改变。然而，利用铁心变压器实现负载电阻与电源电阻相匹配，这一过程称为阻抗匹配（impedance matching）。例如，扬声器与音频功率放大器相连接时，就需要用变压器，因为扬声器的电阻只有几欧姆，而音频功率放大器的内阻高达几千欧姆。

如果考虑如 18-59 所示电路（在图 18-59 中，如果有必要，可以使用戴维南等效电路来表示 V_s 和 R_s）。回想式（18-47），理想变压器通过一个比例因子 n^2，将负载阻抗反射回初级。为了将反射负载 R_L/n^2 与电源电阻 R_s 相匹配，应该有：

$$R_s = \frac{R_L}{n^2} \tag{18-56}$$

选择适当的匝数比 n 就可以满足式（18-56）。由式（18-56）可知，当 $R_s > R_L$ 时，需采用降压变压器（$n<1$）实现阻抗匹配；当 $R_s < R_L$ 时，则需采用升降变压器（$n>1$）实现阻抗匹配。

例 18-15 图 18-60 所示的理想变压器用于匹配放大电路和扬声器，使扬声器的功率最大，放大器的戴维南阻抗（即输出阻抗）为 128Ω，而扬声器的内阻为 8Ω，试确定变压器的匝数比。

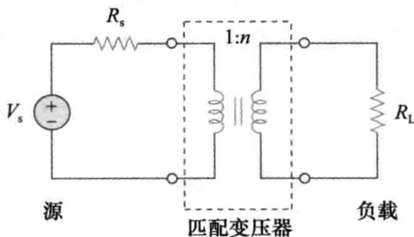


图 18-59　匹配变压器

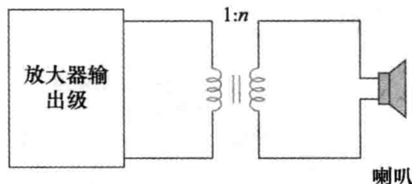


图 18-60　例 18-15 的电路图，利用理想变压器实现扬声器与放大器的阻抗匹配

解：利用戴维南等效电路代替放大器，并将扬声器的阻抗 $Z_L=12\Omega$ 反射到理想变压器的一次侧，得到图 18-61 所示的电路。要实现最大功率传输，需满足：

$$Z_{Th}=\frac{Z_L}{n^2}$$

或

$$n^2=\frac{Z_L}{Z_{Th}}=\frac{8}{128}=\frac{1}{16}$$

图 18-61　例 18-15 的示意图，图 18-60 所示电路的等效电路

因此，匝数比 $n=1/4=0.25$。

利用 $P=I^2R$ 可以证明，传送给扬声器的功率的确比不采用理想变压器时大得多，如果不采用理想变压器，将放大器与扬声器直接相连，则传送给扬声器的功率为

$$P_L=\left(\frac{V_{Th}}{Z_{Th}+Z_L}\right)^2 Z_L=432.5V_{Th}^2\mu W$$

采用变压器后，一次电流和二次电流为

$$I_p=\frac{V_{Th}}{Z_{Th}+Z_L/n^2},\quad I_s=\frac{I_p}{n}$$

因此

$$P_L=I_s^2Z_L=\left(\frac{V_{Th}/n}{Z_{Th}+Z_L/n^2}\right)^2 Z_L=\left(\frac{nV_{Th}}{n^2Z_{Th}+Z_L}\right)^2 Z_L$$
$$=1953_{Th}^2\mu W$$

证实了前面的说法。◀

练习 18-15　要实现 1kΩ 负载与内部阻抗为 25kΩ 的电源匹配，试计算所需理想变压器的匝数比，并求出电源电压为 30V 时的负载电压。　**答案**：0.2；3V

18.8.3　电力配送

电力系统主要由三部分组成：发电、输电与配电。本地电力公司的发电厂大约 18kV 时，发出几百兆伏安（MV·A）的功率。如图 18-62 所示，利用三相升压变压器将电功率输送到传输线上。

为什么要用变压器呢？假定要将 100000V·A 的电功率从传输到 50km 以外的地方，由于 $S=VI$，如果线电压为 1000V，则传输线上必须承载 100A 的电流负荷，这就要求传输线的直径很大。但是如果线电压为 10000V，则传输线的负荷仅 10A，电流减小使得所需的导线尺寸也相应地减小，在最小化传输线损耗 I^2R 的同时，也大大节省了

材料开销。为了使损耗最小，需要采用一个升压变压器[⊖]。否则，就会在传输线上消耗大部分电功率。变压器能方便和经济地实现升压、降压以及电力配送，这些功能也正是广泛采用交流发电而不是直流发电的主要原因之一。所以在一定发电功率条件下，电压越高越好。目前，实际应用中的最高电压为 1MV，随着研究和实验的进展，电压还有可能进一步提高。

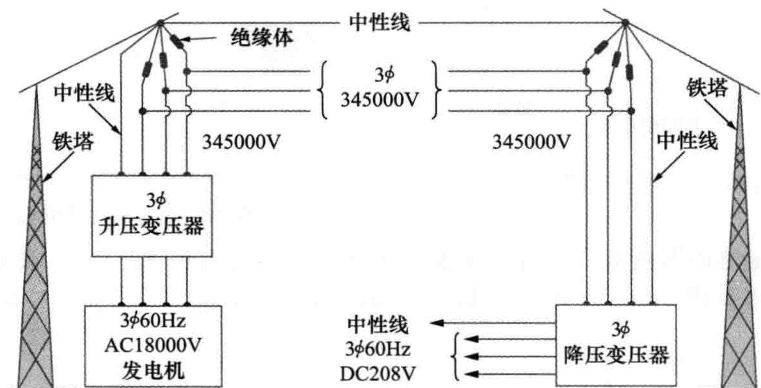


图 18-62 典型的电力输送配电系统

（A. Marcus and C. M. Thomson, Electricity for Technicians, 2nd edition, © 1975, p. 337. 经 Pearson Education 公司的许可转载，Upper Saddle River，NJ.）

除发电厂外，电能是通过称为电力网的网络发送到几百英里以外的地方。电网中的三相电是通过架设在各种尺寸、各种形状的铁塔上的传输线传输的。铝制或者钢加强型传输线直径可达 40mm，并能承受 1380A 的电流负荷。

在变电站，利用配电变压器降压，降压过程通常是分级进行的。既可以通过高空电缆，也可以是地下电缆将电力配送给本地用户。变电站负责给居民、商业或工业用户配电。在接收端，居民最终得到的是 120/240V 电源，而工业或商业用户的馈电电压更高，例如 460/208V 等。居民用户的供电通常是由架设在电力公司电线杆上的配电变压器实现的。需要直流电时，可以将交流电转换为直流电。

例 18-16 某配送变压器用于家庭供电，如图 18-63 所示。用电负载包括，8 只 100W 的灯泡，一台 350W 的电视机，以及一台 15kW 的厨房用具。如果变压器的二次绕组为 72 匝，试计算：(a) 一次绕组的匝数；(b) 一次绕组上的电流 I_p。

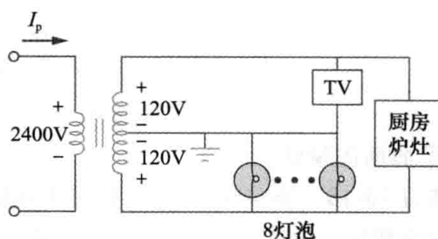


图 18-63 例 18-16 和练习 18-16 的电路原理图

解：(a) 由于本题仅关心电流和电压的大小，因此绕组同名端的位置并不重要。因为：

$$\frac{N_p}{N_s}=\frac{V_p}{V_s}$$

于是有：

$$N_p=N_s\frac{V_p}{V_s}=72\times\frac{2400}{240}=720(\text{匝})$$

⊖ 有读者可能会问，为什么升高电压，并不会增大电流，从而使损耗 I^2R 也不增加呢？因为 $IV_l=V_l^2/R$，其中 V_l 是传输线发送端与接收端之间的电位差，而被升高的电压是发送端的电压 V，而不是 V_l，如果接收端电压为 V_R，则 $V_l=V-V_R$，因为 V 与 V_R 非常接近，所以即使电压 V 升高了，V_l 仍然是很小的。

（b）负载吸收的总功率为：

$$S = 8 \times 100 + 350 + 15000 = 16.15(\mathrm{kW})$$

但是，

$$S = V_{\mathrm{p}} I_{\mathrm{p}} = V_{\mathrm{s}} I_{\mathrm{s}}$$

所以

$$I_{\mathrm{p}} = \frac{S}{V_{\mathrm{p}}} = \frac{16150}{2400} = 6.729(\mathrm{A})$$ ◀

练习 18-16 在例 18-16 中，如果利用 12 只 60W 的灯泡代替 8 只 100W 的灯泡，并利用 4.5kW 的空调代替厨房用具，试求：（a）电源提供的总功率；（b）一次绕组中的电流 I_{p}。 **答案：**（a）5.57kW； （b）2.321A

18.9 本章小结

1）如果一个线圈的磁通量穿过另一个线圈，则称这两个线圈是相互耦合的，两个线圈之间的互感值为

$$M = k\sqrt{L_1 L_2}$$

其中，k 是耦合系数，且 $0<k<1$。

2）如果 v_1 和 i_1 是线圈 1 中的电压与电流，v_2 和 i_2 是线圈 2 中的电压与电流，则有：

$$v_1 = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

和

$$v_2 = L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

因此，耦合线圈中的感应电压由自感电压和互感电压两部分组成。

3）互感电压的极性在电路中的表示需遵循同名端规则。

4）储存在两个耦合线圈中的能量为：

$$\frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$$

5）变压器是一种包含两个或两个以上磁耦合线圈的四端设备，用于改变电路中的电流、电压与阻抗。

6）线性（或松散耦合）变压器的线圈缠绕在磁性材料上。为了便于分析，可以利用等效的 T 形网络或者 Π 形网络代替线性变压器。

7）理想（或铁心）变压器耦合系数 $k=1$，电感为无穷大（L_1、L_2、$M\to\infty$）的无损（$R_1=R_2=0$）变压器。

8）对于理想变压器，有

$$\mathbf{V}_2 = n\mathbf{V}_1,\quad \mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_1/n,\quad \mathbf{S}_1 = \mathbf{S}_2,\quad \mathbf{Z}_R = \frac{Z_{\mathrm{L}}}{n^2}$$

其中，$n=N_2/N_1$ 为匝数比，N_1 为一次绕组的匝数，N_2 为二次绕组的匝数。当 $n>1$ 时，变压器将一次电压升高，当 $n<1$ 时，变压器将一次电压降低，而当 $n=1$ 时，变压器为匹配隔离装置。

9）自耦变压器是一次电路和二次电路共用一个线圈的变压器。

10）PSpice 软件是分析磁耦合电路的有力工具。

11）在配电输送系统的各个环节都需要采用变压器。

12）变压器在电子系统中的重要应用包括电气隔离装置和阻抗匹配装置。

复习题

1 参考图 18-64a 所示的两磁耦合线圈，其互感电压的极性为：
(a) 正 (b) 负

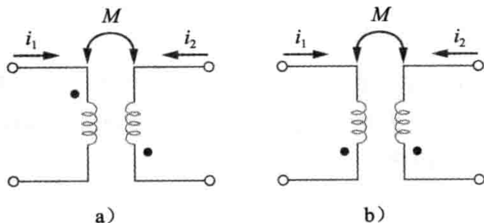


图 18-64 复习题 1 与复习题 2 的电路图

2 对于图 18-64b 所示的磁耦合线圈，其互感电压的极性为：
(a) 正 (b) 负

3 $L_1=2$H，$L_2=8$H，$M=3$H 的两个耦合线圈的耦合系数为：
(a) 0.1875 (b) 0.75
(c) 1.333 (d) 5.333

4 变压器是用于升高或者降低什么的？
(a) 直流电压 (b) 交流电压
(c) 直流电压和交流电压

5 对于一个匝数比为 10 的变压器，二次绕组上连接 10kΩ 的电阻，则从源端看进去的反射负载为：
(a) 10kΩ (b) 1kΩ
(c) 100Ω (d) 10Ω

6 如图 18-65a 所示的理想变压器匝数比 $N_2/N_1=10$，则 V_2/V_1 为：
(a) 10 (b) 0.1
(c) −0.1 (d) −10

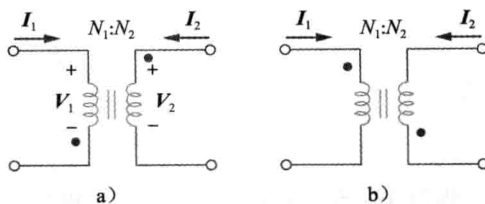


图 18-65 复习题 6 和 7 的电路图

7 如图 18-65b 所示的理想变压器匝数比 $N_2/N_1=10$，则 I_2/I_1 为：
(a) 10 (b) 0.1
(c) −0.1 (d) −10

8 理想变压器的串压比是 25000/240V，这是哪种类型的变压器？
(a) 升压变压器 (b) 降压变压器
(c) 隔离变压器

9 为了使内阻为 500Ω 的电源与 15Ω 的负载相匹配，需要如下哪种设备？
(a) 升压线性变压器
(b) 降压线性变压器
(c) 升压理想变压器
(d) 降压理想变压器
(e) 自耦变压器

10 以下哪种变压器可以作为隔离装置？
(a) 线性变压器
(b) 理想变压器
(c) 自耦变压器
(d) 上述三种变压器均可

答案：1 (b)，2 (a)，3 (b)，4 (b)，5 (c)，6 (d)，7 (b)，8 (b)，9 (d)，10 (b)

习题

18.2 节

1 对于图 18-66 所示的三个耦合线圈，试计算其总电感值。

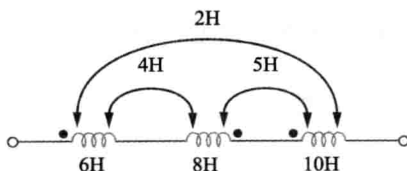


图 18-66 习题 1 的电路原理图

2 试确定图 18-67 所示三个串联的电感值。

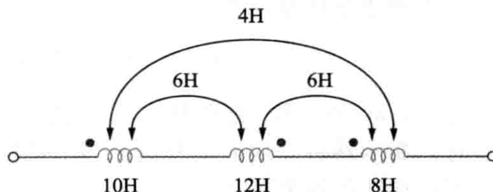


图 18-67 习题 2 的电路原理图

3 正向串联的两个线圈的总电感为 250mH，当这两个线圈反向串联时，总电感为 150mH，如果其中一个线圈（L_1）的总电感值为另一个线圈的三倍，试求 L_1、L_2 与

M，并计算耦合系数 k。

4　两个线圈相互耦合，且 $L_1=25\text{mH}$，$L_2=60\text{mH}$，$k=0.5$。计算以下两种情况下的最大等效电感：

(a) 两个线圈串联

(b) 两个线圈并联。

5　如图 18-68 所示电路，试由 $\boldsymbol{I}_1$ 和 $\boldsymbol{I}_2$ 确定 $\boldsymbol{V}_1$ 和 $\boldsymbol{V}_2$ 的值。

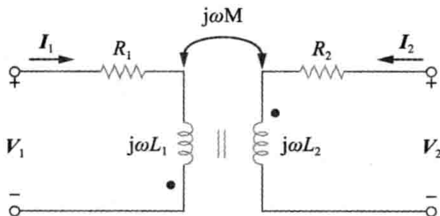


图 18-68　习题 5 的电路原理图

6　计算图 18-69 所示电路的 $\boldsymbol{V}_o$。

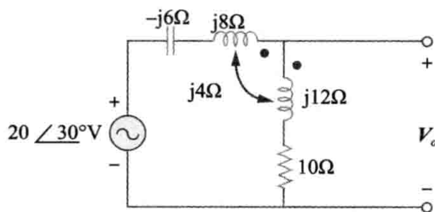


图 18-69　习题 6 的电路原理图

7　计算图 18-70 所示电路的 $\boldsymbol{V}_o$。

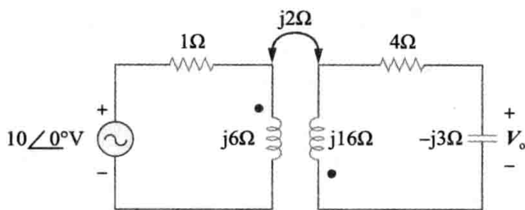


图 18-70　习题 7 的电路原理图

8　计算图 18-71 所示网络的 $\boldsymbol{V}_x$。

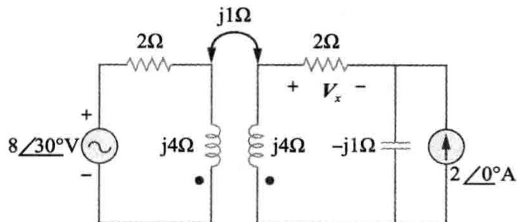


图 18-71　习题 8 的电路原理图

9　计算图 18-72 所示电路的等效阻抗。

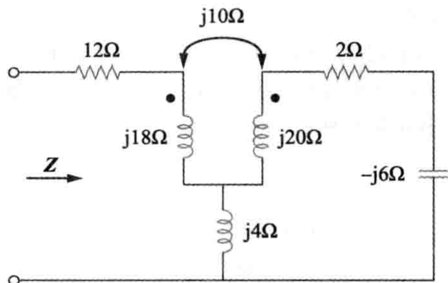


图 18-72　习题 9 的电路原理图

10　确定图 18-73 所示电路从 a-b 端口看进去的输入阻抗。

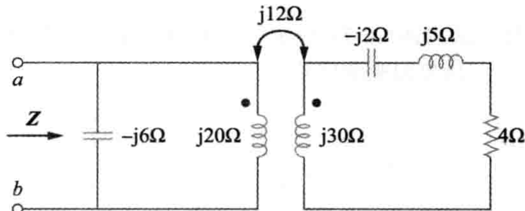


图 18-73　习题 10 的电路原理图

11　确定图 18-74 所示电路中变压器的 T 形等效网络。

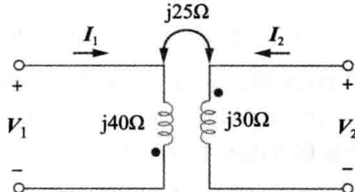


图 18-74　习题 11 的电路原理图

12　使用网孔分析法计算图 18-75 所示电路的 $\boldsymbol{I}_1$ 和 $\boldsymbol{I}_2$。

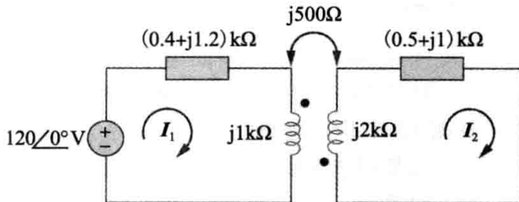


图 18-75　习题 12 的电路原理图

13　计算图 18-76 所示电路的 $\boldsymbol{I}_1$、$\boldsymbol{I}_2$ 和 $\boldsymbol{V}_o$。

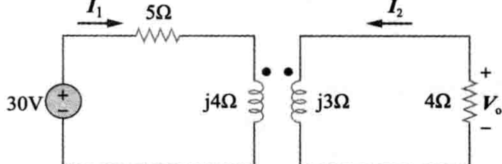


图 18-76　习题 13 的电路原理图

18.3 节

14 试确定图 18-77 所示电路中的电流 $\boldsymbol{I}_1$、$\boldsymbol{I}_2$ 和 $\boldsymbol{I}_3$，并求出 $t=2\text{ms}$ 时耦合线圈中储存的能量，假定角频率 $\omega=1000\text{rad/s}$。

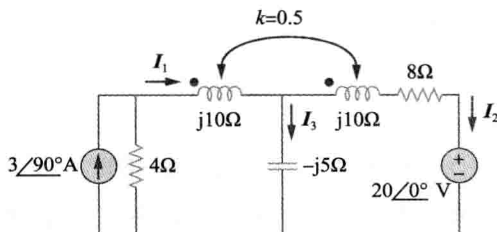


图 18-77 习题 14 的电路原理图

15 试求图 18-78 所示电路的 $\boldsymbol{I}_1$、$\boldsymbol{I}_2$，并计算 4Ω 电阻吸收的功率。

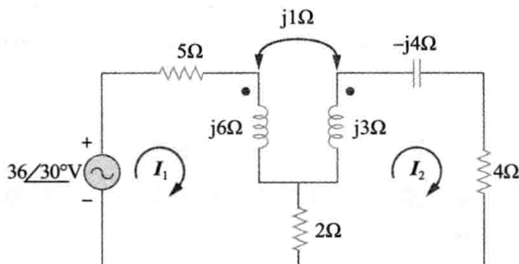


图 18-78 习题 15 和 49 的电路原理图

16 如图 18-79 所示电路，如果 $M=0.2\text{H}$，$v_s=12\cos(10t)\text{V}$，试求 i_1 和 i_2，并计算 $t=15\text{ms}$ 时刻磁耦合线圈中储存的能量。

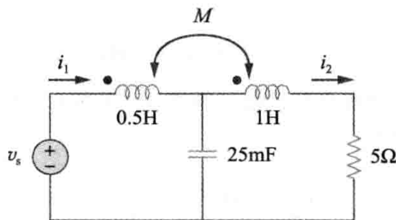


图 18-79 习题 16 的电路原理图

17 在图 18-80 所示电路中：

(a) 计算耦合系数；

(b) 计算 v_o；

(c) 试确定 $t=2\text{s}$ 时耦合电感中储存的能量。

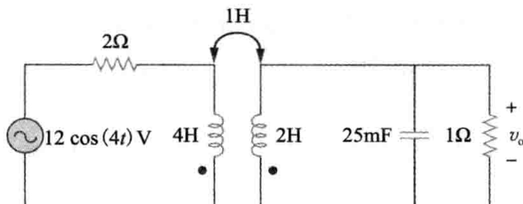


图 18-80 习题 17 的电路原理图

18 试求图 18-81 所示电路中的 $\boldsymbol{I}_o$。如果将右侧线圈的同名端位置换一下，再求 $\boldsymbol{I}_o$。

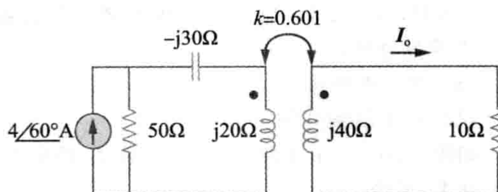


图 18-81 习题 18 的电路原理图

19 已知两耦合线圈 $L_1=5\text{mH}$，$L_2=2.4\text{mH}$，$M=3.2\text{mH}$，试计算耦合系数。

18.4 节

20 使用反射阻抗概念重新求解例 18-1。

21 在图 18-82 所示电路中，试求使 10Ω 电阻消耗的功率为 320W 的耦合系数 k 的值，对于该 k 值，试确定 $t=1.5\text{ms}$ 时耦合线圈中储存的能量。

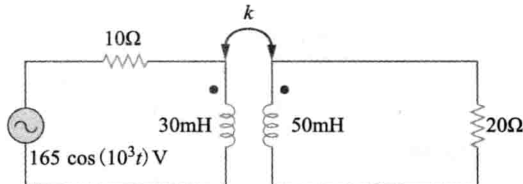


图 18-82 习题 21 的电路原理图

22 (a) 试利用反射阻抗的概念确定图 18-83 所示电路的输入阻抗。

(b) 试利用 T 形等效电路取代线性变压器确定其输入阻抗。

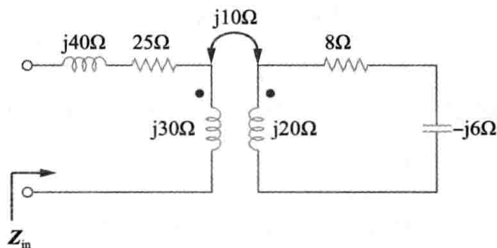


图 18-83 习题 22 的电路原理图

23 对于图 18-84 所示电路，求：

(a) T 形等效电路

(b) Π形等效电路。

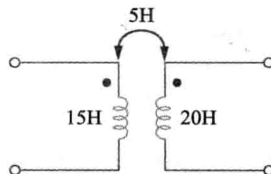


图 18-84 习题 23 的电路原理图

24　试确定图 18-85 所示空芯变压器电路的输入阻抗。

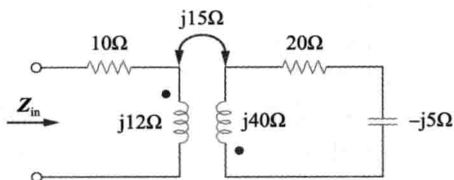


图 18-85　习题 24 的电路原理图

25　试求图 18-86 所示电路的输入阻抗。

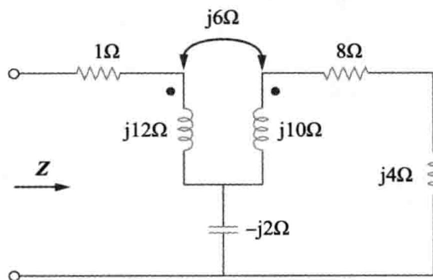


图 18-86　习题 25 的电路原理图

18.5 节

26　参见图 18-32，给出图 18-87 所示电路图中各理想变压器的端口电压和电流之间的关系。

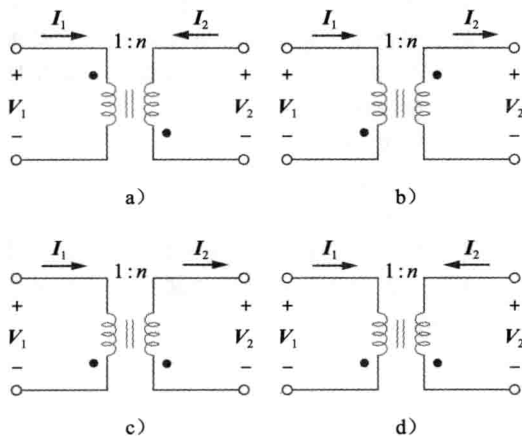


图 18-87　习题 26 的电路原理图

27　已知理想变压器一次绕组的电压为 210V，电流为 1.6A，匝数比为 2，计算二次绕组的电压和电流。

28　某一个降压变压器的一次绕组电压为 120V，二次绕组为 8V。如果二次回路的额定电流为 2A，试确定一次回路的额定电流。

29　一个 4kV·A，2300/230V (rms) 变压器的一次回路等效阻抗为 $2\angle 10°\Omega$。如果变压器与负载相连，且功率因数为 0.6，试计算输入阻抗。

30　一个 1200/240V (rms) 变压器在高压端的阻抗为 $60\angle -30°\Omega$，如果变压器在低压端的负载是 $0.8\angle 10°\Omega$，试确定一次电流和二次电流。

31　试确定图 18-88 所示电路的 $\boldsymbol{I}_1$ 和 $\boldsymbol{I}_2$。

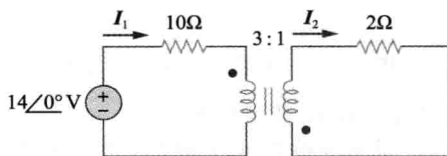


图 18-88　习题 31 的电路原理图

32　试计算图 18-89 所示的理想变压器电路的 $\boldsymbol{V}_1$ 和 $\boldsymbol{V}_2$。

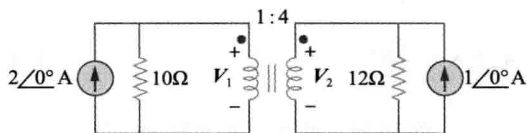


图 18-89　习题 32 的电路原理图

33　如图 18-90 所示，计算 8Ω 电阻吸收的功率。

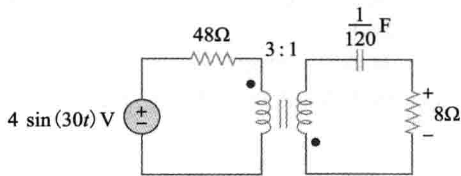


图 18-90　习题 33 的电路原理图

34　试求图 18-91 所示电路的 $\boldsymbol{V}_o$。改变二次回路同名端的位置，再次计算 $\boldsymbol{V}_o$。

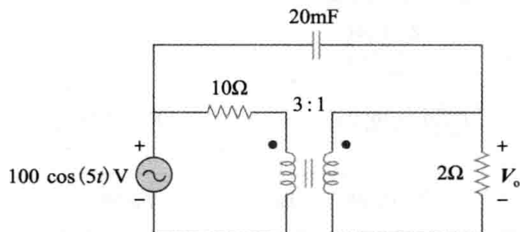


图 18-91　习题 34 的电路原理图

35　计算图 18-92 所示理想变压器电路的 $\boldsymbol{I}_x$。

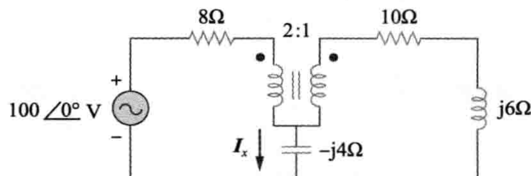


图 18-92　习题 35 的电路原理图

36 对于图 18-93 所示电路，当传递给负载的平均功率最大时的匝数比，并计算该最大平均功率。

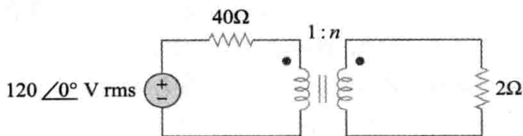


图 18-93 习题 36 的电路原理图

37 参考图 18-94 所示网络：

(a) 求传递给 200Ω 负载的功率最大时的匝数比 n；

(b) 当 $n=10$ 时，试确定 200Ω 负载吸收的功率。

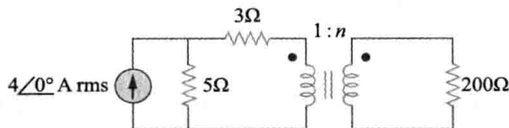


图 18-94 习题 37 的电路原理图

38 在图 18-95 所示电路中，变压器用于实现放大器和 8Ω 负载的匹配，放大器的戴维南等效参数为：$\mathbf{V}_{Th}=10\text{V}$，$\mathbf{Z}_{Th}=128\Omega$。

(a) 试求实现最大功率传输时所需的匝数比；

(b) 试确定一次电流和二次电流；

(c) 试计算一次电压和二次电压。

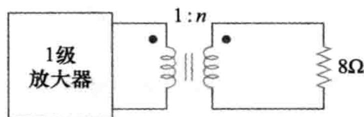


图 18-95 习题 38 的电路原理图

39 试确定传递给 $\mathbf{Z}_s$ 的平均功率。

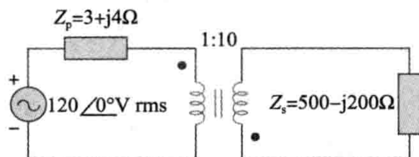


图 18-96 习题 39 的电路原理图

40 计算图 18-97 所示理想变压器电路中 10Ω 电阻吸收的功率。

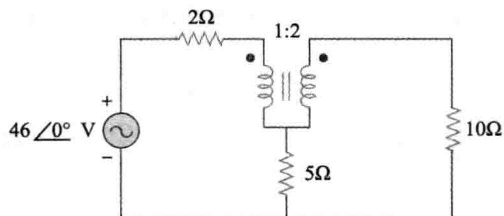


图 18-97 习题 40 的电路原理图

41 已知负载电阻为 8Ω，电源端的内阻为 96Ω，使用理想变压器进行阻抗匹配，(a) 确定匝数比；

(b) 当源端电压为 6V 时的负载电压。

42 某门铃所用的变压器的一次回路端有 200 匝，二次回路端为 35 匝。如果该变压器从 120V 的传输线接出，对应的电流为 0.2A，试确定

(a) 二次绕组电流；

(b) 二次绕组电压；

(c) 传递给二次回路的功率。

43 计算图 18-98 所示电路的负载电流 $\mathbf{I}$。

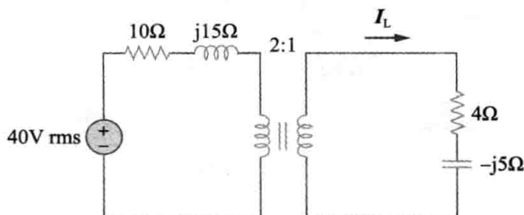


图 18-98 习题 43 的电路原理图

18.6 节

44 某升压匝数比为 1∶4 的理想自耦变压器的二次侧与 120Ω 负载相连，一次侧与 420V 电源相连，试确定一次电流。

45 抽头比是 40%的自耦变压器由 400V，60Hz 的电源供电，并工作在降压状态下。某单位功率因数下的 5kV·A 负载与该变压器二次侧相连。试求：

(a) 二次电压；

(b) 二次电流；

(c) 一次电流

46 图 18-99 所示理想自耦变压器电路中，试计算 $\mathbf{I}_1$、$\mathbf{I}_2$ 和 $\mathbf{I}_o$，并确定传递给负载的平均功率。

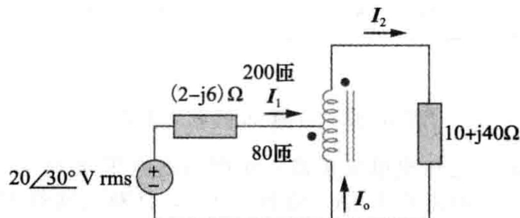


图 18-99 习题 46 的电路原理图

*47 在图 18-100 所示电路中，调节 $\mathbf{Z}_L$，使得传递给 $\mathbf{Z}_L$ 的平均功率最大，试求 $\mathbf{Z}_L$ 以及传递给它的最大平均功率，假定 $N_1=600$ 匝，$N_2=200$ 匝。

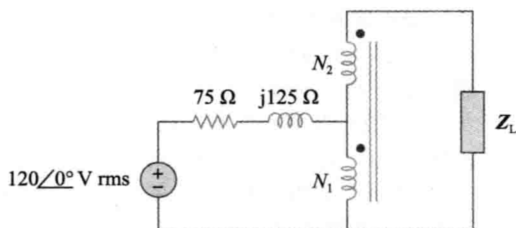


图 18-100　习题 47 的电路原理图

48　在如图 18-101 所示的理想变压器电路中，试确定传递给负载的平均功率。

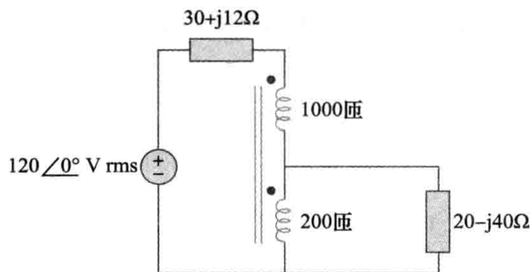


图 18-101　习题 48 的电路原理图

18.7 节

49　使用 PSpice 重做习题 15。

50　使用 PSpice 计算图 18-102 所示电路的 I_1、I_2 和 I_3。

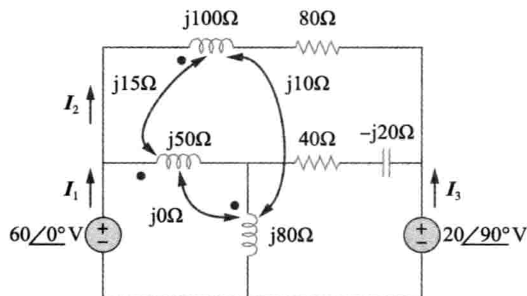


图 18-102　习题 50 的电路原理图

51　使用 PSpice 计算图 18-103 所示电路的 I_1、I_2 和 I_3。

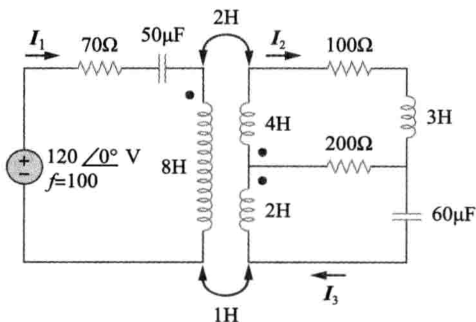


图 18-103　习题 51 的电路原理图

52　使用 PSpice 计算图 18-104 所示电路的 V_1、V_2 和 I_o。

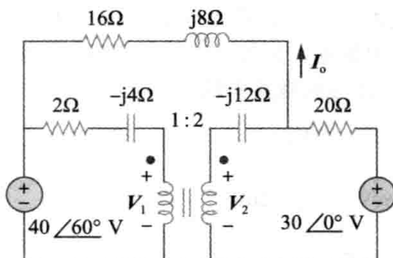


图 18-104　习题 52 的电路原理图

18.8 节

53　某输入阻抗为 7.2kΩ 的立体声放大电路通过一个一次侧匝数为 3000 的变压器，与一个输入阻抗为 8Ω 的扬声器相匹配，试计算该变压器一次绕组的匝数。

54　某一次绕组匝数为 2400，二次绕组匝数为 48 的变压器用作阻抗匹配器件，试问与二次侧相连接的 3Ω 负载的反射阻抗为多大？

55　某无线电接收机的输入阻抗为 300Ω，当它与特征阻抗为 75Ω 的天线系统直接相连时，阻抗不匹配。在接收机之前连接一个阻抗匹配变压器，即可实现最大功率传送。试计算所需变压器的匝数比。

56　某匝数比为 $n=0.1$ 的降压变压器给某电阻性负载提供 12.6rms 的电压，如果其一次电流为 2.5Arms，试问传递给该负载的功率为多大？

57　某 240/120V rms 电源变压器的额定功率为 10kV·A。试确定其匝数比、一次电流以及二次电流。

58　某 4kV·A、2400/240V rms 变压器的一次绕组匝数为 250，试计算：

(a) 匝数比；

(b) 二次绕组匝数；

(c) 一次绕组电流和二次绕组电流。

59　某 25000/240V rms 配电变压器的一次绕组电流的额定值为 75A，

(a) 试求变压器的额定功率（单位是 kV·A）；

(b) 试计算二次电流。

60　使用 4800V rms 的传输线给一次绕组匝数为 1200，二次绕组匝数为 28 的配电变压器供电，当二次绕组负载为 10Ω 时，试求：

(a) 二次绕组电压；

(b) 一次电流与二次电流；

(c) 提供给负载的功率。

61 使用7200/120V变压器给10只相互并联的灯泡供电，如图18-105所示，灯泡可以用144Ω的电阻器来建模，试求：

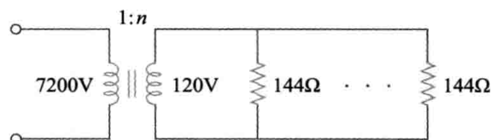


图18-105 习题61的电路原理图

(a) 变压器的匝数比 n；

(b) 流过一次绕组的电流。

62 使用变压器实现输出阻抗为5kΩ的电子放大器与8Ω的负载相匹配。已知二次绕组的匝数为80，试计算一次绕组的匝数。

63 一种欧洲产的咖啡机工作在240V (rms) 传输线下的功率为940W，

(a) 如果在美国的120V (rms) 传输线条件下使用该咖啡机，将会出现什么情况？

(b) 从120V传输线得到的电流是多少？

第19章 二端口网络

教育是经历了学习和遗忘仍保留下来的东西。

——伯尔赫斯·弗雷德里克·斯金纳

拓展职业生涯

通信系统职业

通信系统用到了电路分析的原理。通信系统设计是将信息从信源端（发送端）经由一个通道（传输介质）传送到终端（接收端）的过程。通信技术人员主要从事信息传输设备和接收系统的设计工作，传输的信息可以是语音、数据或者是视频。

我们生活在信息时代，通过通信系统，我们可以及时地获取新闻、天气、体育、购物、金融、商业投资等各类信息。通信系统的典型实例包括：因特网、电话网、移动电话、广播、有线电视、卫星电视、传真和雷达等等。另外，警察和消防部门、航空以及各类商业部门所使用的移动式无线电系统也是一种典型的通信系统。



詹姆斯·沃森拍摄
(© Chuck Alexander)

通信领域是电气工程中发展最快速的领域之一。近年来，随着通信领域与计算机工程技术的融合，各类数字通信网络不断涌现，如局域网、城域网，宽带综合业务数字网等等。例如，Internet（信息高速公路）的发展，使得教育工作者、商人以及其他各类人可以使用计算机将电子邮件发送到世界各地，远程登录数据库，交换各类文件资料等。Internet 开启了人们改变生活方式的浪潮，极大改变了人们进行贸易、交流和获取信息的方式，并且这种趋势还在继续。

通信系统工程师的主要任务是设计并维护高质量的信息服务系统。该系统包括产生、发送和接收各类信号的硬件设备。通信工程人员通常受雇于各类电信产业和日常使用通信系统的部门。当前越来越多的政府机构、学术部门和商业部门都需要更快捷和更准确的信息传输，因此，也就需要更多的通信工程师。

19.1 引言

对于一个含有两个端子（terminal）的网络，如果电流从一个端子流入并从另外一个端子流出，则称这两个端子构成一个端口（port)。具有两个端子的设备或者元件（例如电阻、电容和电感）构成单口（one-port）网络。本章之前我们处理的绝大多数电路都是二端子电路，或称单口电路，如图 19-1a 所示。它们或者是无源线性网络，在输入端口消耗功率，或者是含有独立源的线性网络，在输出端口提供功率。前面章节已经讨论了一对端子两端的电压，或者流过一对端子的电流的问题，例如电阻、电容和电感两端的电压或流过它们的电流。另外，前面章节也研究了包括晶体管和变压器在内的四端子（four-terminal）电路或二端口（two-port）电路，如图 19-1b 所示。一般来说，一个网络可以有 n 个端口。端口是电路网络的接入通道，由一对端子构成，电流从一端流入，并从另一端流出，流入该端口的净电流为零。

本章将主要介绍二端口网络（简称二端口）的有关问题。二端口网络通过两对端子接入电路。如图 19-1b 所示，从一对端子中的一端流入的电流，必定从该对端子中的另一端流出[⊖]。诸如晶体管等三端器件可以构造成一个二端口网络。

二端口网络是指具有输入端口和输出端口两个不同端口的电子网络

我们学习二端口网络至少有两个原因。首先，这类网络在通信、控制系统、电力系统以及电子学中都是非常有用的。例如，在电子学中二端口网络可以作为晶体管的模型，这为电路的级联设计提供了方便。同时，在滤波器设计中也是非常有用的。其次，在大型网络应用中，只要知道了该网络的二端口参数，就可以将其视为一个“黑匣子”，而不必关注其内部结构。

如图 19-1b 所示，可以使用 $\mathbf{V}_1$，$\mathbf{V}_2$，$\mathbf{I}_1$ 和 $\mathbf{I}_2$ 来表示二端口网络的特征。这四个变量中有两个是独立的，描述上述各电压和电流变量相互关系的一些项称为参数（parameter）。本章要推导出三组参数，并分析这些参数之间的关系，以及实现二端口网络的串并联或级联的方法。本章最后，我们将使用所介绍的概念来分析晶体管电路。

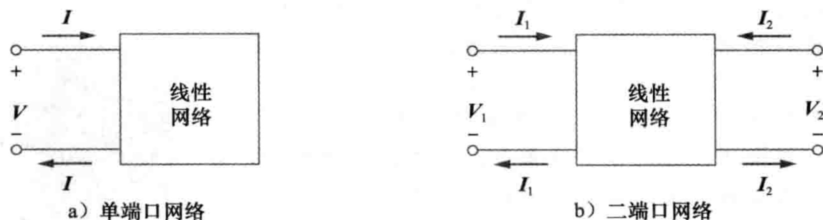


图 19-1　单端口和二端口网络

19.2　阻抗参数

阻抗参数和导纳参数常用于滤波器的综合分析，在阻抗匹配网络以及电力分配网络的设计和分析中也很有用。本节介绍阻抗参数，下一节讨论导纳参数。

一个二端口网络可以是电压源驱动的，如图 19-2a 所示，也可以是电流源驱动的，如图 19-2b 所示。由 19-2a 或 19-2b 可见，其端点电压和电流的关系可以表示为

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{V}_1 &= \mathbf{z}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{12}\mathbf{I}_2\\ \mathbf{V}_2 &= \mathbf{z}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{22}\mathbf{I}_2\end{aligned}} \tag{19-1}$$

其矩阵形式为[⊜]

$$\begin{bmatrix}\mathbf{V}_1\\ \mathbf{V}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{z}_{11} & \mathbf{z}_{12}\\ \mathbf{z}_{21} & \mathbf{z}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{I}_1\\ \mathbf{I}_2\end{bmatrix} = [\mathbf{z}]\begin{bmatrix}\mathbf{I}_1\\ \mathbf{I}_2\end{bmatrix} \tag{19-2}$$

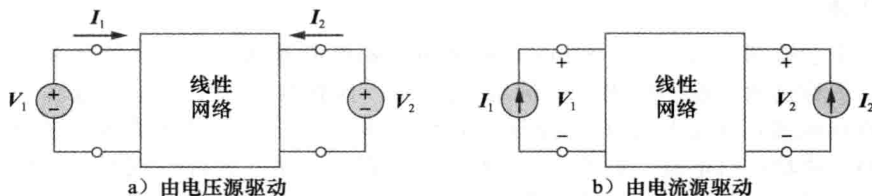


图 19-2　线性二端口网络

上式中的 $\mathbf{z}$ 称为阻抗参数（impedance parameter），或简称为 $\mathbf{z}$ 参数（$\mathbf{z}$ parameter），其单

⊖ 注意：二端口网络有一个重要特性：无论是输入端口还是输出端口，流入该端口的电流等于流出该端口的电流。

⊜ $\mathbf{V}_1$、$\mathbf{V}_2$、$\mathbf{I}_1$ 和 $\mathbf{I}_2$ 四个变量中只有两个是独立的，另外两个参数可根据式（19.1）得到。

位是欧姆。

令 $\mathbf{I}_1=0$（输入端口开路）或 $\mathbf{I}_2=0$（输出端口开路），可计算各参数的值。即有：

$$\mathbf{z}_{11}=\left.\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1}\right|_{\mathbf{I}_2=0} \tag{19-3a}$$

$$\mathbf{z}_{12}=\left.\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_2}\right|_{\mathbf{I}_1=0} \tag{19-3b}$$

$$\mathbf{z}_{21}=\left.\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_1}\right|_{\mathbf{I}_2=0} \tag{19-3c}$$

$$\mathbf{z}_{22}=\left.\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_2}\right|_{\mathbf{I}_1=0} \tag{19-3d}$$

由于 $\mathbf{z}$ 参数是在输入或输出端口的开路条件下求得的，因此又将 $\mathbf{z}$ 参数称为开路阻抗参数 (open-circuit impedance parameters)。

$$\mathbf{z}_{11} = \text{开路输入阻抗} \tag{19-4a}$$

$$\mathbf{z}_{12} = \text{开路转移阻抗} \tag{19-4b}$$

$$\mathbf{z}_{21} = \text{开路转移阻抗} \tag{19-4c}$$

$$\mathbf{z}_{22} = \text{开路输出阻抗} \tag{19-4d}$$

根据式（19-3)，在端口 2 开路的情况下，在端口 1 处接入一个电压源 $\mathbf{V}_1$（或电流源 $\mathbf{I}_1$），如图 19-3a 所示，并求出 $\mathbf{I}_1$ 和 $\mathbf{V}_2$，即可确定 $\mathbf{z}_{11}$ 和 $\mathbf{z}_{21}$，即

$$\mathbf{z}_{11}=\mathbf{V}_1/\mathbf{I}_1,\quad \mathbf{z}_{21}=\mathbf{V}_2/\mathbf{I}_1 \tag{19-5}$$

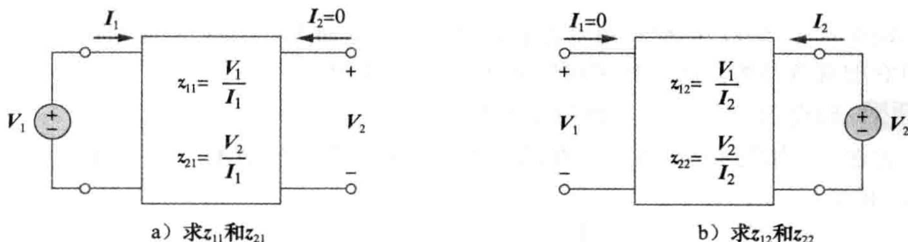


图 19-3　$\mathbf{z}$ 参数的确定

使用类似的方法，可以计算 $\mathbf{z}_{12}$ 和 $\mathbf{z}_{22}$。如图 19-3b 所示，令端口 1 开路，在端口 2 处接入一个电压源 $\mathbf{V}_2$（或电流源 $\mathbf{I}_2$），计算 $\mathbf{I}_2$ 和 $\mathbf{V}_1$，得到：

$$\mathbf{z}_{12}=\mathbf{V}_1/\mathbf{I}_2,\quad \mathbf{z}_{22}=\mathbf{V}_2/\mathbf{I}_2 \tag{19-6}$$

以上过程提供了一种计算或测量 $\mathbf{z}$ 参数的方法。

当 $\mathbf{z}_{11}=\mathbf{z}_{22}$ 时，则称该二端口网络是对称的 (symmetrical)。这意味着该网络关于某条中心线成镜面对称，也就是说，该中心线将网络划分为相同的两部分。

当二端口网络是线性网络且不含受控源时，两转移阻抗相等（即 $\mathbf{z}_{12}=\mathbf{z}_{21}$），该二端口网络满足互易性 (reciprocal)。对于互易网络，如果网络的激励点和响应点互换，其两个转移阻抗参数保持不变。如图 19-4 所示，如果将图中位于不同端口的理想电压源和理想电流表互换位置，电流表的读数保持不变，则该二端口网络是互易网络。对于满足 $\mathbf{z}_{12}=\mathbf{z}_{21}$ 的互易二端口网络而言，根据（19-1）式，对于图 19-4a 所示接法的互易网络，则有 $\mathbf{V}=\mathbf{z}_{12}\mathbf{I}$。对于图 19-4b 所示接法的互易网络，则有 $\mathbf{V}=\mathbf{z}_{21}\mathbf{I}$。如果一个二端口网络全部由电阻、电容和电感构成，则该网络必然是互易网络。对于一个互易网络，可以用图 19-5a 所示的 T 形电路来等效。对于非互易网络，其一般的等效电路如图 19-5b 所示。该等效电路可由式（19-1）得到。

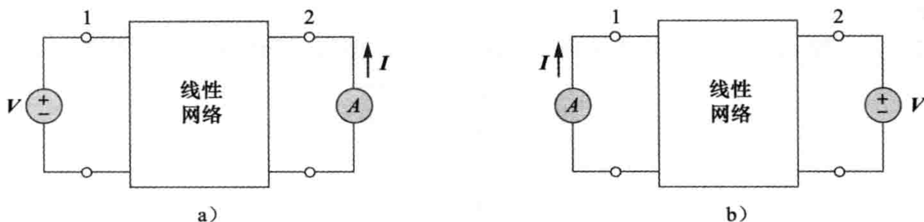


图 19-4 互易二端口网络中一个端口处的电压源与另外一个端口处的理想电流表互换位置，电表的读数完全相同

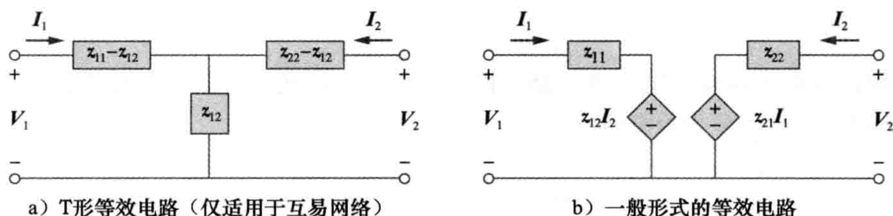


图 19-5 互易网络

还应该说明的是，某些二端口网络不存在 $\mathbf{z}$ 参数，这是因为该网络不能由式（19-1）来描述。例如，对于图 19-6 所示的理想变压器，其二端口网络方程为

$$\mathbf{V}_1 = \frac{1}{n}\mathbf{V}_2, \quad \mathbf{I}_1 = -n\mathbf{I}_2 \tag{19-7}$$

显然，不能像式（19-1）那样利用电流表示电压，反之亦然。因此，理想变压器不存在 $\mathbf{z}$ 参数，但它的混合参数存在，相关内容将在 19-4 节介绍。

例 19-1 确定图 19-7 所示电路的 $\mathbf{z}$ 参数。

解： 方法 1：如图 19-8a 所示，在输入端口处加一个电压源 $\mathbf{V}_1$，并使输出端开路，则可得到 $\mathbf{z}_{11}$ 和 $\mathbf{z}_{21}$，

$$\mathbf{z}_{11} = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} = \frac{(20+40)\mathbf{I}_1}{\mathbf{I}_1} = 60(\Omega)$$

其中，$\mathbf{z}_{11}$是端口 1 处的输入阻抗。

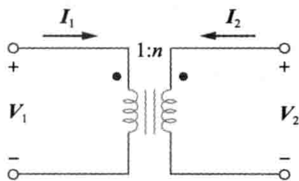


图 19-6 理想变压器不存在 $\mathbf{z}$ 参数

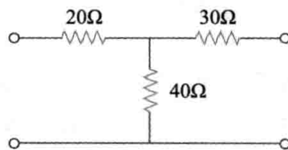


图 19-7 例 19-1 的电路原理图

$$\mathbf{z}_{21} = \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_1} = \frac{40\mathbf{I}_1}{\mathbf{I}_1} = 40(\Omega)$$

同理，如图 19-8b 所示，在输出端口处加一个电压源 $\mathbf{V}_2$，并使输入端开路，则可得到 $\mathbf{z}_{12}$ 和 $\mathbf{z}_{22}$。

$$\mathbf{z}_{12} = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_2} = \frac{40\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_2} = 40\Omega, \quad \mathbf{z}_{22} = \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_2} = \frac{(30+40)\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_2} = 70(\Omega)$$

其中，$\mathbf{z}_{22}$是端口 2 的输出阻抗。因此有

$$[\mathbf{z}] = \begin{bmatrix} 60\Omega & 40\Omega \\ 40\Omega & 70\Omega \end{bmatrix}$$

方法 2：因为已知电路中没有受控源，所以有 $z_{12}=z_{21}$，根据图 19-5a 所示的 T 形电路，将图 19-7 和 19-5a 进行比较，得到：

$$z_{12}=40\Omega=z_{21}$$

$$z_{11}-z_{12}=20 \quad \Rightarrow \quad z_{11}=20+z_{12}=60(\Omega)$$

$$z_{22}-z_{12}=30 \quad \Rightarrow \quad z_{22}=30+z_{12}=70(\Omega)$$

◀

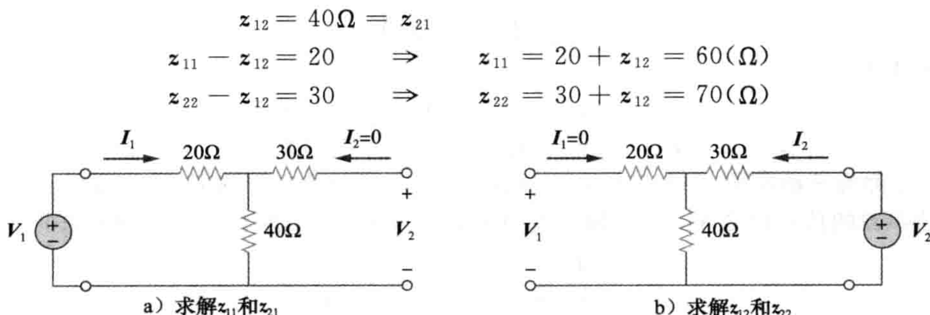


图 19-8　例 19-1

练习 19-1　求解图 19-9 所示二端口网络的 z 参数。

答案： $z_{11}=14\Omega$；$z_{12}=z_{21}=z_{22}=6\Omega$

例 19-2　求图 19-10 所示电路的 $\boldsymbol{I}_1$ 和 $\boldsymbol{I}_2$

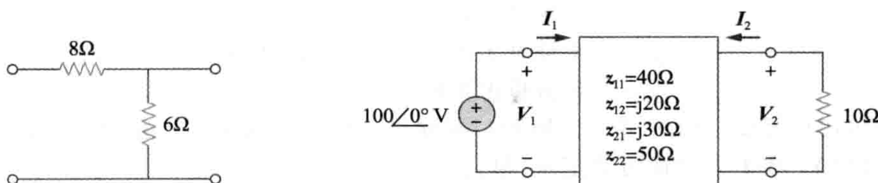


图 19-9　练习 19-1 的电路原理图　　图 19-10　例 19-2 的电路原理图

解： 因为 z_{12} 与 z_{21} 不相等，因此该网络不是互易网络。可以用图 19-5b 所示等效电路来求解，也可以直接使用式（19-1）来计算。将已知的 z 参数带入式（19-1），得到：

$$\boldsymbol{V}_1=40\boldsymbol{I}_1+\mathrm{j}20\boldsymbol{I}_2 \tag{19-2-1}$$

$$\boldsymbol{V}_2=\mathrm{j}30\boldsymbol{I}_1+50\boldsymbol{I}_2 \tag{19-2-2}$$

因为待求的是电流 $\boldsymbol{I}_1$ 和 $\boldsymbol{I}_2$，将以下两电压

$$\boldsymbol{V}_1=100\underline{/0^\circ},\quad \boldsymbol{V}_2=-10\boldsymbol{I}_2$$

代入式（19-2-1）和式（19-2-2），得到：

$$100=40\boldsymbol{I}_1+\mathrm{j}20\boldsymbol{I}_2 \tag{19-2-3}$$

$$-10\boldsymbol{I}_2=\mathrm{j}30\boldsymbol{I}_1+50\boldsymbol{I}_2,\quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{I}_1=\mathrm{j}2\boldsymbol{I}_2 \tag{19-2-4}$$

将式（19-2-4）代入式（19-2-3），得到：

$$100=\mathrm{j}80\boldsymbol{I}_2+\mathrm{j}20\boldsymbol{I}_2\Rightarrow\boldsymbol{I}_2=\frac{100}{\mathrm{j}100}=-\mathrm{j}$$

由式（19-2-4）可得：

$$\boldsymbol{I}_1=\mathrm{j}2(-\mathrm{j})=2$$

因此，

$$\boldsymbol{I}_1=2\underline{/0^\circ}\mathrm{A},\quad \boldsymbol{I}_2=1\underline{/-90^\circ}(\mathrm{A})$$ ◀

练习 19-2　计算图 19-11 所示二端口网络的 $\boldsymbol{I}_1$ 和 $\boldsymbol{I}_2$。

答案： $2\underline{/20^\circ}(\mathrm{A})$；$1\underline{/-60^\circ}(\mathrm{A})$

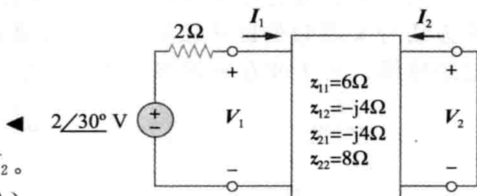


图 19-11　练习 19-2 的电路原理图

19.3　导纳参数

利用网络的端口电压表示端口电流，可以得到第二组网络参数。如图 19-2a 或 b 所示，

用端口电压表示端口电流，得到：

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{I}_1 &= \mathbf{y}_{11}\mathbf{V}_1 + \mathbf{y}_{12}\mathbf{V}_2 \\ \mathbf{I}_2 &= \mathbf{y}_{21}\mathbf{V}_1 + \mathbf{y}_{22}\mathbf{V}_2 \end{aligned}} \tag{19-8}$$

其矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11} & \mathbf{y}_{12} \\ \mathbf{y}_{21} & \mathbf{y}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{y}]\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} \tag{19-9}$$

上式中，y 称为导纳参数（admittance parameters）（或简称为 y 参数），其单位是西门子。

导纳参数的值可以令 $\mathbf{V}_1=0$（输入端口短路）或 $\mathbf{V}_2=0$（输出端口短路）来得到：

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{y}_{11} &= \left.\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{V}_1}\right|_{\mathbf{V}_2=0}, \quad \mathbf{y}_{12} = \left.\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{V}_2}\right|_{\mathbf{V}_1=0} \\ \mathbf{y}_{21} &= \left.\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{V}_1}\right|_{\mathbf{V}_2=0}, \quad \mathbf{y}_{22} = \left.\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{V}_2}\right|_{\mathbf{V}_1=0} \end{aligned}} \tag{19-10}$$

由于 y 参数可以由输入或输出端口短路求得，所以也称其为短路导纳参数（short-circuit admittance parameter）

$$\mathbf{y}_{11} = \text{短路输入导纳} \tag{19-11a}$$

$$\mathbf{y}_{12} = \text{由端口 2 到端口 1 的短路转移导纳} \tag{19-11b}$$

$$\mathbf{y}_{21} = \text{由端口 1 到端口 2 的短路转移导纳} \tag{19-11c}$$

$$\mathbf{y}_{22} = \text{短路输出导纳} \tag{19-11d}$$

由式（19-10）可知，如图 19-12a 所示，在端口 2 短路的情况下，在端口 1 处接入电流源 $\mathbf{I}_1$，可求出 $\mathbf{V}_1$ 和 $\mathbf{I}_2$，进而可确定 $\mathbf{y}_{11}$ 和 $\mathbf{y}_{21}$：

$$\mathbf{y}_{11} = \mathbf{I}_1/\mathbf{V}_1, \quad \mathbf{y}_{21} = \mathbf{I}_2/\mathbf{V}_1 \tag{19-12}$$

采用类似的方法，使端口 1 短路，在端口处接入电流源 $\mathbf{I}_2$，求出 $\mathbf{I}_1$ 和 $\mathbf{V}_2$，即可确定 $\mathbf{y}_{12}$ 和 $\mathbf{y}_{22}$：

$$\mathbf{y}_{12} = \mathbf{I}_1/\mathbf{V}_2, \quad \mathbf{y}_{22} = \mathbf{I}_2/\mathbf{V}_2 \tag{19-13}$$

上述过程提供了一种计算或测量 $\mathbf{y}$ 参数的方法。阻抗参数和导纳参数统称为导抗（immittance）参数。

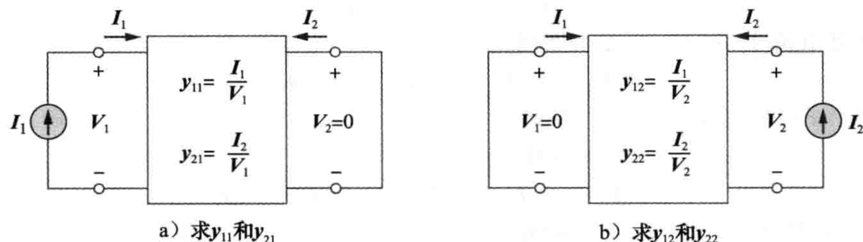


图 19-12　测量 $\mathbf{y}$ 参数的方法

对于不含有受控源的线性二端口网络，其两个转移阻抗参数相等（即 $\mathbf{y}_{12}=\mathbf{y}_{21}$），其证明方法与 $\mathbf{z}$ 参数的证法相同。一个互易网络（$\mathbf{y}_{12}=\mathbf{y}_{21}$）可以用图 19-13a 所示的Ⅱ形等效电路建模。对于非互易网络，更为一般化的等效网络如图 19-13b 所示。

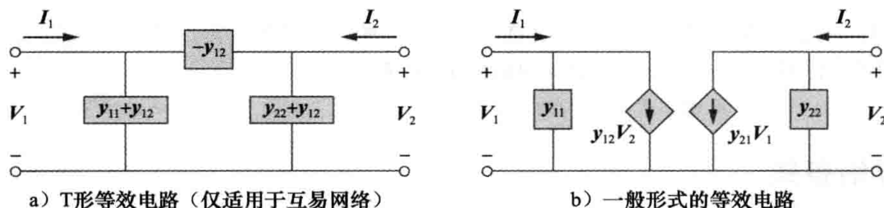


图 19-13　非互易网络

例 19-3 计算图 19-14 所示Ⅱ形网络的 y 参数。

解：方法 1： 为求 $\boldsymbol{y}_{11}$ 和 $\boldsymbol{y}_{21}$，需将输出端口断路，并在输入端口处接入一个电流源 $\boldsymbol{I}_1$，如图 19-15a 所示。此时，8Ω 电阻被短路，2Ω 电阻和 4Ω 电阻并联，所以

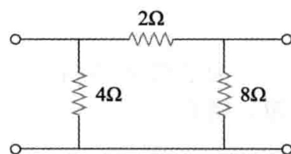
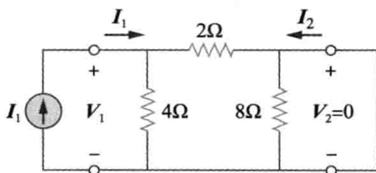


图 19-14 例 19-3 的电路原理图

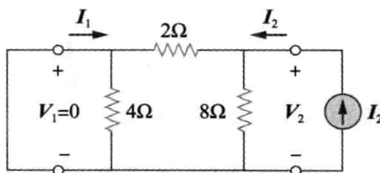
$$\boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{I}_1(4 \,/\!/\, 2) = \frac{4}{3}\boldsymbol{I}_1, \quad \boldsymbol{y}_{11} = \frac{\boldsymbol{I}_1}{\boldsymbol{V}_1} = \frac{\boldsymbol{I}_1}{\frac{4}{3}\boldsymbol{I}_1} = 0.75(\text{S})$$

根据分流原理，得到

$$-\boldsymbol{I}_2 = \frac{4}{4+2}\boldsymbol{I}_1 = \frac{2}{3}\boldsymbol{I}_1, \quad \boldsymbol{y}_{21} = \frac{\boldsymbol{I}_2}{\boldsymbol{V}_1} = \frac{-\frac{2}{3}\boldsymbol{I}_1}{\frac{4}{3}\boldsymbol{I}_1} = -0.5(\text{S})$$



a）求 y_{11} 和 y_{21} 的电路图



b）求 y_{12} 和 y_{22} 的电路图

图 19-15 例 19-3 的电路图

为了求 $\boldsymbol{y}_{12}$ 和 $\boldsymbol{y}_{22}$，需将输入端口短路，并在输出端口处接入一个电流源 $\boldsymbol{I}_2$，如图 19-15b 所示。此时 4Ω 电阻被短路，2Ω 电阻和 8Ω 电阻相并联，则有

$$\boldsymbol{V}_2 = \boldsymbol{I}_2(8 \,/\!/\, 2) = \frac{8}{5}\boldsymbol{I}_2, \quad \boldsymbol{y}_{22} = \frac{\boldsymbol{I}_2}{\boldsymbol{V}_2} = \frac{\boldsymbol{I}_2}{\frac{8}{5}\boldsymbol{I}_2} = \frac{5}{8} = 0.625(\text{S})$$

根据分流原理，得到

$$-\boldsymbol{I}_1 = \frac{8}{8+2}\boldsymbol{I}_2 = \frac{4}{5}\boldsymbol{I}_2, \quad \boldsymbol{y}_{12} = \frac{\boldsymbol{I}_1}{\boldsymbol{V}_2} = \frac{-\frac{4}{5}\boldsymbol{I}_2}{\frac{8}{5}\boldsymbol{I}_2} = -0.5(\text{S})$$

方法 2： 比较图 19-14 与 19-13a，得到

$$\boldsymbol{y}_{12} = -\frac{1}{2}\text{S} = \boldsymbol{y}_{21}$$

$$\boldsymbol{y}_{11} + \boldsymbol{y}_{12} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{y}_{11} = 0.5 - \boldsymbol{y}_{12} = 0.75(\text{S})$$

$$\boldsymbol{y}_{22} + \boldsymbol{y}_{12} = \frac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{y}_{22} = \frac{1}{8} - \boldsymbol{y}_{12} = 0.625(\text{S})$$

与方法 1 的结果一样。 ◀

练习 19-3 计算图 19-16 所示 T 形网络的 y 参数。

答案： $\boldsymbol{y}_{11}=0.2773\text{S}$；$\boldsymbol{y}_{12}=\boldsymbol{y}_{21}=-0.0909\text{S}$；$\boldsymbol{y}_{22}=0.1364\text{S}$

例 19-4 确定图 19-17 所示二端口网络的 y 参数，并表示为 s 的函数（$s=\text{j}\omega$）。

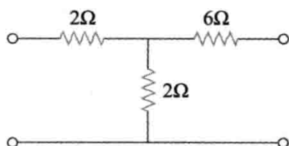


图 19-16 练习 19-3 的电路原理图

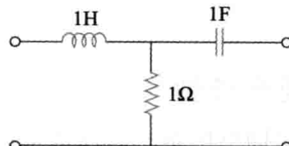


图 19-17 例 19-4 的电路原理图

解： 本题的求解过程与上一例方法相同。但首先将电路转换到频域

$$1\text{H} \Rightarrow \mathrm{j}\omega L = sL = s$$

$$1\text{F} \Rightarrow \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} = \frac{1}{sC} = \frac{1}{s}$$

为了求 $\boldsymbol{y}_{11}$ 和 $\boldsymbol{y}_{12}$，使用图 19-18a 所示电路，即端口 2 短路，在端口 1 处接入一个电流源，则有

$$\boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{I}_1\left(s + 1 \,/\!/\, \frac{1}{s}\right) = \boldsymbol{I}_1\left(s + \frac{1}{s+1}\right) = \boldsymbol{I}_1\left(\frac{s^2+s+1}{s+1}\right)$$

$$\boldsymbol{y}_{11} = \frac{\boldsymbol{I}_1}{\boldsymbol{V}_1} = \frac{s+1}{s^2+s+1}$$

使用分流原理，得到

$$\boldsymbol{I}_2 = -\frac{1}{1+1/s}\boldsymbol{I}_1 = -\frac{s}{s+1}\boldsymbol{I}_1$$

$$\boldsymbol{y}_{21} = \frac{\boldsymbol{I}_2}{\boldsymbol{V}_1} = -\frac{s}{s^2+s+1}$$

同理，根据图 19-18b 计算 $\boldsymbol{y}_{12}$ 和 $\boldsymbol{y}_{22}$：

$$\boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{I}_2\left(\frac{1}{s} + 1 \,/\!/\, s\right) = \boldsymbol{I}_2\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right) = \frac{s^2+s+1}{s(s+1)}\boldsymbol{I}_2$$

$$\boldsymbol{y}_{22} = \frac{\boldsymbol{I}_2}{\boldsymbol{V}_2} = \frac{s(s+1)}{s^2+s+1}$$

使用分流原理，得到

$$\boldsymbol{I}_1 = -\boldsymbol{I}_2\frac{1}{s+1}$$

$$\boldsymbol{y}_{12} = \frac{\boldsymbol{I}_1}{\boldsymbol{V}_2} = -\frac{1}{s+1}\,\frac{s(s+1)}{s^2+s+1} = -\frac{s}{s^2+s+1}$$

因此，

$$[\boldsymbol{y}] = \begin{bmatrix} \dfrac{s+1}{s^2+s+1} & -\dfrac{s}{s^2+s+1} \\ -\dfrac{s}{s^2+s+1} & \dfrac{s(s+1)}{s^2+s+1} \end{bmatrix}$$

◀

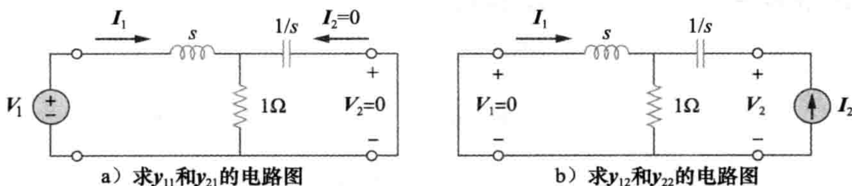


图 19-18 例 19-4 的求解

练习 19-4 求解图 19-19 所示梯形网络的 y 参数，并表示成为 s 的函数。

答案： $[\boldsymbol{y}] = \begin{bmatrix} \dfrac{s+1}{s(s+2)} & \dfrac{-1}{s(s+2)} \\ -\dfrac{-1}{s(s+2)} & \dfrac{s^2+3s+1}{s(s+2)} \end{bmatrix}$

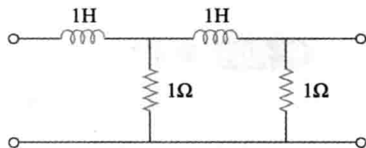


图 19-19 练习 19-4 的电路图

19.4 混合参数

二端口网络的第三套参数是以 $\boldsymbol{V}_1$ 和 $\boldsymbol{I}_2$ 作为受控变量的，即有：

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{V}_1 &= \boldsymbol{h}_{11}\boldsymbol{I}_1 + \boldsymbol{h}_{12}\mathbf{V}_2 \\ \boldsymbol{I}_2 &= \boldsymbol{h}_{21}\boldsymbol{I}_1 + \boldsymbol{h}_{22}\mathbf{V}_2\end{aligned}} \tag{19-14}$$

其矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_1 \\ \boldsymbol{I}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{h}_{11} & \boldsymbol{h}_{12} \\ \boldsymbol{h}_{21} & \boldsymbol{h}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_1 \\ \mathbf{V}_2\end{bmatrix} = [\boldsymbol{h}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_1 \\ \mathbf{V}_2\end{bmatrix} \tag{19-15}$$

上式中的 $\boldsymbol{h}$ 项称为混合参数（hybrid parameters）（或简称为 h 参数），因为这组参数是由电压和电流之间的比例混合组合。h 参数在描述如晶体管之类的电子器件时非常有用（参见 19-8 节）。对于这类器件，采用实验方法测量 h 参数要比测量 z 参数或 y 参数容易的多。实际上，式（19-7）描述的图 19-6 所示的理想变压器并不存在 z 参数，但是由于式（19-7）和式（19-14）形式一致，所以可以用混合参数来描述理想变压器。

h 参数的值可以按下式确定

$$\boxed{\begin{aligned}\boldsymbol{h}_{11} &= \frac{\mathbf{V}_1}{\boldsymbol{I}_1}\bigg|_{\mathbf{V}_2=0}, \quad \boldsymbol{h}_{12} = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{V}_2}\bigg|_{\boldsymbol{I}_1=0} \\ \boldsymbol{h}_{21} &= \frac{\boldsymbol{I}_2}{\boldsymbol{I}_1}\bigg|_{\mathbf{V}_2=0}, \quad \boldsymbol{h}_{22} = \frac{\boldsymbol{I}_2}{\mathbf{V}_1}\bigg|_{\boldsymbol{I}_1=0}\end{aligned}} \tag{19-16}$$

由式（19-16）显然可见，$\boldsymbol{h}_{11}$、$\boldsymbol{h}_{12}$、$\boldsymbol{h}_{21}$ 和 $\boldsymbol{h}_{22}$ 分别表示阻抗、电压增益、电流增益和导纳，因而称之为混合参数。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{h}_{11} &= \text{短路输入阻抗} \\ \boldsymbol{h}_{12} &= \text{开路反向电压增益} \\ \boldsymbol{h}_{21} &= \text{短路前向电流增益} \\ \boldsymbol{h}_{22} &= \text{开路输出导纳}\end{aligned} \tag{19-17}$$

计算 h 参数的过程与计算 z 参数或 y 参数的过程类似。根据所要计算的参数，在适当的端口处施加电压源或电流源，同时将另一个端口短路或开路，并进行常规的电路分析即可。对于互易网络，有 $\boldsymbol{h}_{12} = -\boldsymbol{h}_{21}$，其证明方法与 $\boldsymbol{z}_{12} = \boldsymbol{z}_{21}$ 的方法相同。图 19-20 给出了二端口网络的混合模型。

例 19-5 计算图 19-21 所示二端口网络的混合参数。

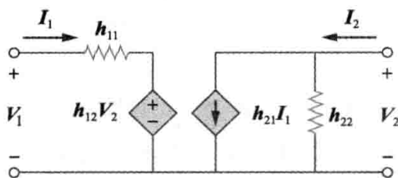


图 19-20　二端口网络 $\boldsymbol{h}$ 参数的等效网络

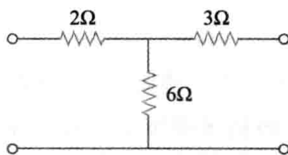


图 19-21　例 19-5 的电路原理图

解：为求 $\boldsymbol{h}_{11}$ 和 $\boldsymbol{h}_{21}$，将输出端口短路，并在输入端口处接入一个电流源 $\boldsymbol{I}_1$，如图 19-22a 所示。由图 19-22a 可知

$$\mathbf{V}_1 = \boldsymbol{I}_1(2 + 3 \,/\!/\, 6) = 4\boldsymbol{I}_1$$

因此

$$\boldsymbol{h}_{11} = \mathbf{V}_1/\boldsymbol{I}_1 = 4(\Omega)$$

另外根据图 19-22a，使用分流原理，得到

$$-\boldsymbol{I}_2 = \frac{6}{6+3}\boldsymbol{I}_1 = \frac{2}{3}\boldsymbol{I}_1$$

因此，

$$h_{21} = \frac{I_2}{I_1} = -\frac{2}{3}$$

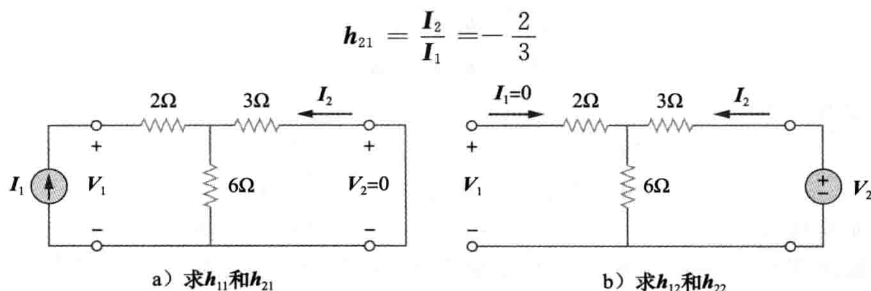


图 19-22 例 19-5 的电路图

为求 h_{12} 和 h_{22}，将输入端口开路，并在输出端口接入一个电压源 V_2，如图 19-22b 所示。使用分压原理，得到

$$V_1 = \frac{6}{6+3}V_2 = \frac{2}{3}V_2$$

因此，

$$h_{12} = V_1/V_2 = \frac{2}{3}$$

另外，

$$V_2 = (3+6)I_2 = 9I_2$$

于是，

$$h_{22} = \frac{I_2}{V_2} = \frac{1}{9}(\mathrm{S})$$ ◀

练习 19-5 确定图 19-23 所示电路的 h 参数。

答案： $h_{11}=1.2\Omega$；$h_{12}=0.4$；$h_{21}=-0.4$；$h_{22}=0.4\mathrm{S}$

例 19-6 确定图 19-24 所示电路从输出端口看进去的戴维南等效电路。

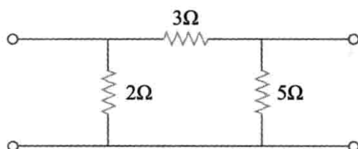


图 19-23 练习 19-5 的电路原理图

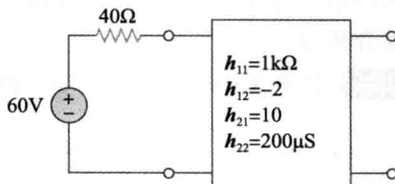


图 19-24 例 19-6 的电路原理图

解： 根据求戴维南等效电路的一般过程求解本题，并使用 h 参数模型中描述输入端口和输出端口之间关系的公式。为了求 Z_{Th}，需将输入端口处的 60V 电压源短路，并在输出端口处接入一个 1V 的电压源，如图 19-25a 所示。由式（19-14）得到：

$$V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \tag{19-6-1}$$

$$I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2 \tag{19-6-2}$$

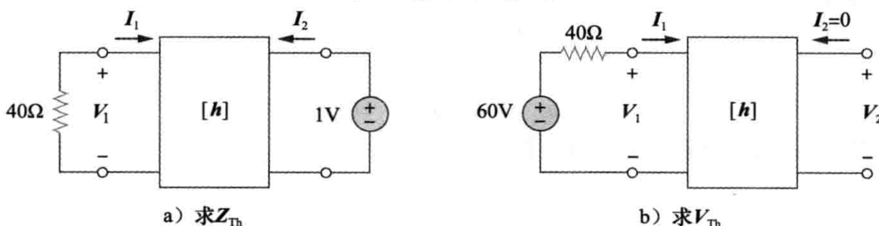


图 19-25 例 19-6 的求解

而

$$\mathbf{V}_2 = 1, \quad \mathbf{V}_1 = -40\mathbf{I}_1$$

将其带入式（19-6-1）和式（19-6-2），我们得到：

$$-40\mathbf{I}_1 = \mathbf{h}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{12} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{I}_1 = -\frac{\mathbf{h}_{12}}{40 + \mathbf{h}_{11}} \tag{19-6-3}$$

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{h}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{22} \tag{19-6-4}$$

将式（19-6-3）代入（19-6-4），得到：

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{h}_{22} - \frac{\mathbf{h}_{21}\mathbf{h}_{12}}{\mathbf{h}_{11} + 40} = \frac{\mathbf{h}_{11}\mathbf{h}_{22} - \mathbf{h}_{21}\mathbf{h}_{12} + \mathbf{h}_{22}40}{\mathbf{h}_{11} + 40}$$

因此：

$$\mathbf{Z}_{\mathrm{Th}} = \mathbf{V}_2/\mathbf{I}_2 = 1/\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{h}_{11} + 40}{\mathbf{h}_{11}\mathbf{h}_{22} - \mathbf{h}_{21}\mathbf{h}_{12} + \mathbf{h}_{22}40}$$

将 h 参数的值带入，得到：

$$\mathbf{Z}_{\mathrm{Th}} = \frac{1000 + 40}{10^3 \times 200 \times 10^{-6} + 20 + 40 \times 200 \times 10^{-6}} = \frac{1040}{20.21} = 51.46(\Omega)$$

为了得到 $\mathbf{V}_{\mathrm{Th}}$，需求出图 19-25b 所示的开路电压 $\mathbf{V}_2$。在输入端口有

$$-60 + 40\mathbf{I}_1 + \mathbf{V}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V}_1 = 60 - 40\mathbf{I}_1 \tag{19-6-5}$$

在输出端口有

$$\mathbf{I}_2 = 0 \tag{19-6-6}$$

将式（19-6-5）和（19-6-6）代入式（19-6-1）和式（19-6-2），得到：

$$60 - 40\mathbf{I}_1 = \mathbf{h}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{12}\mathbf{V}_2$$

或

$$60 = (\mathbf{h}_{11} + 40)\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{12}\mathbf{V}_2 \tag{19-6-7}$$

和

$$0 = \mathbf{h}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{22}\mathbf{V}_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{I}_1 = -\frac{\mathbf{h}_{22}}{\mathbf{h}_{21}}\mathbf{V}_2 \tag{19-6-8}$$

将式（19-6-8）代入式（19-6-7），得到

$$60 = \left[-(\mathbf{h}_{11} + 40)\frac{\mathbf{h}_{22}}{\mathbf{h}_{21}} + \mathbf{h}_{12}\right]\mathbf{V}_2$$

或

$$\mathbf{V}_{\mathrm{Th}} = \mathbf{V}_2 = \frac{60}{-(\mathbf{h}_{11} + 40)\mathbf{h}_{22}/\mathbf{h}_{21} + \mathbf{h}_{12}} = \frac{60\mathbf{h}_{21}}{\mathbf{h}_{12}\mathbf{h}_{21} - \mathbf{h}_{11}\mathbf{h}_{22} - 40\mathbf{h}_{22}}$$

将 h 参数代入上式，结果是：

$$\mathbf{V}_{\mathrm{Th}} = \frac{60 \times 10}{-20.21} = -29.69(\mathrm{V})$$

◀

练习 19-6　求图 19-26 所示电路的输入导纳。

答案： 1667Ω

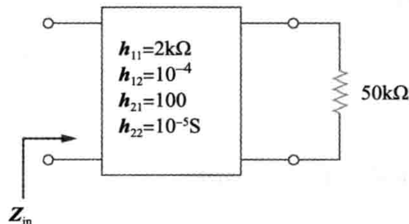


图 19-26　练习 19-6 的电路原理图

†19.5　各参数之间的关系

前几节介绍的三组参数描述的都是同一个二端口网络的输入端和输出端变量之间的关系，所以它们之间能够相互换算。如果存在两组参数，则可由一组参数得到另外一组参数。下面用两个例子来说明这一过程。

第一个例子，已知 z 参数，确定 y 参数。由式（19-2）得到：

$$\begin{bmatrix}\mathbf{V}_1\\ \mathbf{V}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{z}_{11} & \mathbf{z}_{12}\\ \mathbf{z}_{21} & \mathbf{z}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{I}_1\\ \mathbf{I}_2\end{bmatrix} = [\mathbf{z}]\begin{bmatrix}\mathbf{I}_1\\ \mathbf{I}_2\end{bmatrix} \tag{19-18}$$

或，

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_1 \\ \boldsymbol{I}_2 \end{bmatrix} = [\boldsymbol{z}]^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_1 \\ \boldsymbol{V}_2 \end{bmatrix} \tag{19-19}$$

另外，由式（19-19）得到

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_1 \\ \boldsymbol{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_{11} & \boldsymbol{y}_{12} \\ \boldsymbol{y}_{21} & \boldsymbol{y}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_1 \\ \boldsymbol{V}_2 \end{bmatrix} = [\boldsymbol{y}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_1 \\ \boldsymbol{V}_2 \end{bmatrix} \tag{19-20}$$

比较式（19-19）和式（19-20），可知

$$[\boldsymbol{y}] = [\boldsymbol{z}]^{-1} \tag{19-21}$$

矩阵 $[\boldsymbol{z}]$ 的伴随矩阵是

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_{22} & -\boldsymbol{z}_{12} \\ -\boldsymbol{z}_{21} & \boldsymbol{z}_{11} \end{bmatrix} \tag{19-22}$$

其行列式为

$$\Delta_z = \boldsymbol{z}_{11}\boldsymbol{z}_{22} - \boldsymbol{z}_{12}\boldsymbol{z}_{21}$$

代入到式（19-21），得到

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_{11} & \boldsymbol{y}_{12} \\ \boldsymbol{y}_{21} & \boldsymbol{y}_{22} \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_{22} & -\boldsymbol{z}_{12} \\ -\boldsymbol{z}_{21} & \boldsymbol{z}_{11} \end{bmatrix}}{\Delta_z} \tag{19-23}$$

根据对应项相等，得到

$$\boldsymbol{y}_{11} = \frac{\boldsymbol{z}_{22}}{\Delta_z}, \quad \boldsymbol{y}_{12} = \frac{\boldsymbol{z}_{12}}{\Delta_z}, \quad \boldsymbol{y}_{21} = \frac{\boldsymbol{z}_{21}}{\Delta_z}, \quad \boldsymbol{y}_{22} = \frac{\boldsymbol{z}_{11}}{\Delta_z} \tag{19-24}$$

第二个例子：已知 z 参数，确定 h 参数。从式（19-1）得到

$$\boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{z}_{11}\boldsymbol{I}_1 + \boldsymbol{z}_{12}\boldsymbol{I}_2 \tag{19-25a}$$

$$\boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{z}_{21}\boldsymbol{I}_1 + \boldsymbol{z}_{22}\boldsymbol{I}_2 \tag{19-25b}$$

由式（19-25b），得到

$$\boldsymbol{I}_2 = -\frac{\boldsymbol{z}_{21}}{\boldsymbol{z}_{22}}\boldsymbol{I}_1 + \frac{1}{\boldsymbol{z}_{22}}\boldsymbol{V}_2 \tag{19-26}$$

将其代入式（19-25a），得到

$$\boldsymbol{V}_1 = \frac{\boldsymbol{z}_{11}\boldsymbol{z}_{22} - \boldsymbol{z}_{12}\boldsymbol{z}_{21}}{\boldsymbol{z}_{22}}\boldsymbol{I}_1 + \frac{\boldsymbol{z}_{12}}{\boldsymbol{z}_{22}}\boldsymbol{V}_2 \tag{19-27}$$

将式（19-26）和式（19-27）转换为矩阵形式，有

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_1 \\ \boldsymbol{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\Delta_Z}{\boldsymbol{z}_{22}} & \dfrac{\boldsymbol{z}_{12}}{\boldsymbol{z}_{22}} \\ -\dfrac{\boldsymbol{z}_{21}}{\boldsymbol{z}_{22}} & \dfrac{1}{\boldsymbol{z}_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_1 \\ \boldsymbol{V}_2 \end{bmatrix} \tag{19-28}$$

由式（19-15）可知，

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_1 \\ \boldsymbol{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{h}_{11} & \boldsymbol{h}_{12} \\ \boldsymbol{h}_{21} & \boldsymbol{h}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_1 \\ \boldsymbol{V}_2 \end{bmatrix} = [\boldsymbol{h}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_1 \\ \boldsymbol{V}_2 \end{bmatrix} \tag{19-29}$$

比较式（19-28）和式（19-29），可得

$$\boldsymbol{h}_{11} = \frac{\Delta_z}{\boldsymbol{z}_{22}}, \quad \boldsymbol{h}_{12} = \frac{\boldsymbol{z}_{12}}{\boldsymbol{z}_{22}}, \quad \boldsymbol{h}_{21} = \frac{\boldsymbol{z}_{21}}{\boldsymbol{z}_{22}}, \quad \boldsymbol{h}_{22} = \frac{1}{\boldsymbol{z}_{22}} \tag{19-30}$$

表 19-1 给出了二端口网络三组参数之间的转换公式。已知其中任意一组参数，就可以利用表 19-1 求出其他两组参数。例如，已知 h 参数，我们可以从第二行，第三列找到

对应的 y 参数。另外，如果已知 $\boldsymbol{z}_{21}=\boldsymbol{z}_{12}$ 为互易网络的条件，则可利用该表确定使用其他参数表示互易网络的条件。

表 19-1 二端口各参数之间的转换关系

	$\boldsymbol{z}$	$\boldsymbol{y}$	$\boldsymbol{h}$
$\boldsymbol{z}$	$\begin{matrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{y_{22}}{\Delta_y} & -\frac{y_{12}}{\Delta_y} \\ -\frac{y_{21}}{\Delta_y} & \frac{y_{11}}{\Delta_y} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta_h}{h_{22}} & \frac{h_{12}}{h_{22}} \\ -\frac{h_{21}}{h_{22}} & \frac{1}{h_{22}} \end{matrix}$
$\boldsymbol{y}$	$\begin{matrix} \frac{z_{22}}{\Delta_z} & -\frac{z_{12}}{\Delta_z} \\ -\frac{z_{21}}{\Delta_z} & \frac{z_{11}}{\Delta_z} \end{matrix}$	$\begin{matrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{h_{11}} & -\frac{h_{12}}{h_{11}} \\ \frac{h_{21}}{h_{11}} & \frac{\Delta_h}{h_{11}} \end{matrix}$
$\boldsymbol{h}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta_z}{z_{22}} & \frac{z_{12}}{z_{22}} \\ -\frac{z_{21}}{z_{22}} & \frac{1}{z_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{y_{11}} & -\frac{y_{12}}{y_{11}} \\ \frac{y_{21}}{y_{11}} & \frac{\Delta_y}{y_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{matrix}$

$\Delta_z=z_{11}z_{22}-z_{12}z_{21}$

$\Delta_y=y_{11}y_{22}-y_{12}y_{21}$

$\Delta_h=h_{11}h_{22}-h_{12}y_{21}$

例 19-7 已知某二端口网络的 h 参数矩阵。

$$[\boldsymbol{h}]=\begin{bmatrix} 20\Omega & 3 \\ -2 & 0.01\mathrm{S} \end{bmatrix}$$

试求该网络的 $[\boldsymbol{z}]$

解： 根据 $[\boldsymbol{h}]$，得到其行列式的值为

$$\Delta_h = 20\times 0.01 - 3\times(-2) = 6.2$$

所以，从表 19-1 可得

$$[\boldsymbol{z}]=\begin{bmatrix} \dfrac{\Delta_h}{\boldsymbol{h}_{22}} & \dfrac{\boldsymbol{h}_{21}}{\boldsymbol{h}_{22}} \\ -\dfrac{\boldsymbol{h}_{21}}{\boldsymbol{h}_{22}} & \dfrac{1}{\boldsymbol{h}_{22}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{6.2}{0.01} & \dfrac{3}{0.01} \\ \dfrac{2}{0.01} & \dfrac{1}{0.01} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 620 & 300 \\ 200 & 100 \end{bmatrix}$$

因此，$\boldsymbol{z}_{11}=620\Omega$，$\boldsymbol{z}_{12}=300\Omega$，$\boldsymbol{z}_{21}=200\Omega$，$\boldsymbol{z}_{22}=100\Omega$ ◀

练习 19-7 已知某个二端口网络的 $[\boldsymbol{z}]$，

$$[\boldsymbol{z}]=\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}\Omega$$

求 $[\boldsymbol{y}]$。

答案： $[\boldsymbol{y}]=\begin{bmatrix} 0.3 & -0.2 \\ -0.2 & 0.3 \end{bmatrix}\mathrm{S}$

19.6 二端口网络的互联

为了便于分析和设计，可以将一个大型复杂网络划分为若干个子网络，并使用二端口网络模型对这些子网络进行建模。因此，可以将二端口网络看作是构成复杂网络的基本模块。二端口网络之间的连接方式可以是串联、并联或级联。可以使用本章介绍的三组参数中的任意一组来描述相互连接的二端口网络。但对于不同的连接方式采用特定的参数会具有明显的优势。例如对于串联网络情况，各子网络的 z 参数相加即可得到较大网络的 z 参数。

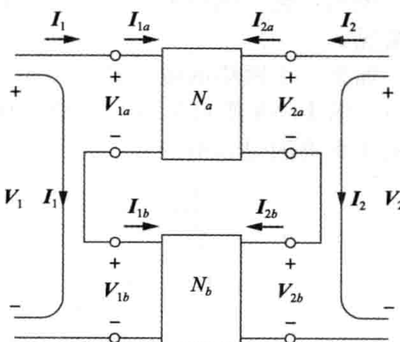


图 19-27 两个二端口网络的串联

图 19-27 所示为两个二端口网络的串联。之所以认为这两个网络是串联的，是因为这两个网络的输入电流相同，端口电压相加。对于网络 N_a，有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V}_{1a} &= \boldsymbol{z}_{11a}\boldsymbol{I}_{1a}+\boldsymbol{z}_{12a}\boldsymbol{I}_{2a} \\ \boldsymbol{V}_{2a} &= \boldsymbol{z}_{21a}\boldsymbol{I}_{1a}+\boldsymbol{z}_{22a}\boldsymbol{I}_{2a} \end{aligned} \tag{19-31}$$

对于网络 N_b，有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V}_{1b} &= \boldsymbol{z}_{11b}\boldsymbol{I}_{1b}+\boldsymbol{z}_{12b}\boldsymbol{I}_{2b} \\ \boldsymbol{V}_{2b} &= \boldsymbol{z}_{21b}\boldsymbol{I}_{1b}+\boldsymbol{z}_{22b}\boldsymbol{I}_{2b} \end{aligned} \tag{19-32}$$

由图 19-27 观察到

$$\boldsymbol{I}_1=\boldsymbol{I}_{1a}=\boldsymbol{I}_{1b} \tag{19-33a}$$

$$\boldsymbol{I}_2=\boldsymbol{I}_{2a}=\boldsymbol{I}_{2b} \tag{19-33b}$$

并且

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= \mathbf{V}_{1a} + \mathbf{V}_{1b} = (\mathbf{z}_{11a} + \mathbf{z}_{11b})\mathbf{I}_1 + (\mathbf{z}_{12a} + \mathbf{z}_{12b})\mathbf{I}_2 \\ \mathbf{V}_2 &= \mathbf{V}_{2a} + \mathbf{V}_{2b} = (\mathbf{z}_{21a} + \mathbf{z}_{21b})\mathbf{I}_1 + (\mathbf{z}_{22a} + \mathbf{z}_{22b})\mathbf{I}_2 \end{aligned} \tag{19-34}$$

因此，整个网络的 z 参数为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z}_{11} & \mathbf{z}_{12} \\ \mathbf{z}_{21} & \mathbf{z}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{11a} + \mathbf{z}_{11b} & \mathbf{z}_{12a} + \mathbf{z}_{12b} \\ \mathbf{z}_{21a} + \mathbf{z}_{21b} & \mathbf{z}_{22a} + \mathbf{z}_{22b} \end{bmatrix} \tag{19-35}$$

即

$$\boxed{[\mathbf{z}] = [\mathbf{z}_a] + [\mathbf{z}_b]} \tag{19-36}$$

上式表明，整个网络的 $\mathbf{z}$ 参数是单个网络 $\mathbf{z}$ 参数之和。该结论可以推广到 n 个网络的串联情况。如果两个二端口网络串行连接，而且各自的 $[\mathbf{h}]$ 模型已知，则可根据表 19-1 将 $\mathbf{h}$ 参数转换为 $\mathbf{z}$ 参数，然后连用式 (19-36) 得到串联网络总的 $\mathbf{z}$ 参数，最后再利用表 19-1 将结果转换为 $\mathbf{h}$ 参数。

两个二端口网络并联的情况是指：两网络的端电压相等，且总的端口电流是各端口电流之和。除此之外，各网络必须有一个公共参考点，两个网络相互连接时，它们的参考点必须连在一起。图 19-28 所示为两个二端口网络并联的情况。参考串联连接方式的分析过程，总的网络的 $\mathbf{y}$ 参数是：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11} & \mathbf{y}_{12} \\ \mathbf{y}_{21} & \mathbf{y}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11a} + \mathbf{y}_{11b} & \mathbf{y}_{12a} + \mathbf{y}_{12b} \\ \mathbf{y}_{21a} + \mathbf{y}_{21b} & \mathbf{y}_{22a} + \mathbf{y}_{22b} \end{bmatrix} \tag{19-37}$$

图 19-28 两个二端口网络的并联

或

$$\boxed{[\mathbf{y}] = [\mathbf{y}_a] + [\mathbf{y}_b]} \tag{19-38}$$

上式表明，整个网络的 y 参数等于各单个网络 y 参数之和。该结论可以推广到 n 个网络串联情况。

如果一个网络的输出是另一个网络的输入，则称这两个二端口网络是级联的（cascaded)。图 19-29 所示为两个二端口网络的级联连接。级联网络的分析将用到传输参数，这超出了本书的讨论范围。

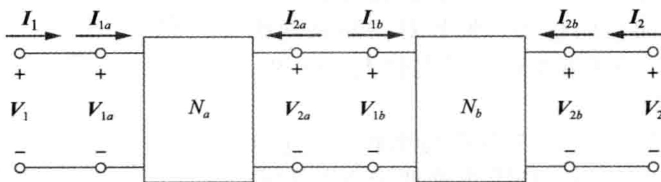


图 19-29 两个二端口网络的级联

例 19-8 计算图 19-30 所示电路的 $\mathbf{V}_2/\mathbf{V}_s$。

解： 图 19-29 所示电路可以看作两个二端口网络的串联。网络 N_b 的 $\mathbf{z}$ 参数为

$$\mathbf{z}_{12b} = \mathbf{z}_{21b} = 10 = \mathbf{z}_{11b} = \mathbf{z}_{22b}$$

因此，

$$[\mathbf{z}] = [\mathbf{z}_a] + [\mathbf{z}_b] = \begin{bmatrix} 12 & 8 \\ 8 & 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 10 \\ 10 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 18 \\ 18 & 30 \end{bmatrix}$$

但

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{z}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{12}\mathbf{I}_2 = 22\mathbf{I}_1 + 18\mathbf{I}_2 \tag{19-8-1}$$

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{z}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{22}\mathbf{I}_2 = 18\mathbf{I}_1 + 30\mathbf{I}_2 \tag{19-8-2}$$

另外，在输入端有

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_s - 5\mathbf{I}_1 \tag{19-8-3}$$

在输出端有

$$\mathbf{V}_2 = -20\mathbf{I}_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{I}_2 = -\mathbf{V}_2/20 \tag{19-8-4}$$

将式（19-8-3）和式（19-8-4）代入式（19-8-1），可以得到

$$\mathbf{V}_s - 5\mathbf{I}_1 = 22\mathbf{I}_1 - \frac{18}{20}\mathbf{V}_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V}_s = 27\mathbf{I}_1 - 0.9\mathbf{V}_2 \tag{19-8-5}$$

将式（19-8-4）代入式（19-8-2），可以得到

$$\mathbf{V}_2 = 18\mathbf{I}_1 - \frac{30}{20}\mathbf{V}_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{I}_1 = \frac{2.5}{18}\mathbf{V}_2 \tag{19-8-6}$$

将式（19-8-6）代入式（19-8-5），可以得到

$$\mathbf{V}_s = 27 \times \frac{2.5}{18}\mathbf{V}_2 - 0.9\mathbf{V}_2 = 2.85\mathbf{V}_2$$

因此，

$$\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_s} = \frac{1}{2.85} = 0.3509$$

◀

练习 19-8　计算图 19-31 所示电路的 $\mathbf{V}_2/\mathbf{V}_s$。

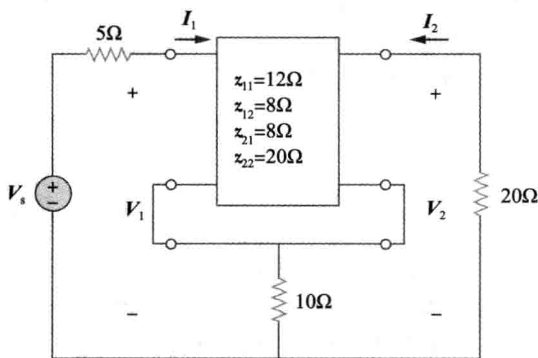


图 19-30　例 19-8 的电路原理图

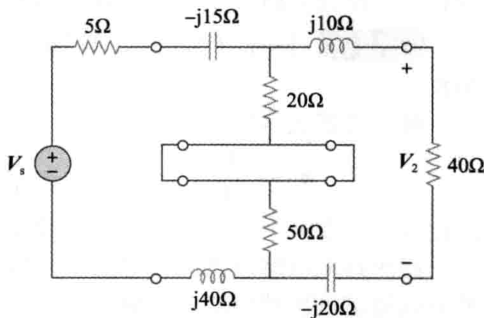


图 19-31　练习 19-8 的电路原理图

答案： $0.58\angle 40^\circ$

例 19-9　计算图 19-32 所示二端口网络的 y 参数。

解： 将图中上面的网络称为 N_a，下面的网络称为 N_b，则两个网络是并联的。将 N_a 和 N_b 与图 19-13a 所示电路进行比较，得到

$$\mathbf{y}_{12a} = -\mathrm{j}4 = \mathbf{y}_{21a}, \quad \mathbf{y}_{11a} = 2 + \mathrm{j}4, \quad \mathbf{y}_{22a} = 3 + \mathrm{j}4$$

或

$$[\mathbf{y}_a] = \begin{bmatrix} 2+\mathrm{j}4 & -\mathrm{j}4 \\ -\mathrm{j}4 & 3+\mathrm{j}4 \end{bmatrix}\mathrm{S}$$

$$\mathbf{y}_{12b} = -4 = \mathbf{y}_{21b}, \quad \mathbf{y}_{11b} = 4 - \mathrm{j}2, \quad \mathbf{y}_{22b} = 4 - \mathrm{j}6$$

或

$$[\mathbf{y}_b] = \begin{bmatrix} 4-\mathrm{j}2 & -4 \\ -4 & 4-\mathrm{j}6 \end{bmatrix}(\mathrm{S})$$

则整个网络的 y 参数是

$$[\mathbf{y}] = [\mathbf{y}_a] + [\mathbf{y}_b] = \begin{bmatrix} 6+\mathrm{j}2 & -4-\mathrm{j}4 \\ -4-\mathrm{j}4 & 7-\mathrm{j}2 \end{bmatrix}(\mathrm{S})$$

◀

练习 19-9 计算图 19-33 所示网络的 y 参数。

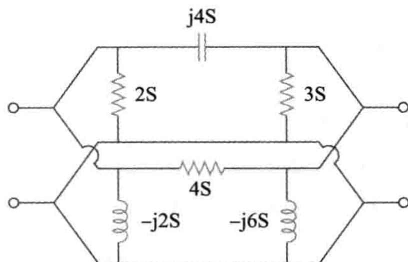


图 19-32 例 19-9 的电路原理图

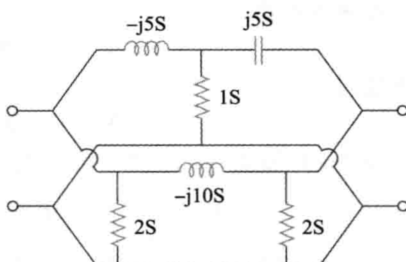


图 19-33 练习 19-9 的电路原理图

答案： $\begin{bmatrix} 27-\text{j}15 & -25+\text{j}10 \\ -25+\text{j}10 & 27-\text{j}5 \end{bmatrix}\text{S}$

19.7 计算机辅助分析

当二端口网络比较复杂时，采用人工计算二端口参数是比较困难的。在这种情况下，可以使用 PSpice 来完成。如果电路是纯电阻电路，则可使用 PSpice 进行直流分析；否则，需在特定频率条件下进行 PSpice 交流分析。应用 PSpice 计算二端口网络某个特定参数的关键在于牢记参数的定义，将适当的端口变量设置为 1A 或 1V 的电源，并将对应的端口设置为开路或短路。下面通过两个例来说明上述过程。

例 19-10 使用 PSpice 计算图 19-34 所示网络的 h 参数。

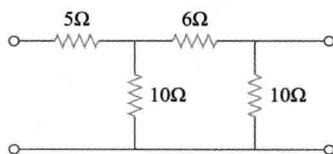


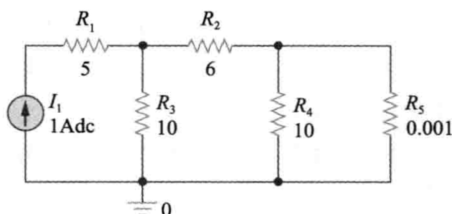
图 19-34 例 19-10 的电路原理图

解： 根据式（19-16），有

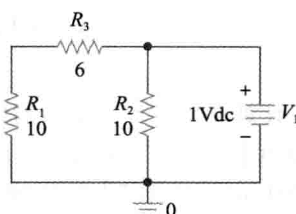
$$\boldsymbol{h}_{11}=\left.\frac{\boldsymbol{V}_1}{\boldsymbol{I}_1}\right|_{\boldsymbol{V}_2=0},\quad \boldsymbol{h}_{21}=\left.\frac{\boldsymbol{I}_2}{\boldsymbol{I}_1}\right|_{\boldsymbol{V}_2=0}$$

由此可见，令 $\boldsymbol{V}_2=0$，即可得到 $\boldsymbol{h}_{11}$ 和 $\boldsymbol{h}_{21}$。另外，令 $\boldsymbol{I}_1=1\text{A}$，则 $\boldsymbol{h}_{11}$ 为 $\boldsymbol{V}_1/1$，$\boldsymbol{h}_{21}$ 为 $\boldsymbol{I}_2/1$。

据此画出电路示意图，如图 19-35a 所示。图中接入 1A 直流电流源 IDC 作为 $\boldsymbol{I}_1=1\text{A}$。考虑到假定输出端短路，在输出端接入一个很小的电阻 R_5 来模拟短路情况。



a）计算 $\boldsymbol{h}_{11}$ 和 $\boldsymbol{h}_{21}$



b）计算 $\boldsymbol{h}_{12}$ 和 $\boldsymbol{h}_{22}$

图 19-35 例 19-10 的 PSpice 示意图

画出图 19-35a 所示电路图，并保存为 exam1910a. dsn，选取 PSPice/New Simulation Profile，系统弹出一个新的仿真对话框。在文件名处输入“exam1910a”，并单击创建，弹出仿真设置对话框。在仿真设置对话框中，分析类型设为偏置点，并单击 OK 按钮。选择 PSpice/Run 进行电路仿真。可以通过单击图标 $\boldsymbol{I}$ 或 $\boldsymbol{V}$（在帮助下方）来显示节点电压或支路电流。单击图标 $\boldsymbol{V}$，观测到 R_3 两端电压为 3.75，因此 $\boldsymbol{V}_1=3.75$（$\boldsymbol{I}_1$ 两端电压）$+5(1)=8.75\text{V}$。单击图标 $\boldsymbol{I}$，观测到流过 R_5 的电流为 624.9mA

$$\boldsymbol{h}_{11}=\frac{\boldsymbol{V}_1}{1}=8.75\Omega,\quad \boldsymbol{h}_{21}=\frac{\boldsymbol{I}_2}{1}=0.625$$

同理，根据式（19-16），得到

$$h_{12} = \frac{V_1}{V_2}\bigg|_{I_1=0}, \quad h_{22} = \frac{I_2}{V_2}\bigg|_{I_1=0}$$

上式表明可以通过输入端开路（$I_1=0$）确定 h_{12} 和 h_{22}。令 $V_2=1\text{V}$，h_{12} 为 $V_1/1$，$h_{22}=I_2/1$。根据图 19-35b 所示电路原理图，在输出端接入 1V 直流电压源 VDC，即令 $V_2=1\text{V}$（注意在图 19-35b中，由于输入端口开路，5Ω 电阻可以忽略不计，但 PSpice 不允许 5Ω 电阻悬空。如果使用一个很大的电阻来代替开路情况，如 10MΩ 电阻，这时可以考虑将 5Ω 电阻包含进去）。

画出图 19-35b 所示电路图，并保存为例 1910b. dsn，选取 PSPice/New Simulation Profile，系统弹出一个新的仿真对话框。在文件名处输入“exam1910b”，并单击创建，弹出仿真设置对话框。在仿真设置对话框中，分析类型设为偏置点，并单击 OK。选择 PSpice/Run 进行电路仿真。可以通过单击 ***I*** 或 ***V*** 图标（帮助下面）来现实节点电压或支路电流。按下图标 ***V***，观测到 R_1 两端电压为 625mV，因此 $V_1=0.625\text{V}$。单击图标 ***I***，观测到流过 V_1 所在支路的电流为 $I_2=162.5\text{mA}$

$$h_{12} = \frac{V_1}{1} = 0.625, \quad h_{22} = \frac{I_2}{1} = 0.1625\text{S}$$ ◀

练习 19-10 使用 PSpice 计算图 19-36 所示网络的 h 参数。

答案： $[h] = \begin{bmatrix} 5.899\Omega & 0.1111 \\ 0.1111 & 0.1111\text{S} \end{bmatrix}$

例 19-11 已知 $\omega=10^6\text{rad/s}$，计算图 19-37 所示电路的 z 参数。

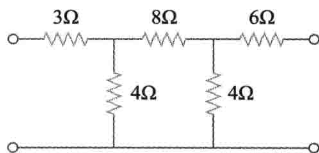


图 19-36 练习 19-10 的电路原理图

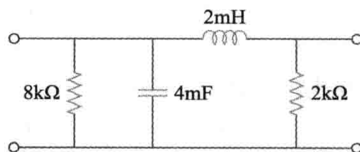


图 19-37 例 19-11 的电路原理图

解： 注意，图 19-34 所示电路为纯电阻电路，因此在例 19-10 中采用的是直流分析。本例由于 L 和 C 都与频率有关，所以采用频率为 $f=\omega/2\pi=0.15915\text{MHz}$ 的交流分析。

在式（19-3），z 参数定义为

$$z_{11} = \frac{V_1}{I_1}\bigg|_{I_2=0}, \quad z_{21} = \frac{V_2}{I_1}\bigg|_{I_2=0}$$

这说明如果令 $I_1=1\text{A}$，并将输出端开路，即 $I_2=0$，则可得到

$$z_{11} = \frac{V_1}{1}, \quad z_{21} = \frac{V_2}{1}$$

使用图 19-38a 所示的电路示意图可以确定上述参数。在输入端口插入一个 1A 的交流电流源 IAC。同时插入两个伪原件 VPRINT1 来确定 V_1 和 V_2。各 VPRINT1 的属性均设置为 AC=yes，MAG=yes，PHASE=yes，以便打印电压的幅度和相位。

画出图 19-38a 所示的电路图，并保存为 exam1911a. dsn。选择 PSpice/New Simulation Profile 进行仿真，在弹出的 New Simulation 对话框中，输入 exam1911a 作为文件名，并单击创建。在弹出的 Simulation Settings 对话框中，选择 Analysis Type 下的 AC Sweep/Noise，选择 AC Sweep Type 下的 Linear。将 Start Freq 设为 0. 1519MEG，将 Final Freq 设为 0. 1519MEG，Total Points 设为 1。

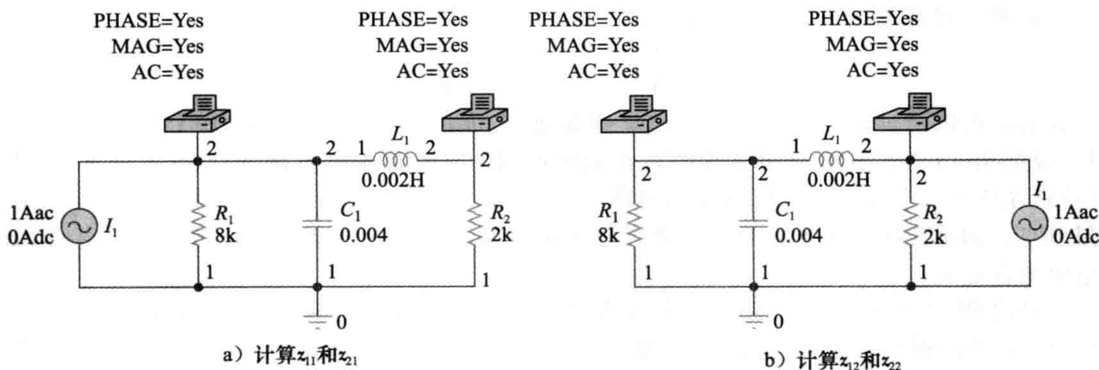


图 19-38 例 19-11 的电路示意图

选择 PSpice/Run 进行电路仿真。选择 PSpice/View Output file 得到输出文件，输出文件包括：

```
FREQ          VM(N00139)     VP(N00139)
1.519E+05     2.619E-04      9.000E+01
FREQ          VM(N00159)     VP(N00159)
1.519E+05     1.895E-04      4.634E+01
```

由输出文件即可确认 $\mathbf{V}_1$ 和 $\mathbf{V}_2$，因此

$$\mathbf{z}_{11}=\frac{\mathbf{V}_1}{1}=261.9\underline{/90^\circ}(\mu\Omega)$$

$$\mathbf{z}_{21}=\frac{\mathbf{V}_2}{1}=189.5\underline{/46.34^\circ}(\mu\Omega)$$

采用类似方式，从式（19-3）

$$\mathbf{z}_{12}=\left.\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_2}\right|_{\mathbf{I}_1=0},\quad \mathbf{z}_{22}=\left.\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_2}\right|_{\mathbf{I}_1=0}$$

令 $\mathbf{I}_2=1\mathrm{A}$，并将输入端口开路，即 $z_{12}=\mathbf{V}_1/1$ 且 $z_{22}=\mathbf{V}_2/1$。得到图 19-38b 所示的电路图。该电路图与图 19-38a 所示电路的唯一区别在于现在的 1A 交流电流源 IAC 插入电路的输出端。对图 19-38b 所示电路进行仿真，即可得到输出文件：

```
FREQ          VM(N00163)     VP(N00163)
1.519E+05     1.895E-04      4.634E+01
FREQ          VM(N00139)     VP(N00139)
1.519E+05     1.381E+03      -1.337E+02
```

因此有：

$$\mathbf{z}_{12}=\frac{\mathbf{V}_1}{1}=189.5\underline{/46.34^\circ}(\mu\Omega)$$

$$\mathbf{z}_{22}=\frac{\mathbf{V}_2}{1}=1381\underline{/-133.7^\circ}(\Omega)$$

◀

练习 19-11 利用 PSpice 试确定图 19-39 所示电路在 $f=60\mathrm{Hz}$ 时的 z 参数。

答案： $[\mathbf{z}]=\begin{bmatrix}11.89\underline{/177.2^\circ} & 0.2629\underline{/99.07^\circ}\\ 0.2629\underline{/99.07^\circ} & 0.2662\underline{/90.03^\circ}\end{bmatrix}\Omega$

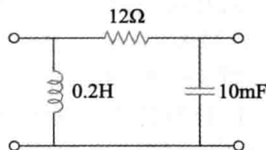


图 19-39 练习 19-11 的电路原理图

†19.8 应用

前面已经学习了如何利用三组网络参数来描述各类二端口网络的特性。如 19-5 节

所述，根据大型网络中双口网络的不同连接方式，某一组特定的参数要比其他组参数具有明显的优势。本节讨论二端口网络参数的一个重要应用：晶体管电路。

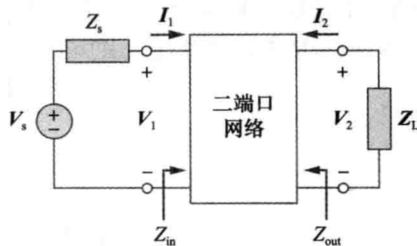


图 19-40　隔离电源与负载的二端口网络

通常采用二端口网络将负载与电路的激励源相互隔离。例如，图 19-40 所示的二端口网络可以表示一个放大器、滤波器或其他电路网络。如果该二端口网络表示的是一个放大器，则容易推导出其电压增益 A_v、电流增益 A_i、输入阻抗 Z_{in} 以及输出阻抗 Z_{out} 的表达式，分别定义为

$$A_v = \frac{\mathbf{V}_2(s)}{\mathbf{V}_1(s)} \tag{19-39}$$

$$A_i = \frac{\mathbf{I}_2(s)}{\mathbf{I}_1(s)} \tag{19-40}$$

$$Z_{in} = \frac{\mathbf{V}_1(s)}{\mathbf{I}_1(s)} \tag{19-41}$$

$$Z_{out} = \left.\frac{\mathbf{V}_2(s)}{\mathbf{I}_2(s)}\right|_{\mathbf{V}_s=0} \tag{19-42}$$

三组二端口网络参数中的任何一组都可以用于推导式（19-39）～式（19-42）的表达式。本节使用混合参数来描述晶体管放大器电路。

混合参数（h 参数）对晶体管电路最为有用，这种参数容易测量，通常可以由制造商的数据手册或说明书中获得。使用 h 参数可以对晶体管电路的性能进行快速估计，可以用于确定晶体管的准确电压增益、输入阻抗以及输出阻抗。

晶体管 h 参数的下标表示有特定的含义。第一个下标与一般 h 参数的关系式如下：

$$h_i = h_{11}, \quad h_r = h_{12}, \quad h_f = h_{21}, \quad h_o = h_{22} \tag{19-43}$$

下标 i、r、f、o 分别表示输入、反向、前向和输出。晶体管 h 参数的第二个下标字母表示晶体管的连接方式：e 表示共射级连接（CE），c 表示共集电极连接（CC），而 b 表示共基极连接（CB）。本节主要讨论共射级连接，因此，共射级晶体管放大器的四个 h 参数分别为：

$$\begin{aligned} h_{ie} &= \text{基极输入阻抗} \\ h_{re} &= \text{反向电压反馈率} \\ h_{fe} &= \text{集电极电流增益} \\ h_{oe} &= \text{输出导纳} \end{aligned} \tag{19-44}$$

上述参数的计算或测量方法与一般 h 参数的计算或测量方法相同，其典型值为：$h_{ie}=6\text{k}\Omega$，$h_{re}=1.5\times10^{-4}$，$h_{fe}=200$，$h_{oe}=8\mu\text{S}$。注意，这些参数值是在特定条件下测量的值，用来表示晶体管的交流特性。

图 19-41 给出了共射级放大器的电路原理图及其等效的混合参数模型。由图 19-41 可见：

$$\mathbf{V}_b = h_{ie}\mathbf{I}_b + h_{re}\mathbf{V}_c \tag{19-45a}$$

$$\mathbf{I}_c = h_{fe}\mathbf{I}_b + h_{oe}\mathbf{V}_c \tag{19-45b}$$

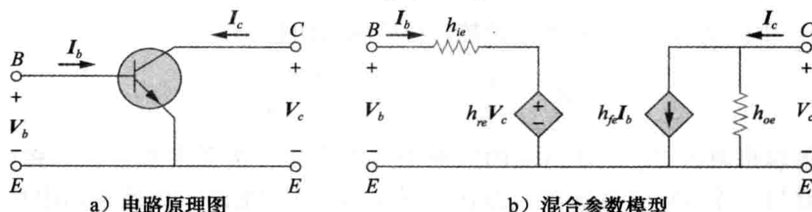


图 19-41　共射级放大器

考虑到图 19-42 所示的与交流电源和负载连接的晶体管放大器，这是大型网络中嵌入双口网络的一个示例。利用式（19-45a）和式（19-45b）就可分析该混合等效电路。由图 19-42 可知，$\boldsymbol{V}_c=-R_L\boldsymbol{I}_c$，将其代入式（19-45b），可得：

$$\boldsymbol{I}_c = h_{fe}\boldsymbol{I}_b - h_{oe}R_L\boldsymbol{I}_c$$

或

$$(1+h_{oe}R_L)\boldsymbol{I}_c = h_{fe}\boldsymbol{I}_b \tag{19-46}$$

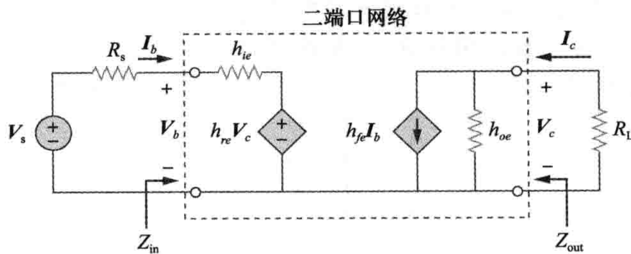


图 19-42 包含激励电源和负载电阻的晶体管放大器

因此可以确定放大器的电流增益为

$$\boxed{A_i = \frac{\boldsymbol{I}_c}{\boldsymbol{I}_b} = \frac{h_{fe}}{1+h_{oe}R_L}} \tag{19-47}$$

由式（19-45b）和（19-46），可以得到用 $\boldsymbol{V}_c$ 表示的 $\boldsymbol{I}_b$：

$$\boldsymbol{I}_c = \frac{h_{fe}}{1+h_{oe}R_L}\boldsymbol{I}_b = h_{fe}\boldsymbol{I}_b + h_{oe}\boldsymbol{V}_c$$

或：

$$\boldsymbol{I}_b = \frac{h_{oe}}{\dfrac{h_{fe}}{1+h_{oe}R_L} - h_{fe}}\boldsymbol{V}_c \tag{19-48}$$

将式（19-48）带入式（19-45a），并除以 $\boldsymbol{V}_c$，得到：

$$\frac{\boldsymbol{V}_b}{\boldsymbol{V}_c} = \frac{h_{oe}h_{ie}}{\dfrac{h_{fe}}{1+h_{oe}R_L} - h_{fe}} + h_{re} = \frac{h_{ie}+h_{ie}h_{oe}R_L - h_{re}h_{fe}R_L}{-h_{fe}R_L} \tag{19-49}$$

因此，电压增益为

$$\boxed{A_v = \frac{\boldsymbol{V}_c}{\boldsymbol{V}_b} = \frac{-h_{fe}R_L}{h_{ie}+(h_{ie}h_{oe}-h_{re}h_{fe})R_L}} \tag{19-50}$$

将 $\boldsymbol{V}_c=-R_L\boldsymbol{I}_c$ 代入式（19-45a），得到

$$\boldsymbol{V}_b = h_{ie}\boldsymbol{I}_b - h_{re}R_L\boldsymbol{I}_c$$

或

$$\frac{\boldsymbol{V}_b}{\boldsymbol{I}_b} = h_{ie} - h_{re}R_L\frac{\boldsymbol{I}_c}{\boldsymbol{I}_b} \tag{19-51}$$

将式（19-47）中的 $\boldsymbol{I}_c/\boldsymbol{I}_b$ 用电流增益代替，得到输入阻抗为

$$\boxed{\boldsymbol{Z}_{in} = \frac{\boldsymbol{V}_b}{\boldsymbol{I}_b} = h_{ie} - \frac{h_{re}h_{fe}R_L}{1+h_{oe}R_L}} \tag{19-52}$$

放大器的输出阻抗 Z_{out} 是输出端的戴维南等效电阻，按照常规方法，将电压源短路，并在输出端设置一个 1V 的电压源，得到如图 19-43 所示电路。因此输出阻抗 $Z_{out}=1/\boldsymbol{I}_c$。由于 $\boldsymbol{V}_c=1$V，所以对于输入回路有：

$$h_{re}(1) = -\boldsymbol{I}_b(R_s + h_{ie}) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{I}_b = -\frac{h_{re}}{R_s + h_{ie}} \tag{19-53}$$

对于输出回路，有：

$$\boldsymbol{I}_c = h_{oe}(1) + h_{fe}\boldsymbol{I}_b \tag{19-54}$$

将式（19-53）代入式（19-54），可以得到：

$$\boldsymbol{I}_c = \frac{(R_s + h_{ie})h_{oe} - h_{re}h_{fe}}{R_s + h_{ie}} \tag{19-55}$$

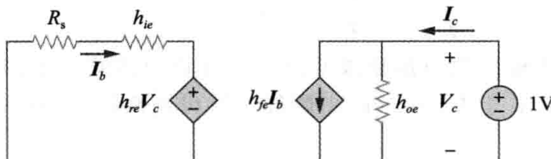


图 19-43　确定图 19-42 所示放大器电路的输出阻抗

由此，即可确定输出阻抗 $\boldsymbol{Z}_{out}$ 为 $1/\boldsymbol{I}_c$，即

$$\boxed{Z_{out} = \frac{R_s + h_{ie}}{(R_s + h_{ie})h_{oe} - h_{re}h_{fe}}} \tag{19-56}$$

例 19-12 对于图 19-44 所示的共射级放大器，试利用如下 h 参数：$h_{ie}=1\text{k}\Omega$，$h_{re}=2.5\times10^{-4}$，$h_{fe}=50$，$h_{oe}=20\mu\text{S}$。(a) 确定电压增益、输入阻抗以及输出阻抗，(b) 求出输出电压 $\boldsymbol{V}_o$。

解：（1）已知 $R_s=0.8\text{k}\Omega$，$R_L=1.2\text{k}\Omega$。将图 19-44 所示的晶体管看做是二端口网络，并由式（19-47）到式（19-56），可得：

$$h_{ie}h_{oe} - h_{re}h_{fe} = 10^3 \times 20 \times 10^{-6} - 2.5 \times 10^{-4} \times 50 = 7.5 \times 10^{-3}$$

$$A_v = \frac{-h_{fe}R_L}{h_{ie} + (h_{ie}h_{oe} - h_{re}h_{fe})R_L} = \frac{-50 \times 1200}{1000 + 7.5 \times 10^{-3} \times 1200} = -59.46$$

$$A_i = \frac{h_{fe}}{1 + h_{oe}R_L} = \frac{50}{1 + 20 \times 10^{-6} \times 1200} = 48.83$$

$$Z_{in} = h_{ie} - \frac{h_{re}h_{fe}R_L}{1 + h_{oe}R_L} = 1000 - \frac{2.5 \times 10^{-4} \times 50 \times 1200}{1 + 20 \times 10^{-6} \times 1200} = 985.4(\Omega)$$

$$(R_s + h_{ie})h_{oe} - h_{re}h_{fe} = (800 + 1000) \times 20 \times 10^{-6} - 2.5 \times 10^{-4} \times 50 = 23.5 \times 10^{-3}$$

$$Z_{out} = \frac{R_s + h_{ie}}{(R_s + h_{ie})h_{oe} - h_{re}h_{fe}} = \frac{800 + 1000}{23.5 \times 10^{-3}} = 76.6(\text{k}\Omega)$$

（2）输出电压为：

$$\boldsymbol{V}_o = A_V\boldsymbol{V}_s = -59.46(3.2\underline{/0^\circ})\text{mV} = 0.19\underline{/180^\circ}(\text{V})$$ ◀

练习 19-12　对于图 19-45 所示的晶体管放大器，试求电压增益、电流增益、输入阻抗以及输出阻抗，假定：$h_{ie}=6\text{k}\Omega$、$h_{re}=1.5\times10^{-4}$、$h_{fe}=200$、$h_{oe}=8\mu\text{S}$。

答案：—123.61，194.17；6kΩ；128.08kΩ

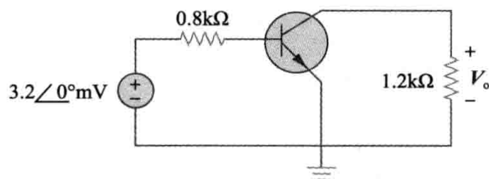


图 19-44　例 19-12 的电路原理图

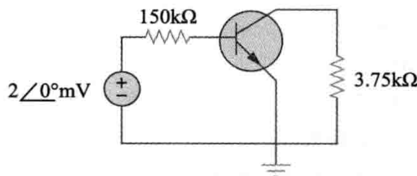


图 19-45　练习 19-12 的电路原理图

19.9 本章小结

1）二端口网络是指具有两个端口（或两对接入通道）——输入端口与输出端口的网络。
2）用于建立二端口网络模型的三组参数包括：阻抗参数 $[\boldsymbol{z}]$、导纳参数 $[\boldsymbol{y}]$、混合参数 $[\boldsymbol{h}]$。
3）描述输入端口变量与输出端口变量之间关系的参数是

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{V}_1\\\boldsymbol{V}_2\end{bmatrix}=[\boldsymbol{z}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_1\\\boldsymbol{I}_2\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_1\\\boldsymbol{I}_2\end{bmatrix}=[\boldsymbol{y}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{V}_1\\\boldsymbol{V}_2\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}\boldsymbol{V}_1\\\boldsymbol{I}_2\end{bmatrix}=[\boldsymbol{h}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_1\\\boldsymbol{V}_2\end{bmatrix}$$

4）将适当的输入端口或输出端口短路或开路，可计算出或测量出网络的参数。
5）如果 $\boldsymbol{z}_{12}=\boldsymbol{z}_{21}$，$\boldsymbol{y}_{12}=\boldsymbol{y}_{21}$，$\boldsymbol{h}_{12}=-\boldsymbol{h}_{21}$，则称二端口网络是互易网络。包含受控源的网络不是互易网络。
6）表 19-1 列出了三组参数之间的换算关系。
7）二端口网络的连接方式包括串联和并联。在串联连接时，$\boldsymbol{z}$ 参数是相加的；在并联连接时，$\boldsymbol{y}$ 参数是相加的。
8）利用 PSpice 软件将合适的端口变量设定为 1A 或 1V 的电压源，并将其他端口开路或短路，即可计算出二端口网络的参数。
9）混合参数可以用于分析晶体管电路。

复习题

1 图 19-46a 所示的单元件二端口网络中，$\boldsymbol{z}_{11}$ 为：

(a) 0　　(b) 5
(c) 10　　(d) 20
(e) 不存在

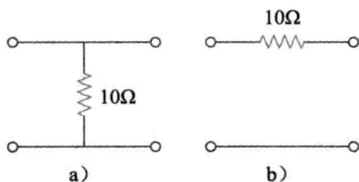


图 19-46 复习题的电路原理图

2 对于图 19-46b 所示的单元件二端口网络，$\boldsymbol{z}_{11}$ 为：

(a) 0　　(b) 5
(c) 10　　(d) 20
(e) 不存在

3 图 19-46a 所示的单元件二端口网络中，$\boldsymbol{y}_{11}$ 为：

(a) 0　　(b) 5
(c) 10　　(d) 20
(e) 不存在

4 对于图 19-46b 所示的单元件二端口网络，$\boldsymbol{h}_{21}$ 为：

(a) −0.1　　(b) −1
(c) 0　　(d) 10
(e) 不存在

5 当某二端口电路的端口 1 短路时，$\boldsymbol{I}_1=4\boldsymbol{I}_2$，$\boldsymbol{V}_2=0.25\boldsymbol{I}_2$，下述哪个结论是正确的？

(a) $\boldsymbol{y}_{11}=4$　　(b) $\boldsymbol{y}_{12}=16$
(c) $\boldsymbol{y}_{21}=16$　　(d) $\boldsymbol{y}_{22}=0.25$

6 某二端口网络可以用如下方程描述：

$$\boldsymbol{V}_1=50\boldsymbol{I}_1+10\boldsymbol{I}_2$$
$$\boldsymbol{V}_2=30\boldsymbol{I}_1+20\boldsymbol{I}_2$$

以下哪个结论是不正确的？

(a) $\boldsymbol{z}_{12}=10$　　(b) $\boldsymbol{y}_{12}=-0.0143$
(c) $\boldsymbol{h}_{12}=0.5$　　(d) $\boldsymbol{h}_{21}=0.5$

7 对于互易双口网络而言，以下哪个结论是不正确的？

(a) $\boldsymbol{z}_{21}=\boldsymbol{z}_{12}$　　(b) $\boldsymbol{y}_{21}=\boldsymbol{y}_{12}$
(c) $\boldsymbol{h}_{21}=\boldsymbol{h}_{12}$　　(d) $\boldsymbol{h}_{21}=-\boldsymbol{h}_{12}$

8 已知 $\boldsymbol{z}$ 参数为：

$$[\boldsymbol{z}]=\begin{bmatrix}4&3\\2&5\end{bmatrix}\Omega$$

对应的 $\boldsymbol{y}_{11}$ 为：

(a) −3/14　　(b) −2/14
(c) 4/14　　(d) 5/14

9 对于复习题 8 给出的 $\boldsymbol{z}$ 参数，对应的 $\boldsymbol{h}_{11}$ 为：

(a) 14/5　　(b) 4/5
(c) 3/5　　(d) 1/5

10 如果将图 19-46 所示的两个单元件二端口网络级联，则 z_{11} 为：
(a) 0 (b) 0.1
(c) 2 (d) 10
(e) 不存在

答案：1 (c)，2 (e)，3 (e)，4 (b)，5 (b)，6 (d)，7 (c)，8 (d)，9 (a)，10 (e)

习题

19.2 节

1 试确定图 19-47 所示网络的 z 参数。

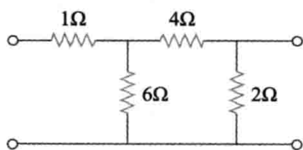


图 19-47 习题 1 的电路原理图

2 试确定图 19-48 所示二端口网络的 z 参数。

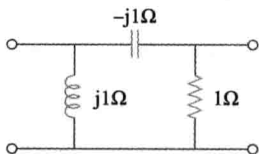


图 19-48 习题 2 的电路原理图

3 试确定图 19-49 所示二端口网络的 z 参数。

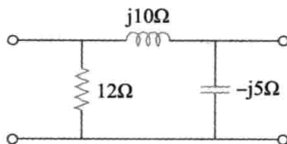


图 19-49 习题 3 的电路原理图

4 试确定图 19-50 所示二端口网络的 z 参数，并用 s 表示。

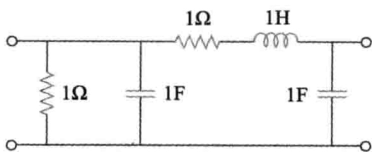


图 19-50 习题 4 的电路原理图

5 设计一个二端口网络，其 z 参数满足：

$$[z]=\begin{bmatrix}10 & 4\\ 4 & 6\end{bmatrix}\Omega$$

6 某二端口网络的 z 参数如下，

$$[z]=\begin{bmatrix}6+j3 & 5-j2\\ 5-j2 & 8-j\end{bmatrix}\Omega$$

试设计该网络。

7 图 19-51 所示二端口网络的 z 参数为：

$$[z]=\begin{bmatrix}40 & 60\\ 80 & 120\end{bmatrix}\Omega$$

(1) 求满足最大功率条件的 Z_L 的值；
(2) 计算传递给负载的最大功率

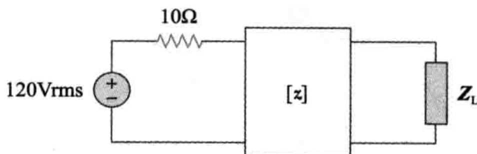


图 19-51 习题 7 的电路原理图

8 确定图 19-52 所示电路的 z 参数。

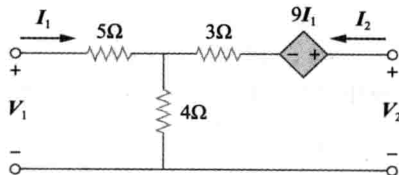


图 19-52 习题 8 的电路原理图

9 确定图 19-53 所示电路的 z 参数。

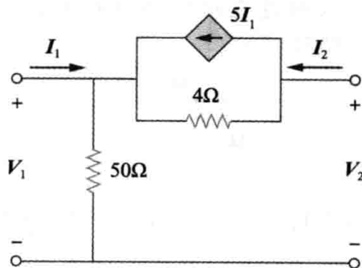


图 19-53 习题 9 的电路原理图

19.3 节

10 计算图 19-54 所示二端口网络的 y 参数。

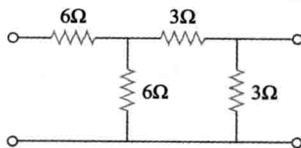


图 19-54 习题 10 的电路原理图

11 用 s 表示图 19-55 所示二端口网络的 y 参数。

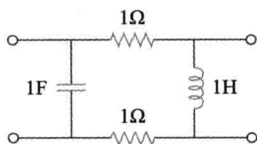


图 19-55 习题 11 的电路原理图

12 确定图 19-56 所示电路图的 y 参数。

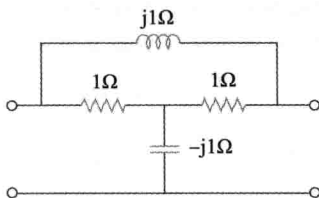


图 19-56 习题 12 的电路原理图

13 试求表示如下 y 参数的电阻电路。

$$[\boldsymbol{y}]=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{8}\end{bmatrix}\mathrm{S}$$

14 试画出具有如下 y 参数的二端口网络。

$$[\boldsymbol{y}]=\begin{bmatrix}1 & -0.5\\ -0.5 & 1.5\end{bmatrix}\mathrm{S}$$

15 在如图 19-57 所示的桥式电路中，$\boldsymbol{I}_1=10\mathrm{A}$，$\boldsymbol{I}_2=-4\mathrm{A}$

(a) 试利用 y 参数确定 $\boldsymbol{V}_1$ 和 $\boldsymbol{V}_2$；

(b) 试通过直接电路分析验证 (a) 的结果。

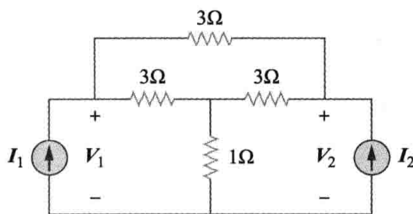


图 19-57 习题 15 的电路原理图

16 试确定图 19-58 所示二端口网络的 y 参数。

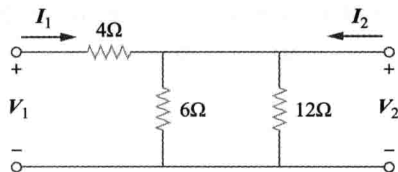


图 19-58 习题 16 和 24 的电路原理图

17 试确定图 19-59 所示电路的 y 参数。

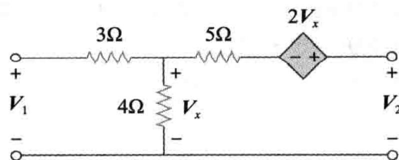


图 19-59 习题 17 的电路原理图

19.4 节

18 求解图 19-60 所示网络的 h 参数。

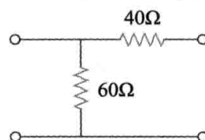


图 19-60 习题 18 的电路原理图

19 试确定图 19-61 所示网络的 h 参数。

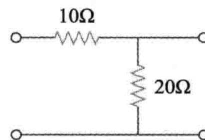


图 19-61 习题 19 的电路原理图

20 试用 s 表示图 19-62 所示二端口网络的 h 参数。

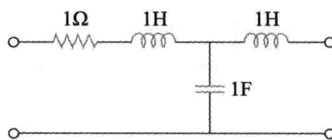


图 19-62 习题 20 的电路原理图

21 试求图 19-63 所示二端口网络的 h 参数。

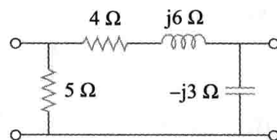


图 19-63 习题 21 的电路原理图

22 确定图 19-64 所示二端口网络的 h 参数。

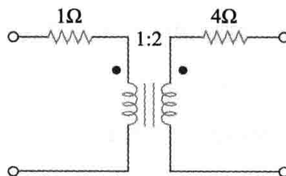


图 19-64 习题 22 的电路原理图

23 对于图 19-65 所示的二端口网络，

$$[\boldsymbol{h}]=\begin{bmatrix}16\Omega & 3\\ -2 & 0.01\text{S}\end{bmatrix}$$

试求：

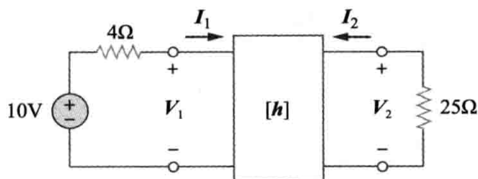


图 19-65 习题 23 的电路原理图

24 对于图 19-58（见习题 16 原理图）所示网络，求 h 参数。

25 对于图 19-66 所示 T 形网络，试证明 h 参数为：

$$h_{11}=R_1+\frac{R_2R_3}{R_2+R_3},\quad h_{12}=\frac{R_2}{R_2+R_3},$$

$$h_{21}=-\frac{R_2}{R_2+R_3},\quad h_{22}=\frac{1}{R_2+R_3}$$

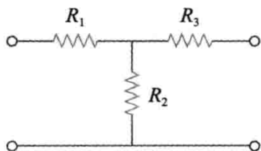


图 19-66 习题 25 的电路原理图

26 对于图 19-67 所示电路，试确定 h 参数。

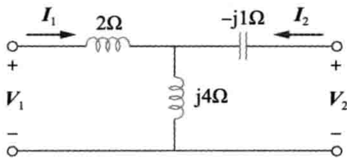


图 19-67 习题 26 的电路原理图

19.5 节

27 已知，$[\boldsymbol{z}]=\begin{bmatrix}2+\text{j} & \text{j}4\\ -1 & 3-\text{j}\end{bmatrix}$

试求解：(a) $[\boldsymbol{y}]$

(b) $[\boldsymbol{h}]$

28 对于图 19-68 所示桥式电路，试求：(a) z 参数；(b) h 参数。

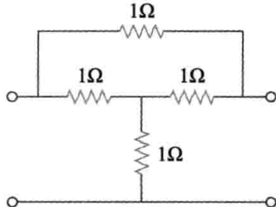


图 19-68 习题 28 的电路原理图

29 某二端口由下式描述

$$\boldsymbol{V}_1=\boldsymbol{I}_1+2\boldsymbol{V}_2$$

$$\boldsymbol{I}_2=-2\boldsymbol{I}_1+0.4\boldsymbol{V}_2$$

试求：(a) z 参数；(b) y 参数。

30 令，

$$[\boldsymbol{y}]=\begin{bmatrix}0.6 & -0.2\\ -0.1 & 0.5\end{bmatrix}\text{S}$$

试求：(a) $[\boldsymbol{z}]$ (b) $[\boldsymbol{h}]$

31 对于某二端口网络，已知 z 参数：$z_{11}=5\text{k}\Omega$，$z_{12}=z_{21}=2\text{k}\Omega$，且 $z_{22}=10\text{k}\Omega$。(a) 求解 y 参数；(b) 确定 h 参数。

32 某二端口网络的 h 参数为：

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{h}_{11} & \boldsymbol{h}_{12}\\ \boldsymbol{h}_{21} & \boldsymbol{h}_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\Omega & 1\\ 12 & 0.4\text{S}\end{bmatrix}$$

求解 z 参数。

33 对于图 19-69 所示电路图，求解 z 参数、y 参数和 h 参数。

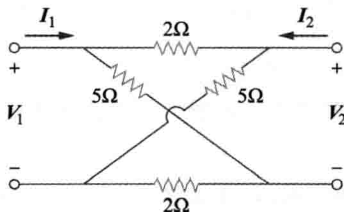


图 19-69 习题 33 的电路原理图

19.6 节

34 图 19-70 所示电路的 y 参数是多少？

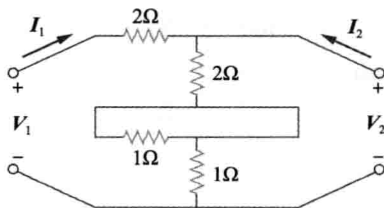


图 19-70 习题 34 的电路原理图

35 对于图 19-71 所示二端口网络，令 $y_{12}=y_{21}=0$，$y_{11}=2\text{mS}$，且 $y_{22}=10\text{mS}$，试求 V_o/V_s。

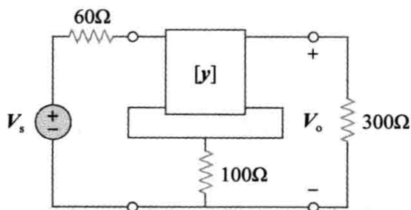


图 19-71 习题 35 的电路原理图

36 图 19-72 所示为两个二端口串联，试计算 z 的参数。

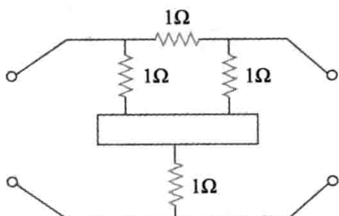


图 19-72 习题 36 的电路原理图

37 试图 19-73 所示网络的 h 参数。

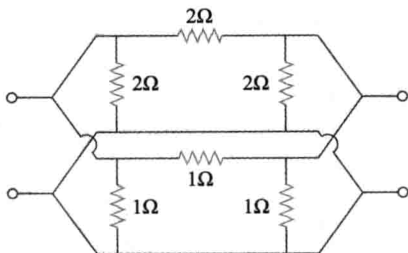


图 19-73 习题 37 的电路原理图

19.7 节

38 使用 PSpice 计算图 19-74 所示网络的 z 参数。

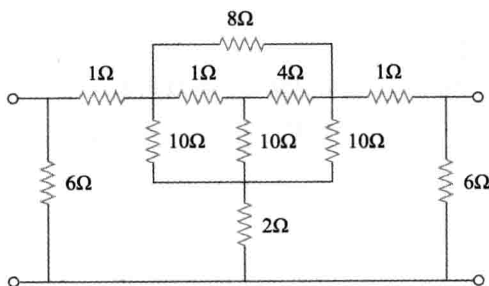


图 19-74 习题 38 的电路原理图

39 使用 PSpice 计算图 19-75 所示网络的 h 参数，假设 $\omega=1\text{rad/s}$。

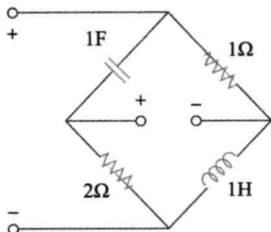


图 19-75 习题 39 的电路原理图

40 使用 PSpice 计算图 19-76 所示电路的 h 参数，假设 $\omega=4\text{rad/s}$。

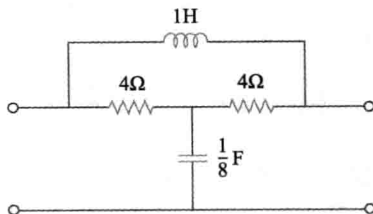


图 19-76 习题 40 的电路原理图

41 使用 PSpice 确定图 19-77 所示电路的 z 参数，假设 $\omega=2\text{rad/s}$。

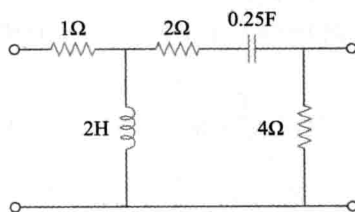


图 19-77 习题 41 的电路原理图

42 若 $\omega=1\text{rad/s}$，使用 PSpice 求解图 19-78 所示网络的 z 参数。

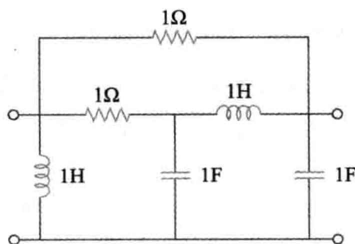


图 19-78 习题 42 的电路原理图

19-8 节

43 某共射极电路的晶体管参数如下：

$h_{ie}=2640\Omega$，$h_{re}=2.6\times10^{-4}$，$h_{fe}=72$，$h_{oe}=16\mu\text{S}$，$R_L=100\text{k}\Omega$

试问该晶体管的电压放大倍数是多少？该放大倍数用分贝表示的增益是多少？

44 某晶体管具有如下参数：

$h_{fe}=120$，$h_{ie}=2\text{k}\Omega$，

$h_{re}=10^{-4}$，$h_{oe}=20\mu\text{S}$

将其用在共射极放大器中，提供 1～5kΩ 的输入电阻。

(a) 试确定负载电阻 R_L；

(b) 如果该放大器由内阻为 600Ω 的 4mV 电压源驱动，试计算 A_v、A_i 和 Z_{out}；

(c) 试求负载两端的电压。

*45　对于图 19-79 所示的晶体管网络，已知 $h_{fe}=80$，$h_{ie}=1.2\text{k}\Omega$，$h_{re}=1.5\times10^{-4}$，$h_{oe}=20\mu\text{S}$，试确定：

(a) 电压增益 $A_v=V_o/V_s$

(b) 电流增益 $A_i=i_o/I_i$

(c) 输入阻抗 Z_{in}

(d) 输出阻抗 Z_{out}

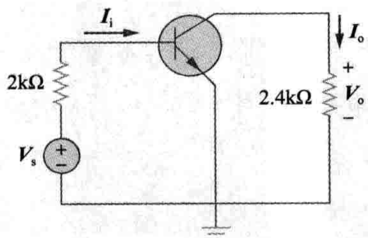


图 19-79　习题 45 的电路原理图

*46　试确定图 19-80 所示运算放大器的 A_v、A_i、Z_{in}和 Z_{out}，假定：

$h_{ie}=4\text{k}\Omega$，$h_{re}=10^{-4}$，$h_{fe}=100$，$h_{oe}=30\mu\text{S}$。

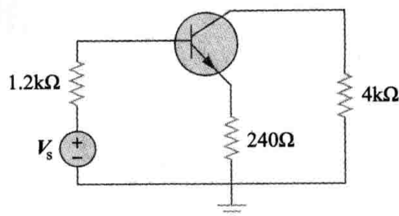


图 19-80　习题 46 的电路原理图

*47　试计算图 19-47 所示晶体管网络的 A_v、A_i、Z_{in}和 Z_{out}。假定：

$h_{ie}=2\text{k}\Omega$，$h_{re}=2.5\times10^{-4}$，$h_{fe}=150$，$h_{oe}=10\mu\text{S}$。

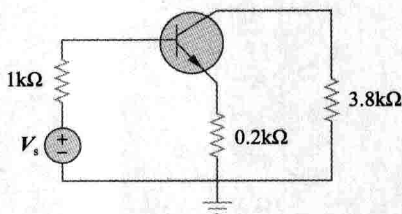


图 19-81　习题 47 的电路原理图